压缩感知浅析

李 峰 郭 毅 著

科 学 出 版 社

压缩感知浅析

李峰 郭毅 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书共7章，主要介绍压缩感知最基本的理论和典型应用。第1章简要地勾勒了压缩感知理论的基本轮廓和背景知识；第2章介绍了信号的稀疏性和可压缩信号模型；第3章深入讨论了采样矩阵应该具有的特性和其设计原则；第4章分析了在压缩感知的重建中采用 ℓ_1 范数最小化的根本原因；第5章系统地介绍了稀疏信号重建的典型算法；第6章讨论了稀疏编码与字典学习的相关知识；第7章介绍了压缩感知在几个特殊领域的典型应用。本书试图用最朴实的语句和简洁的公式来系统性地介绍压缩感知理论核心和其在实际中的应用。压缩感知虽然不像奈奎斯特采样定律一样具有普适性，但其在某些特殊的应用场景下，确实能够起到事半功倍的效果。

本书可供理工科类专业研究生以及高年级本科生阅读，也可供大专院校的教师、科研机构的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

压缩感知浅析/李峰，郭毅著. —北京：科学出版社，2015
ISBN 978-7-03-045748-6

Ⅰ.①压… Ⅱ.①李… ②郭… Ⅲ.①数字信号处理-研究
Ⅳ.①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第225209号

责任编辑：张海娜 罗 娟 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 倩 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年10月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015年10月第一次印刷 印张：10 1/2 彩插：2
字数：212 000

定价：68.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“压缩感知”的英文表述为 compressive sensing 或者 compressed sensing，抑或 compressive sampling，缩写为 CS。单纯的“压缩”很容易理解，即把原来有冗余的数据剔除掉，形成更为节省内存空间的精炼数据；单纯的“感知”也很容易理解，即信号采样（模拟信号变成数字信号的过程）。“压缩感知”这种直白的翻译一开始可能不是很容易理解，但当了解了其深层次的理论后，就能慢慢理解它的本质，也就是把压缩和采样合二为一，即采样的过程也就是压缩的过程，经压缩感知采样后的数据本身就是压缩后的数据。该理论一经提出，便在信息论、信号/图像处理、医疗成像、射电天文、模式识别、光学/雷达成像、信道编码等诸多领域引起广泛关注。

我们发现到目前为止，国内尚没有系统介绍压缩感知的专著，在科学高速发展的今天，我们认为有必要简单扼要地将这个比较前沿的、有别于传统的采样方法及其相关的发展动态介绍给国内的科研工作者。作者李峰第一次接触压缩感知，是始于 2008 年在新南威尔士大学攻读博士学位时参加的一个学术报告，从那时起就一直关注这个理论的进展。而后在澳大利亚联邦科学与工业研究组织开展了将压缩感知应用到射电天文的相关研究，因而在这个领域中积累了一定的理论基础和实际经验。回国后，仍然没有放弃对这个理论的关注，同时也意识到国内还没有关于压缩感知的相关书籍，与同在澳大利亚联邦科学与工业研究组织中长期从事计算统计（包括稀疏模型）工作的郭毅研究员交流后，两人一拍即合，开始了本书的撰写工作。

本书将主要介绍压缩感知的基本概念。主要内容分为稀疏性、可压缩信号、采样矩阵设计理论、ℓ_1范数最小化、稀疏信号重建方法简介、稀疏编码与字典学习和压缩感知应用等几个章节，大体上勾勒了压缩感知理论系统的基本轮廓。如果该书能够使读者在各自的研究领域中

拓展思路，我们将倍感荣幸与自豪。

本书作者李峰博士要特别感谢射电天文学家 Tim Cornwell 博士、图像处理专家 Donald Fraser 博士、遥感图像分析专家贾修萍博士、航天资深研究员张伟博士多年以来的帮助与支持，感谢国家自然科学基金面上项目(41371415)的支持。郭毅博士要感谢其长期科研合作者高俊斌教授(查尔斯特大学)、资深统计学家 Mark Berman(澳大利亚联邦科学与工业研究组织)一直以来的帮助与支持。此外，感谢兰州交通大学刘玉红副教授对本书的无偿校对和诸多有价值的修改意见。特别地，还要感谢 Igor Carron 博士关于压缩感知的个人博客(http://nuit-blanche.blogspot.com.au)，我们从上面汲取了大量有用的资料和知识。最后，感谢家人对我们从事科研工作的理解和支持。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏之处，欢迎读者批评指正。

李　峰
中国空间技术研究院钱学森空间技术实验室
郭　毅
澳大利亚联邦科学与工业研究组织
2015 年 10 月

目　　录

第1章　绪　　论

人类已经步入一个数字化的时代，很多信号处理已经从模拟领域进入数字领域。例如，很多身边常用的技术正在悄悄地转变，从模拟收音机到数字调频收音机，从模拟电视信号到数字电视信号，从模拟手机到数字手机……这种转变主要是因为数字信号比模拟信号具有更好的操控性、更灵活的应用和更便宜的成本，具有更易推广的潜质。令作者体会最深的是，20 世纪曾叱咤风云的模拟胶片相机经过短短几年的时间，于 21 世纪黯然退出主流市场，直接导致了国产胶卷品牌“乐凯”成为中国人永久的记忆。数字信号的巨大成功使得采样系统获取的数字信息从原来的涓涓细流发展成为波涛汹涌的浩瀚海洋。常规把模拟信号变成数字信号的过程，离不开奈奎斯特采样定律，该定律从 20 世纪后半叶开始在采样领域一直处于绝对的主导地位。奈奎斯特采样定律最初是美国物理学家奈奎斯特(Nyquist)在 1928 年提出来的，所以常被称为奈奎斯特采样定律。而后信息论的创始人香农(Shannon)对这一理论加以明确并最终确定为定理来推广，因而该定律亦被称为奈奎斯特-香农采样定律(本书中，将统一简称为奈奎斯特采样定律)。该定律指出，“在模拟信号到数字信号的转换过程中，当采样频率大于信号中最高频率的两倍时，采样后的数字信号能够完整地保留原始信号中的信息”。现实中，一方面，该采样定律经常导致过多的冗余采样或测量值；另一方面，在某些特定的应用中，满足该采样率将耗资巨大，甚至有时受客观条件限制，满足奈奎斯特采样定律的采样频率是根本无法实现的。虽然目前计算机的处理能力得到了长足的发展，但在数码相机成像、视频捕获、医疗成像、射电天文观测、远程监控等应用场合的数据获取和数据处理能力仍面临着巨大的挑战。

为了解决在处理多维海量数据时所需要面临的存储和传输的问题，通常采用压缩技术，即通过对原始数字信号的精炼表达，减少原始

数据对存储空间和传输带宽上的需求。压缩技术大致分为两类:无损压缩和有损压缩。无损压缩顾名思义就是利用信号压缩后的精炼表达可以没有任何失真地恢复出原始数字信号;有损压缩则是利用信号压缩后的精炼表达大致地恢复出原始信号,恢复后信号与原始信号虽然有一定的误差,但误差在特定的应用中处于可接受的范围。很明显,虽然无损压缩很吸引人,但是由于它所能提供的压缩比有限,因而往往不适用于需要大压缩率的场合。数据压缩技术几乎无处不在,例如,拍摄的照片、听的音乐、欣赏的视频,甚至在星载光学遥感领域,几乎所有的光电载荷均配有专门的数据压缩单元。

变换域编码是一种较为流行的数据压缩方法,它通过将原始信号变换到某一个适当的变换域中来挖掘信号在该变换域中的稀疏性表达或可压缩的表达形式。这里的"稀疏性表达"是指,假设原始信号长度为 N,在变换域中该信号只有 K 个非零的系数,其中 $K \ll N$。利用这 K 个非零系数可以很好地表达原始信号。"可压缩的表达形式"是指原始信号可以很好地通过 K 个非零的系数来近似地表达。通过挖掘信号稀疏性表达的方式来实现信号的压缩,这种压缩方式被诸多的压缩标准所采纳,如 JPEG、JPEG2000、H. 264 和 MP3 等。常规的压缩技术如图 1. 1所示。首先实现模拟信号到数字信号的采样,而后把这些采样数据变换到相应的变换域挖掘稀疏性,进而开展量化编码实现压缩。

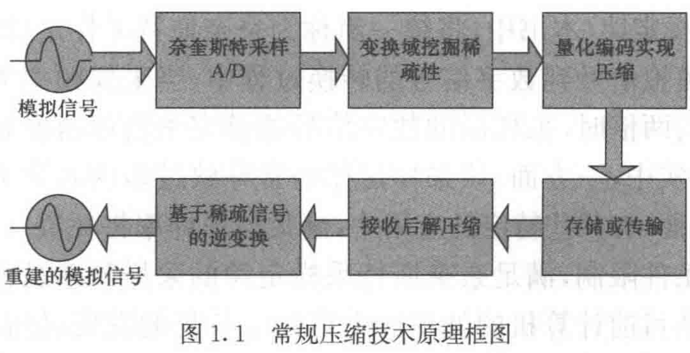
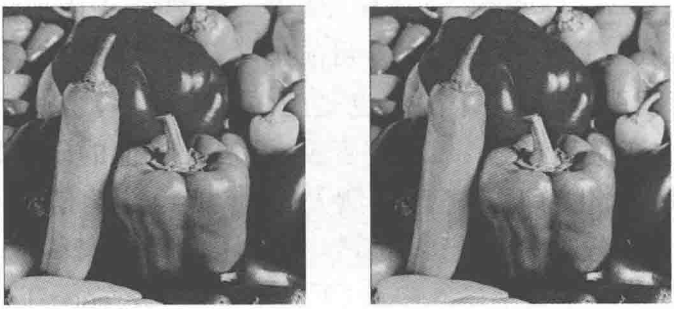


图 1. 1　常规压缩技术原理框图

信号能够被压缩是因为信号本身具有很大的冗余度,无论声音信号还是图像信号都是如此。如图 1. 2(见文后彩图)所示,图(a)为原始图像,图(b)是图(a)经过 JPEG2000 标准压缩后恢复的结果。图(b)的

数据量几乎只占图(a)的10%左右,而人眼几乎分辨不出任何差异。所以图(a)在采样过程中包含了大约90%的冗余数据。我们来回顾这个过程,首先通过A/D完成采样,其中含有大量的冗余数据,而后通过变换域挖掘信号的稀疏性,最后通过压缩算法实现压缩。这个过程其实造成了巨大的浪费,首先采集大量的冗余数据,而后在压缩过程再把这些冗余数据去掉,那么为什么不一开始就丢弃那90%的冗余数据,直接采集有效的数据呢?这样不仅可以节省数据采集过程的成本,还能节省空间,这就引出了本书的核心"压缩感知"。



(a) 图像大小为768KB　　　　(b) 图像大小为86KB

图1.2　图像信号的数据冗余度

压缩感知采样的原理框图如图1.3所示,整个压缩感知的采样体系是由Emmanuel Candès、Justin Romberg、Terence Tao和David Donoho建立的。压缩感知理论指出稀疏的或具有稀疏表达的有限维数的信号可以利用远少于奈奎斯特采样数量的线性、非自适应的测量值无失真地重建出来。该理论一经提出,便在信息论、信号/图像处理、医疗

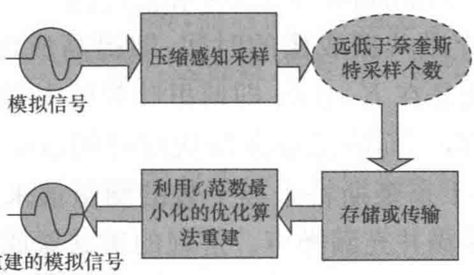


图1.3　压缩感知采样原理框图

成像、射电天文、模式识别、光学/雷达成像和信道编码等诸多领域引起广泛关注。

David Donoho 于 1957 年出生，本科毕业于普林斯顿大学，博士毕业于哈佛大学，目前是美国斯坦福大学统计学的资深教授。他的研究涵盖诸多领域：多维数据的高效降维研究、小波在降噪方面的应用和优化算法研究等。他是美国艺术和科学院的院士，同时也是联邦科学院院士，曾经指导过 20 多名博士研究生，其中 Emmanuel Candès 教授就是他的学生之一。Emmanuel Candès，法国人，博士毕业于斯坦福大学，在那里师从 David Donoho，博士毕业后曾经任职于美国加州理工学院，曾经与 Terence Tao 教授是同事，目前是斯坦福大学的数学与统计学专业和电子工程系荣誉教授，同时也是应用计算数学领域的教授。作为 ridgelet 脊波变换和 curvelet 角波变换的创始人，他的研究领域主要包括数学分析、优化算法、统计估测及医疗影像科学信号处理。Emmanuel Candès 教授曾获诸多国际奖项，包括美国国家科学基金会最高个人奖项(该奖项主要奖励 35 岁以下的学者)。Terence Tao，澳籍华人数学家，中文名为陶哲轩，童年时期就天资过人，曾被称为当代最聪明的人之一，主要研究调和分析、偏微分方程、组合数学、解析数论和表示论，是 2006 年菲尔兹(Fields)数学奖的得主，该奖项号称数学界的诺贝尔奖。从 24 岁起，他在加利福尼亚大学洛杉矶分校担任教授，目前为该校终身数学教授。Justin Romberg，当年是 Emmanuel Candès 教授指导的一名博士后，随着压缩感知理论的发展，目前他已经是乔治亚理工学院的一名副教授。

在 21 世纪初，Emmanuel Candès 和他的博士后 Justin Romberg 致力于如何减少医疗磁共振成像的时间，即提高成像效率方面的研究。磁共振成像的本质是在 K-space 即傅里叶频域中对原始图像的傅里叶变换系数进行采样，因而降低磁共振成像时间最简单的方法就是减少采样个数，以远少于奈奎斯特采样个数的测量值来实现成像。但带来的问题是图像很模糊并充满噪声。常规的磁共振成像时间较长且效率低下，成年人一般可以在成像时期内保持一个姿势不动，但如果患者是幼童，很难保证他们长时间保持一个姿势，因而研究降低磁共振的成像

时间有着重要意义。2004 年 2 月的一天，Emmanuel Candès 正在自己的电脑上看着 Shepp-Logan 图像（这是一幅通常被计算机科学家和工程师用于测试成像算法的标准图像，如图 1.4 所示），并尝试基于一个严重失真的模型图像重建一幅清晰一些的图像，这个失真模型主要是模拟由于磁共振成像仪不能长时间精细扫描而产生的模糊图像。当时，他采用了 ℓ_1 范数最小化的算法尝试实现重建工作。

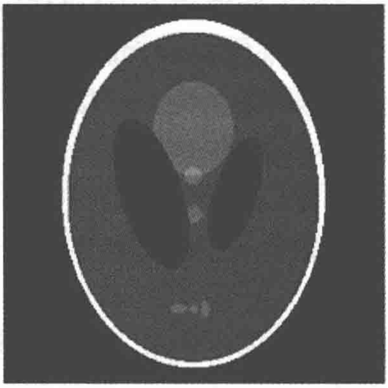


图 1.4 Shepp-Logan 图像

实验中，Emmanuel Candès 本来是希望重建的图像变得稍微清晰一些，但是他突然发现用残缺的采样数据，竟然可以重建出毫无缺陷的图像，即重建图像和原图没有任何差别。他很困惑，这简直如同变魔术一样，太不可思议了。正如他在多次报告中表述的那样："这就好像你给了我十位银行账号的前三位，然后我能够猜出接下来的七位数字。"他尝试在不同类型的模型图像上重新进行这个实验，结果都非常好。Emmanuel Candès 百思不得其解，而后向 Terence Tao 请教，于是 Terence Tao 也开始思考这个问题，这也就成为两人合作的压缩感知领域第一篇论文[1]的基础。同时 David Donoho 也开始着手研究这个有趣的问题，在这些科研人员的强强联合下，构建出了整套完美的压缩感知理论。

如表 1.1 所示，压缩感知与常规的经典采样理论的区别主要表现在如下四个方面。

表 1.1　压缩感知与经典奈奎斯特采样的对比

奈奎斯特采样(20 世纪 50 年代)	压缩感知(2005 年左右)
直接采样	非直接采样
均匀采样	非均匀采样
目标信号最高频率决定采样频率	稀疏性决定采样个数
所采即所得	需要重建步骤

(1) 在常规的奈奎斯特采样框架下,对目标信号的采样是通过 Sinc 函数直接与目标信号的内积来完成的,而压缩感知采样系统通常利用采样矩阵或函数与目标信号乘积的方式间接地获取采样值。

(2) 传统的采样方法利用目标信号中最高频率两倍以上的采样率均匀地对目标信号进行采样,而压缩感知中则采用随机非均匀的采样方式。将在本书的随后章节中阐述随机性在设计采样矩阵或函数中所发挥的重要作用。

(3) 传统的奈奎斯特采样理论要求,采样率至少为带宽受限(带限)的目标信号中最高频率的两倍才能无失真地对目标信号采样,即目标信号最高频率决定采样频率。而在压缩感知的框架下,目标信号的稀疏性决定采样个数。针对目标信号中包含少量非零信号的情况,可以利用远低于传统采样理论所需的采样个数无失真地恢复原始目标信号,所以压缩感知在理论上可以把采样和数据压缩合成一步完成。

(4) 在常规的奈奎斯特采样框架下,信号重建是通过 Sinc 函数插值来完成的。由于压缩感知并没有直接对目标信号采样,因而它需要一个利用基于 ℓ_1 范数最小化的重建步骤来恢复出原始的目标信号。

奈奎斯特采样定律指出,为了完全采样任意的带宽受限信号,至少需要某一特定个数的采样值。与此相对比的是,对稀疏信号或在某个特定的已知字典基中有稀疏表达的信号而言,压缩感知可以极大地降低采样个数,即提高采样效率,因而它比较适合用在某些探测器昂贵或测量手段耗资巨大的场合,这种优势是不言而喻的。关于这个优势,在不同的场合有不一样的解读。例如,对星载光学成像设备而言,省略整个压缩单元意味着节省大量的功耗、空间和重量,这对航天遥感来说意义重大。在射电天文中,阵列天线是观测天文图像的探测器,融入压缩

感知技术，可以在同样的天线个数下，重构出更好的天文图像或者在不牺牲图像质量的前提下减少对天线个数的要求。再举一个简单的例子，常规的可见光CCD或CMOS探测器集成密度高，成本低，这是因为人眼敏感的可见光刚好与材料硅的感光特性一致，因而常规的数码相机价格低廉。然而对红外探测器而言，由于探测器的成本极高，因而相应的红外相机价格昂贵。目前已经有InView公司[2]开展了基于压缩感知的短波红外相机的开发工作，并取得了较为理想的进展。

压缩感知在最近一段时间备受关注，每年以该关键词发表的文章呈雪崩的状态发展。事实上，它的理论发展是诸多学者在各自领域内深入研究的结果。早在1795年，Prony就提出了一种利用采样值来估计几何幂指数参数进而预测噪声的方法[3]。在20世纪90年代，这方面的研究被George以及一直从事挖掘生物磁成像稀疏性表达研究的Gorodnitsky和Rao等进一步扩展[4,5]。同一时期还有Bressler和Feng等为获取某K个非零的带限信号而提出的一种采样策略[6,7]。在21世纪初，Vetterli等针对由K个参数表示的非带限信号提出了一种采样策略，只需要$2K$个采样值即可恢复原始目标信号[8]。同样与压缩感知密不可分地在地球物理领域广为应用的基于ℓ_1范数最小化的重建稀疏信号的方法也可以追溯到20世纪80年代的地质探测领域[9]。

本书将主要介绍压缩感知的基本概念。主要内容分为稀疏性、可压缩信号、采样矩阵设计理论、ℓ_1范数最小化、稀疏信号重建方法简介、稀疏编码与字典学习和压缩感知应用等几个章节。

参考文献

[1] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.

[2] McMackin L, Herman M A, Chatterjee B, et al. A high-resolution swir camera via compressed sensing[C]. Proceedings of the SPIE Defense, Security, and Sensing, International Society for Optics and Photonics,2012:835303-835310.

[3] Prony R. Essai experimental [J]. de l'Ecole Polytechnique(Paris), 1795, 1(2): 24-76.

[4] Gorodnitsky I F, Rao B D, George J. Source localization in magnetoencephalography using an iterative weighted minimum norm algorithm[C]. Proceedings of the Signals, Systems and Computers, Conference Record of The Twenty-Sixth Asilomar Conference on, 1992,1:

167-171.

[5] Rao B D. Signal processing with the sparseness constraint[C]. Proceedings of the Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998,3: Ⅲ-1861.

[6] Feng P. Universal Minimum-rate Sampling and Spectrum-blind Reconstruction for Multiband Signals [D]. Urbana-Champaign: University of Illinois, 1998.

[7] Feng P, Bressler Y. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals[C]. Proceedings of the ICASSP-96,1996,3:1688-1691.

[8] Vetterli M, Marziliano P, Blu T. Sampling signals with finite rate of innovation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(6): 1417-1428.

[9] Santosa F, Symes W W. Linear inversion of band-limited reflection seismograms [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7(4): 1307-1330.

第 2 章 稀疏信号和可压缩信号模型

2.1 矢量空间简介

一直以来,信号处理都是以物理系统产生的信号为中心展开的。很多自然的或人造的物理系统都可以被描述为诸多属性的集合,因而很自然地,在现代信号处理中通常采用矢量空间中的矢量来描述信号。在本书中,假设读者已经较为熟悉矢量空间的一些基本概念。这里只是简单地回顾一下与压缩感知理论相关的一些关键术语和概念。需要更多了解矢量空间的读者可以参考文献[1]。

通常可以把有限域中的离散信号看成分布于 N 维欧几里得空间中的向量,将这个空间简记为$\mathbb{R}^N$。往往比较关心矢量的范数 ℓ_p,针对 $p\in[1,\infty)$时定义如下:

$$\|x\|_p=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,\infty)\\ \max|x_i|, & p=\infty\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,N \tag{2.1}$$

$\mathbb{R}^N$中的标准内积定义为

$$\langle x,z\rangle=z^{\mathrm{T}}x=\sum_{i=1}^{N}x_i z_i \tag{2.2}$$

因而矢量的范数 ℓ_2 可以表示为$\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle}$。而在 $p<1$ 的情况下,式(2.1)中定义的范数已经无法满足三角不等式,所以它本质上是拟范数(quasinorm)[2]。本书中,将经常采用如下表达式$\|x\|_0=|\mathrm{supp}(x)|$,其中 $\mathrm{supp}(x)=\{i:x_i\neq 0\}$表示 x 的支撑集或简称为支撑;$|s|$表示集合s的基数,也就是集合s中元素的个数。$\|x\|_0$ 通常记为 ℓ_0,注意$\|\cdot\|_0$ 甚至连拟范数都谈不上。

范数或拟范数 ℓ_p 通常随着 p 的不同而具有不同的特性。如图 2.1 所示,在$\mathbb{R}^2$中的单位球体即$\{x:\|x\|_p=1\}$时,有不同的表现。图 2.1(a)