高 等 学 校 教 材

Linear Algebra
线性代数

主　编　苏晓明　宋桂荣　卢建伟
副主编　石鸿雁　李　媛　王　博

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　苏晓明　宋桂荣　卢建伟
副主编　石鸿雁　李　媛　王　博
参　编　班晓玲　赵雪梅　马　芳　赵　莹

高等教育出版社·北京

内容简介

线性代数是高等学校理工科和经济管理学科的一门重要基础课，本书在不失逻辑严密性的前提下，力求体现教师易教、学生易学、深入浅出、适度综合的原则，系统地讲述了线性代数的矩阵、行列式、向量空间与线性变换、线性方程组、矩阵的特征值与二次型等内容。第6章引入了线性代数的应用，体现了面向应用、面向实践的时代要求。本书内容丰富、结构严谨、体系完整、概念准确，每一章都配套有相应数量的A、B类习题，附录部分精选了历年硕士研究生入学考试试题，以适应分层次教学的需求，书末附有参考答案。

本书可作为高等学校各专业本科、专科的教材或教学参考书，也可作为高等教育自学考试的教材，还可供科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/苏晓明，宋桂荣，卢建伟主编. -- 北京：高等教育出版社，2015.6

ISBN 978-7-04-041787-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①苏… ②宋… ③卢… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第074773号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 李 茜　封面设计 张 楠　版式设计 杜微言
插图绘制 黄建英　责任校对 王 雨　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	固安县铭成印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	11	版　次	2015年6月第1版
字　数	200千字	印　次	2015年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	18.20元

物 料 号　41787-00

前言

线性代数是高等学校理工类专业的一门重要基础课，是研究离散量的基础，对于培养学生的抽象思维与逻辑推理能力起着重要作用。线性代数的主题——矩阵理论与矩阵计算又是工程科学中用得非常广泛的基础性工具。这门课程教学质量的高低直接影响着人才的培养质量，影响着学生整体科学知识的结构与水平。而教材的质量又是课程教学质量的基础。长期以来，沈阳工业大学数学教研室的教师精心组织线性代数课程的教学，认真钻研教材，潜心研究教学内容与教学方法，并提出独特的见解。本书就是在此基础上，经几位教师集体讨论，分工编写而成的。本书在不失逻辑严密性的前提下，力求体现教师易教、学生易学、深入浅出、适度综合的原则，编者对传统内容体系做了较大调整，主要体现在以下几点：

1. 将矩阵概念与运算提前。由简单的线性变换及线性方程组引出矩阵概念，由矩阵利用递推方法定义行列式，适度削弱行列式的技巧计算。

2. 以矩阵的秩、逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵为主要内容作为第2章，为后续内容的讨论提供工具。

3. 在向量空间一章中，引进基、过渡矩阵、线性变换等概念，使之成为必修内容。

4. 适度削弱线性相关与线性无关的理论探讨，使其与矩阵的秩相结合。重点学习如何利用矩阵的秩、矩阵的初等变换来判定向量组的线性相关与线性无关并求向量组的最大线性无关组等。

5. 在线性方程组一章介绍矩阵表示与矩阵解法、强调向量组的线性相关性、矩阵的秩与线性方程组的解之间的内在联系。

6. 以矩阵的特征值、特征向量、相似矩阵、矩阵的对角化、正交矩阵等内容为主，编写第5章。适度削弱二次型的理论，强调二次型与矩阵的结合。

7. 精选了数学模型的内容。

本书编写工作是多位数学教师共同完成的，具体分工为：石鸿雁编写第1章，宋桂荣编写第2章，卢建伟编写第3章，班晓玲、赵雪梅编写第4章，李媛编写第5章，王博编写第6章和附录。苏晓明教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。数学教研室教师马芳、赵莹在此书编写过程中帮助修改和校稿，在此表示谢意。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中疏漏之处一定不少，恳请读者批评指正。

沈阳工业大学数学教研室线性代数编写组

2014 年 11 月

目录

第 1 章　矩阵与行列式

矩阵和行列式是线性代数的重要内容. 本章从实际问题入手，引出矩阵的概念，然后介绍矩阵的基本运算，进而用递推的方式给出矩阵的行列式的定义，之后介绍行列式的性质和计算，最后给出求解一类非齐次线性方程组的 Cramer 法则.

1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵

在实际工作中，常常把一些数据用矩形表来表示.

【例 1-1】　在物资调运中，某类物资有 3 个产地和 5 个销售地，它们的调运情况可用表 1.1 反映出来.

表 1.1　调运方案表

调运吨数		销售地				
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
产地	甲	0	3	4	7	5
	乙	8	2	3	0	2
	丙	5	4	0	6	6

如果用 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4,5)$ 表示从第 i 个产地运往第 j 个销售地的物资吨数(如 $a_{12}=3,a_{24}=0,a_{35}=6$)，这样就能将调运方案表简写成一个 3 行 5 列的矩形表

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

【例 1-2】　设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1-1}$$

方程组(1-1)是否有解？有多少解？这个问题显然只与方程组(1-1)中的未知数的系数和方程组右端的常数有关，因此有必要考察这些系数之间的关系. 可以把这些系数排成如下的一个矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

同样，也可以将未知数的系数和右端的常数一起排成下表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

这种形状的表在数学上称为矩阵.

定义 1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，数表中这 $m\times n$ 个数称为矩阵的元素，a_{ij} 称为第 i 行第 j 列元素. 元素为实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵(本书中只讨论实矩阵). 矩阵常用字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示，如

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

上述的 $m\times n$ 矩阵也可以简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

说明：上述的 m，n 均为正整数.

当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶方阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$. 连接方阵的左上角与右下角的直线称为方阵的主对角线，n 阶方阵的主对角线上有 n 个元素，称为方阵的主对角元；

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 $1\times n$ 矩阵，即 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\boldsymbol{A}$ 称为行矩阵；

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 $m\times1$ 矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 称为列矩阵；

当 $a_{ij}=0\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$.

定义 2 设有两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，如果

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【例 1-3】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & b & -4 \\ -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & -4 \\ d & 8 & 7 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 a，b，c，d 的值.

【解】 由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，由定义 2 得

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 3 \\ 0 & b & -4 \\ -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & -4 \\ d & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

于是有 $a=-2$，$b=1$，$c=3$，$d=-5$.

1.1.2 矩阵的运算

矩阵的运算是指矩阵的加法、数乘(实数与矩阵相乘)、矩阵的乘法及矩阵的转置等运算. 它们在线性代数所讨论的一些问题中有着广泛的应用.

(1) 加法

定义 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$.

说明：只有行数相同、列数也相同的矩阵才能进行加法运算，两个矩阵相加即为两个矩阵的对应元素相加.

显然，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法满足下列运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)：

① 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

② 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 由此可以定义矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

（2）数乘

定义 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\lambda$ 为一实数，则称矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

为实数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$，显然 $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

由定义不难验证，数乘满足下面的运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为实数)：

① 数对矩阵的分配律 $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

② 矩阵对数的分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

③ 数与矩阵的结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

【例 1-4】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}).$$

又

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

（3）乘法

给出定义之前，先考察一个实际问题：假设某地区有三家工厂，生产甲、乙两种产品，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示各工厂生产各种产品的年产量，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示各种产品的单位价格和单位利润，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3,j=1,2)$ 分别表示第 i 家工厂生产第 j 种产品的产量($j=1$ 表示甲种产品,$j=2$ 表示乙种产品),$b_{i1}(i=1,2)$ 分别表示甲、乙两种产品的单位价格,$b_{i2}(i=1,2)$ 分别表示甲、乙两种产品的单位利润,则第 i 家工厂生产甲、乙两种产品的总收入 $c_{i1}(i=1,2,3)$ 和总利润 $c_{i2}(i=1,2,3)$ 分别为

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21},\quad c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22},$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21},\quad c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22},$$
$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21},\quad c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}.$$

总收入与总利润用矩阵可表示为

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}.$$

可以看出,矩阵 C 的第 i 行第 j 列元素恰为矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积之和,这里把矩阵 C 定义为矩阵 A 与 B 的乘积.

定义 5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$,则称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的乘积,记为 $C=AB$,其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n). \tag{1-2}$$

关于矩阵乘法应注意以下几点:

① 两个矩阵相乘是有条件的,即第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数.

【例 1-5】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,求 $C=AB$.

【解】 因为 A 为 2×4 矩阵,B 为 4×3 矩阵,所以矩阵 A 与矩阵 B 可以相乘,其乘积矩阵 C 为 2×3 矩阵. 由式(1-2)得

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}=1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1=9.$$

同理

$$c_{12}=-2,\ c_{13}=-1,\ c_{21}=9,\ c_{22}=9,\ c_{23}=11.$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{bmatrix}.$$

② 一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即矩阵乘法不满足交换律，因为：

（A）一般情况下，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，但 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不一定可以相乘，如例1-5.

（B）在 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都可相乘的前提下，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 可能不是同阶的，如例1-6.

【例 1-6】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

【解】

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&1\\7&3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&12\\1&1&-3\\2&0&6\end{bmatrix}.$$

显然，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

（C）在 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都可相乘的前提下，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 即使是同阶的，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-12\\3&6\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

此例还可以看出：两个非零矩阵相乘，结果可能是零矩阵. 因此不能从矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推出矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

注意：并不是所有的矩阵乘法都不满足交换律. 例如：设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}.$$

此时称矩阵 A 与矩阵 B 是可交换的.

定义 6 如果两个矩阵 A 与 B 相乘，满足 $AB=BA$，则称矩阵 A 与矩阵 B 可交换，简称 A 与 B 可换.

【例 1-7】 求与矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

【解】 设与矩阵 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}$，则

$$AB=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a&b&c\\0&a_1&b_1&c_1\\0&a_2&b_2&c_2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由 $AB=BA$，得

$$a_1=0,\ b_1=a,\ c_1=b,\ d_1=c,$$
$$a_2=0,\ b_2=a_1=0,\ c_2=b_1=a,\ d_2=c_1=b,$$
$$a_3=0,\ b_3=a_2=0,\ c_3=b_2=0,\ d_3=c_2=a.$$

于是求得 $B=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{bmatrix}$，其中 a，b，c，d 为任意实数.

③ 矩阵乘法不满足消去律，即当 $AB_1=AB_2$ 时，不一定有 $B_1=B_2$. 例如：

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&1&1&2\\2&3&4&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}5\\2\\6\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}8\\0\\6\\1\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{AB}_2=\begin{bmatrix}15\\8\\40\end{bmatrix}$，但 $\boldsymbol{B}_1\neq\boldsymbol{B}_2$.

以上说明了矩阵的乘法与实数的乘法的不同之处，但也有相似之处，即矩阵的乘法满足下列运算律(假设运算是可行的)：

① 结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

② 与数的结合律 $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

③ 左分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

右分配律 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

(4) 方阵的幂

利用矩阵的乘法可以定义方阵的幂.

定义 7 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，k 是自然数，则称 k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记为 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{k\text{个}}.$$

由于矩阵的乘法满足结合律，所以有方阵的幂满足：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l},\ (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl},$$

其中 k，l 为自然数.

注意：由于矩阵的乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

(5) 矩阵的转置

定义 8 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序号的列所得到的新矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$，即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算，它满足下述运算律(假设运算都是可行的)：

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

② $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

③ $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$；

④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

①~③式容易证明，下面只证明④式.

证明 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，则

$$AB=C=(c_{ij})_{m\times n},\ B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=D=(d_{ij})_{n\times m}.$$

由定义 5 中的式(1-2)有

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

而 B^{T} 的第 i 行为 $(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si})$，$A^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列为 $(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js})$，因此

$$d_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{si}a_{js}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}.$$

又由于 $(AB)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}=(c_{ji})_{n\times m}$，而

$$c_{ji}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki},$$

因此有

$$d_{ij}=c_{ji}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

即 $C^{\mathrm{T}}=D$，也就是 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

【例 1-8】 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&4&-1\\4&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix},$$

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

【解】 利用定义和运算律④，有两种方法计算 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-1\\4&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8&-3\\11&10&1\end{bmatrix},$$

所以

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&11\\8&10\\-3&1\end{bmatrix}.$$

解法 2 根据 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$，有

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4&-1\\4&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&11\\8&10\\-3&1\end{bmatrix}.$$

1.1.3 几种特殊的矩阵

下面介绍几种特殊的矩阵，它们在矩阵的理论中具有重要作用.

（1）单位矩阵

具有如下形式的 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 其特点是主对角线上的元素为1，其余元素均为0. 容易证明单位矩阵满足：

① $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

② 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$.

即 n 阶单位矩阵与任意 n 阶方阵可交换，可见单位矩阵在矩阵的乘法运算中的作用类似于数1.

为方便运算，规定：$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

（2）数量矩阵

具有如下形式的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix}k&0&\cdots&0\\0&k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&k\end{bmatrix}$$

称为数量矩阵.

显然，数量矩阵具有如下的性质：

① $\boldsymbol{A}_n=k\boldsymbol{E}_n$；

② 设矩阵

$$\boldsymbol{A}_m=\begin{bmatrix}k&0&\cdots&0\\0&k&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&k\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{bmatrix},$$

则