

固体火箭发动机

总体优化设计

方国尧 张中钦 编  
余立凤 张鸿涛

北京航空航天大学出版社



# 固体火箭发动机总体优化设计

方国尧 张中钦 余立凤 张鸿涛 编

北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书从定义、术语及如何建立优化设计的数学模型等基本问题谈起，系统地介绍了优化设计的理论基础；系统地介绍了一系列的优化设计方法，其中包括最近几年才发展起来的新方法；系统地介绍了优化设计在固体火箭发动机中的应用。并着重介绍黄金分割法、二次插值法、鲍威尔法、DFP变尺度法、随机搜索法、复合形法、简约梯度法和罚函数法等比较有效的优化方法。为了便于工程技术人员学习和应用，书中第二章介绍了必需的数学基础知识，第七、八、九章介绍了固体火箭发动机总体优化设计的例子，书中附有适量的例题和习题，书末附有重要的化优方法FORTRAN语言程序及其说明。

本书主要作为大学固体火箭发动机专业本科生和研究生的教科书，也可供从事固体火箭发动机设计的工程技术人员学习和参考。

## 固体火箭发动机总体优化设计

GUTIHUOJIANFADONGJI ZONGTI YOUHUASHEJI

方国尧 张中钦  
余立凤 张鸿涛 编  
责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版  
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售  
农业工程大学印刷厂印装  
787×1092 1/16 印张，24.5 字数：627千字  
1988年10月第一版 1988年10月第一次印刷 印数：1400册  
ISBN 7-81012-068-9/V·007  
定价：4.05元

## 前 言

在近代科学技术中，优化设计这一概念已经广泛运用，并愈来愈成为解决科学和工程技术问题的一个原则。优化设计就是要使问题的解决达到无可争议的完善化。

在数学规划方法的基础上发展起来的优化设计，是20世纪60年代初电子计算机引入工程设计领域后，逐渐形成并得到蓬勃发展的一种有效的新的工程设计方法。用这种方法，不仅使工程设计的周期大大缩短，设计精度提高，而且可以设计出传统方法所无法得到的最优方案，可以说，优化设计反映了人们对设计规律这一客观世界认识的进一步深化。

大型电子计算机的出现和推广使用，使解决大型的复杂的优化设计问题成为可能，促使优化方法及其理论迅速地发展，成为应用数学中的一个重要分支，并在许多工程设计领域中得到广泛应用。近十几年来，优化设计已经应用到各工程设计领域，并取得了显著效果。在火箭发动机设计方面的应用虽处于早期阶段，但也取得了丰硕的成果。对于工程设计问题，所涉及的设计变量、约束条件等因素愈多，问题愈复杂，优化设计结果所取得的效益就愈大。

我国广大的航天科技工作者迫切希望尽快掌握和使用这一方法，以便在本领域中更广泛的应用，从而普遍提高我国火箭发动机的质量。因此，渴望能有一本介绍火箭发动机优化设计基础知识的书籍，作为进一步深入学习和解决生产实际问题入门之用，为此，我们编写了本书，供广大火箭发动机设计人员和大专院校火箭发动机专业本科生、研究生阅读和参考。

编写本书时，特别注意了简明性、实用性和适应性。书中着重介绍了火箭发动机优化的基础知识、基本理论和常用的优化方法。考虑到读者对电子计算机技术有一定的基础，而对优化设计所需的工程数学知识可能还不够熟悉，本书的第二章对矩阵、矢量、多元函数等数学基础作了介绍。由于优化方法在火箭发动机设计中的应用是一个重要问题，所以本书介绍了常用的火箭发动机优化方法。每个重要的优化方法在附录中都有FORTRAN语言程序相配合，供使用时参考。

全书第一、二、三、四、五和六章由方国尧同志编写，附录由方国尧同志编译，蔡峨同志校阅。第七、八章由张中钦同志编写，第九章由余立凤、张鸿涛同志编写，全书由方国尧同志主编。由于编者水平有限，编写时间又较短促，缺点和错误在所难免，望读者批评指正。

编 者

一九八六年十二月

# 目 录

## 第一章 优化设计总论

第一节 什么是优化设计	(2)
一、优化设计举例	(2)
二、系统分析与系统综合	(3)
第二节 常用的优化方法	(3)
第三节 设计变量	(4)
一、确定设计变量的原则	(4)
二、设计变量的数学处理	(4)
第四节 目标函数	(7)
第五节 约束条件	(10)
一、约束条件的种类	(10)
二、可行设计区域和非可行设计区域	(11)
第六节 优化设计的数学模型	(12)
第七节 优化结果的鉴定	(15)
一、优化结果的鉴定	(15)
二、参数分析	(15)
第八节 解算的几个问题	(16)
一、解算的一般流程与框图	(16)
二、迭代过程与迭代格式	(17)
三、常用的迭代过程终止准则	(19)
四、全局最优解和局部最优解	(19)
习题	(21)

## 第二章 优化方法的数学基础

第一节 矩阵	(23)
一、矩阵的概念	(23)
二、矩阵的运算	(27)
三、逆矩阵	(31)
四、矩阵的正定与负定	(33)
第二节 矢量	(35)
一、矢量的概念	(35)
二、矢量的运算	(36)
三、矢量的正交	(37)
四、矢量系的线性相关与线性无关	(38)
第三节 目标函数的泰勒 (Taylor) 表达式	(39)

第四节 函数的方向导数和梯度	(42)
一、偏导数	(42)
二、方向导数	(43)
三、梯度	(45)
第五节 目标函数的无约束极值存在条件	(48)
一、多元函数的极值	(48)
二、极值存在的必要条件	(48)
三、极值存在的充分条件	(49)
第六节 凸集与函数的凸性	(51)
一、凸集	(51)
二、凸函数	(51)
第七节 目标函数的约束极值问题	(54)
一、约束极值问题	(54)
二、约束极值的必要条件	(55)
习 题	(58)

### 第三章 一维搜索优化方法

第一节 初始单峰区间的确定	(63)
一、单峰区间	(63)
二、用进退法确定初始单峰区间的方法步骤	(63)
三、用外推法确定初始单峰区间	(66)
第二节 斐波纳奇 (Fibonacci) 法和黄金分割法 (0.618 法)	(68)
一、序列消去法原理	(68)
二、斐波纳奇 (Fibonacci) 法	(69)
三、黄金分割法	(73)
四、黄金分割法与斐波纳奇法的比较	(77)
第三节 二次插值法	(78)
一、方法概述	(78)
二、迭代过程与算法框图	(81)
三、计算举例	(81)
习 题	(84)

### 第四章 无约束优化方法

第一节 坐标轮换法	(85)
一、方法概述	(85)
二、迭代过程与算法框图	(86)
三、计算举例	(87)
四、讨论	(90)
第二节 鲍威尔 (Powell) 法	(91)
一、共轭方向的概念	(91)

二、共轭方向与函数极小点的关系	(93)
三、鲍威尔的搜索方向	(96)
四、迭代过程与算法框图	(99)
五、计算举例	(100)
第三节 梯度法 (最速下降法)	(106)
一、方法概述	(106)
二、迭代过程与算法框图	(108)
三、计算举例	(108)
四、关于梯度法的讨论	(112)
第四节 牛顿法 (二阶梯度法)	(113)
一、牛顿法的基本思想	(113)
二、迭代过程与算法框图	(117)
三、计算举例	(118)
四、关于牛顿法的讨论	(122)
第五节 变尺度法 (DFP法)	(123)
一、拟牛顿法的基本思想	(123)
二、变尺度法构造矩阵序列的产生	(125)
三、迭代过程与算法框图	(128)
四、计算举例	(128)
五、DFP法几个问题的讨论	(132)
第六节 单纯形法	(138)
一、方法概述	(139)
二、计算步骤和算法框图	(140)
三、计算举例	(141)
第七节 无约束优化方法的选用	(144)
习题	(145)

## 第五章 约束优化方法

第一节 随机试验法	(148)
一、方法概述	(148)
二、随机点的产生	(149)
三、迭代过程与算法框图	(149)
四、计算举例	(150)
第二节 随机方向搜索法	(153)
一、方法概述	(153)
二、迭代过程与算法框图	(155)
第三节 复合形法	(156)
一、方法概述	(156)
二、初始复合形的生成	(158)

三、迭代过程与算法框图	(160)
四、计算举例	(163)
第四节 简约梯度法及广义简约梯度法	(167)
一、简约梯度法的方法概述	(167)
二、求简约梯度 $r(\mathbf{X}^N)$	(168)
三、简约梯度法的迭代过程	(170)
四、广义简约梯度法的方法概述	(170)
五、广义简约梯度法的迭代过程	(174)
六、计算举例	(175)
第五节 消元法	(183)
第六节 惩罚函数法	(185)
第七节 内点法 (Interior Penalty Function Method)	(188)
一、引例	(188)
二、内点法的泛函和罚函数的构造	(190)
三、迭代过程与算法框图	(191)
四、关于内点法中几个问题的讨论	(191)
五、内点法的迭代终止准则	(193)
六、计算举例	(194)
第八节 外点法 (Exterior Penalty Function Method)	(197)
一、引例	(197)
二、外点法的泛函和罚函数的构造	(199)
三、迭代过程与算法框图	(200)
四、关于外点法中几个问题的讨论	(201)
五、计算举例	(202)
六、内点法和外点法的简单比较	(203)
第九节 混合罚函数法 (Mixed Penalty Function Method)	(205)
一、泛函和罚函数的构造	(205)
二、用外推法改进求无约束极小化的初始点	(205)
三、混合罚函数法的迭代过程	(207)
四、混合罚函数计算中的几个问题	(207)
五、计算举例	(208)
六、几种约束优化方法比较	(212)
习 题	(212)

## 第六章 多目标函数的优化方法

第一节 基本概念和定义	(215)
第二节 统一目标法	(216)
一、加权组合法	(217)
二、目标规划法	(219)



三、功效系数法	(220)
四、乘法	(220)
第三节 协调曲线法	(221)
第四节 主要目标法	(222)
习 题	(223)
<b>第七章 固体火箭发动机的能量特性</b>	
第一节 概述	(224)
第二节 理想固体火箭发动机的推力及能量特性	(229)
第三节 固体火箭发动机的实际推力及实际能量特性	(231)
第四节 美国 SPP 中采用的性能损失计算模型 [48]	(234)
一、燃烧室冲量系数与发动机设计参数之间的关系	(234)
二、喷管冲量系数与发动机设计参数之间的关系	(236)
三、实际比冲与设计参数的关系式	(240)
第五节 由发动机静止试验数据拟合的实际比冲计算模型	(241)
<b>第八章 固体火箭发动机的质量特性</b>	
第一节 概述	(246)
第二节 金属零件的质量估算	(247)
一、球形封头	(248)
二、椭球形封头	(248)
三、碟形封头	(249)
四、圆筒形壳体	(249)
五、承受内压的圆锥形壳体	(250)
六、承受外压的圆锥形壳体	(250)
第三节 纤维缠绕复合材料壳体及双层材料组合壳体的质量估算	(252)
一、纤维缠绕复合材料壳体	(252)
二、双层材料组合壳体	(253)
第四节 热防护层材料的质量估算	(253)
一、工作时无质量带走的绝热层厚度	(254)
二、消融材料热防护层的厚度	(257)
三、炭化材料热防护层的厚度	(259)
第五节 喷管部件的质量估算 [47]	(260)
一、单个喷管的质量	(260)
二、推力向量控制机构的质量	(261)
第六节 推进剂及装药包复层的质量	(262)
一、推进剂的质量	(262)
二、装药包复层的质量	(262)
<b>第九章 固体火箭发动机总体优化设计</b>	
第一节 概述	(265)

第二节 固体火箭发动机总体优化设计.....	(266)
一、优化准则和目标函数.....	(266)
二、质量方程.....	(267)
三、比冲量分析.....	(278)
四、设计变量.....	(280)
五、约束条件.....	(281)
六、数学模型.....	(285)
七、优化方法.....	(285)
八、参数敏感性分析.....	(285)
第三节 多级固体火箭发动机总体优化设计.....	(288)
一、优化准则和目标函数.....	(288)
二、设计变量.....	(289)
三、数学模型.....	(289)
四、简化的算例及分析.....	(289)

## 附 录

I 常用优化方法的 FORTRAN 语言子程序使用说明.....	(292)
一、引言.....	(292)
二、非线性规划子程序的说明和使用.....	(293)
三、服务子程序.....	(295)
四、约束极小化罚函数法的 FORTRAN 语言子程序.....	(298)
五、随机方向搜索法的 FORTRAN 语言子程序 (Minimization by Adaptive Random Search) .....	(300)
六、DFP (DAVIDON-FLETCH-POWELL) 变尺度法的 FORTRAN 语言子程序.....	(302)
七、FLETCHER'S 1972 方法的 FORTRAN 语言子程序.....	(304)
八、JACOBSON-OKSMAN (JO) 法的 FORTRAN 语言子程序.....	(305)
九、POWELL 直接搜索法的 FORTRAN 语言子程序.....	(307)
十、HOOKE-JEEVES 直接搜索法的 FORTRAN 语言子程序 .....	(309)
十一、单纯形法的 FORTRAN 语言子程序 .....	(311)
十二、逐渐线性近似法的 FORTRAN 语言子程序 (Minimization by the method of successive liner approximation) .....	(314)
十三、随机搜索收缩法的 FORTRAN 语言子程序 (Minimization by random exploration with shrinkce) .....	(316)
十四、简约梯度法的 FORTRAN 语言子程序 (Minimization using the reduced gradient method) .....	(318)
十五、一维搜索优化方法的 FORTRAN 语言子程序.....	(320)
十六、线性规划法的 FORTRAN 语言子程序.....	(321)
十七、用于产生随机数的 FORTRAN 语言子程序.....	(323)

I 优化方法的 FORTRAN 语言子程序汇编.....	(324)
一、随机方向搜索法：子程序ADRANS .....	(324)
二、标准打印输出，子程序ANSWER .....	(326)
三、逐次线性近似法，子程序APPROX .....	(327)
四、计算精度函数，FUNCTION CRIT.....	(331)
五、DFP法，子程序DAVID.....	(332)
六、FLETCH'S 1972法，子程序FLETCH.....	(336)
七、一维搜索优化方法，函数FMIN.....	(342)
八、随机数的产生，子程序FRANDN .....	(344)
九、JACOBSON和OKSMAN法，子程序 JO .....	(345)
十、约束极小化罚函数法，子程序OPTIM .....	(350)
十一、POWELL直接搜索法，子程序PDS.....	(353)
十二、随机搜索收缩法，子程序RANDOM.....	(360)
十三、简约梯度法，子程序REDUCE .....	(363)
十四、HOOKE和JEEVES直接搜索法，子程序SEEK .....	(365)
十五、线性规划法，子程序SIMPLE .....	(369)
十六、单纯形法，子程序SIMPLX .....	(375)
参考文献.....	(379)

# 第一章 优化设计总论

对任何一位设计工程师来说，总是要追求一个最优设计方案，使所设计的产品或工程设施具有最好的使用性能和最低材料消耗以及最低的成本，以便获得最佳的经济效益。长期以来，固体火箭发动机传统的设计方法通常是采用比试算法，即根据总体要求，参考一些较为成熟的设计，凭借理论和经验来选取设计参数，然后进行必要的校核计算；如果参数选择不当，则调整参数，修改设计；如此反复多次，直到最后满足设计要求为止。这种方法不仅使设计人员把大量的时间和精力消耗在重复的繁重计算上，而且所得结果往往只是一个可行方案，并不是一种最优方案。

由于数学规划的理论和方法的迅速发展，同时又由于各种专业理论分析过程的“计算机化”，在工程设计上，自然就要求建立一些更迅速，更有效的方法，以便探求最优设计，即优化设计。优化设计是工程设计的有效方法，它使工程设计由经验设计变为一门科学设计。

实践证明，结构优化设计是保证产品具有优良的性能，减轻结构重量或体积，降低工程造价的一种有效设计方法，同时也可使设计者从大量繁琐的设计工作中解脱出来，大大提高设计效率。

数学规划所研究的对象属于最优化范畴，本质上是一个极值问题，它提供了求函数极值的数值方法和试验最优化的方法。20世纪50年代以前，用于解决最优化问题的数学方法仅仅限于古典的微分法和变分法。50年代末，数学规划方法首次用于结构优化，并成为优化设计中求优方法的理论基础。数学规划方法是在第二次世界大战期间发展起来的一个新的数学分支，线性规划与非线性规划是其主要内容。此外，还有动态规划、几何规划和随机规划等等。在数学规划方法的基础上发展起来的优化设计，是20世纪60年代初电子计算机引入结构设计领域后逐步形成的一种有效的、设计方法。利用这种方法，不仅使设计周期大大缩短，计算精度显著地提高，而且可以解决传统设计方法所不能解决的比较复杂的优化设计问题。大型电子计算机的出现，使优化方法及其理论蓬勃发展，成为应用数学中一个重要分支，并在许多科学技术领域中得到应用。近十几年来，优化设计方法已陆续应用到建筑结构、化工、冶金、系统工程、铁路、航空、航天、造船、机床、汽车、自动控制系统、电力系统以及电机、电器等工程设计领域，并取得了显著效果。其中在固体火箭发动机设计方面的应用虽尚处于早期阶段，但也已经取得了丰硕的成果。一般来说，对于工程设计问题，所涉及的因素愈多，问题愈复杂，则优化设计结果所取得的效益就愈大。

优化设计反映出人们对于设计规律这一客观世界认识的深化。设计上的最优值是指在一定条件（各种设计因素）影响下所能得到的最佳设计。最优值是一个相对的概念。它不同于数学上的极值，但在很多情况下可以用最大值和最小值来表示。

概括起来，优化设计工作包括下面两部分内容：

1. 将设计问题的物理模型转变为数学模型。建立数学模型时要选取设计变量、列出目标

函数、给定约束条件。目标函数是设计问题所要求的最优指标与设计变量之间的函数关系式；

2. 采用适当的优化方法，求解数学模型。可归结为在给定的条件下，例如约束条件，求目标函数的极值或最优化问题。

尽管在我国近几年来优化设计已有不少进展和成就，但它毕竟还是一门出现不久的新科学，还不够成熟，可以说正处于发展的阶段。因此，在这个领域中还有许多问题需要广大的科学研究工作者和工程设计工作者共同努力去解决。当前主要问题有以下三方面：

1. 结合产品设计的特点，深入研究建立数学模型的理论以及各种适用于工程设计的优化方法；

2. 为进一步加速优化方法在火箭工程中的应用，必须解决常用优化方法、常用零件和部件优化设计的通用程序问题；

3. 积极开展产品整机优化和系列产品的优化设计研究，并把优化设计与计算机辅助设计和设计方法等学科紧密结合起来。从而进一步扩大优化设计的应用范围。

最后这个问题十分重要，也十分困难。但可以相信，随着优化设计研究工作的不断深入开展，这种先进的设计方法必将在产品设计上获得日益广泛的应用，并在固体火箭发动机工业的发展中越来越显示出它应有的作用。

## 第一节 什么是优化设计

优化设计又叫“最佳设计”、“设计最佳化”、“优化技术”、“最优化设计”，概括地说，就是根据给定的设计要求和现有的工程技术条件，应用专业理论和优化方法，在电子计算机上，从满足给定设计要求的许多方案中，按照规定的指标（目标函数），自动选出最优的设计方案。

### 一、优化设计举例

#### （一）飞机总体设计

在飞机初步设计阶段，即草图设计或方案设计阶段，规定了战术技术要求：最大飞行速度、着陆速度、航程、海平面最大爬升率等飞行性能，要使设计的飞机重量最轻。根据这些，求出飞机应具有多大的机翼面积、展弦比、翼根相对厚度、载油量和发动机推力等参数。当这些参数确定之后，一架飞机的总体设计方案就确定了。这样，根据设计要求都能得到满足，而且指标是优化的方案，这就是优化设计的问题。

#### （二）导弹外形设计

已知导弹为鸭式气动布局，弹身和弹翼的外形几何参数已经确定，要求全弹的诱滚力矩最小，求导弹应具有多大的舵面面积、展弦比、梯形比、后掠角和舵面相对弹翼的纵向位置。这就是优化设计问题。

#### （三）固体火箭发动机总体设计

确定发动机总体参数时，例如，发动机直径、工作压力、工作时间、膨胀比、临界截面积和推进剂配方。这些参数中选定什么样的值，使发动机重量比冲最大，也是优化设计问题。

## 二、系统分析与系统综合

由上述例子可知，每一个设计问题都涉及到一个系统。发动机是热力系统，导弹的优化飞行过程是运动系统，飞行器总体方案和外形设计是将整个飞行器看成一个系统。

所谓系统，就是由相互作用和相互依赖的若干组成部分结合而形成的，具有特定功能的有机整体。从联系的观点看问题时，对任何事物都可以看成一个系统。

通常所说的系统分析，是对给定的系统求某种性能，如应力分析、振动分析、性能分析等，这是专业学科的内容。而工程设计问题是根据给定的设计要求和指标来确定系统，这叫做系统综合。

系统分析具有唯一性。只要系统一经确定，它的各种性能就确定了。但系统综合却没有唯一性，满足同样的设计要求，可能有很多系统。因此，存在寻求最优设计的问题。

## 第二节 常用的优化方法

优化方法的种类很多，但在工程优化设计中，常用的优化方法可以粗略地按设计变量的数量、约束条件与目标函数的情况以及求解方法的特点而分为以下几大类：

1. 按设计变量数量的不同，可以分为单变量优化方法（或一维优化方法）和多变量优化方法（或多维优化方法）。
2. 按约束情况的不同，可分为无约束优化方法和约束优化方法。
3. 按目标函数的不同，可分为单目标函数优化方法和多目标函数优化方法。
4. 按求解方法特点的不同，可以分为准则法和数学规划法。

准则法是从力学原则出发，选定结构达到最优准则，例如满应力准则，能量准则等等，然后根据这些准则寻求最优解。数学规划法则是从解极值问题的数学原理出发，运用数学规划的方法来求最优解。准则法的局限性较大，在机械优化设计中很少采用，而主要采用数学规划法。

数学规划法又可以按所求解优化设计问题的特点，分为线性规划，非线性规划、几何规划、整数规划、随机规划和动态规划等等。当目标函数与约束条件均为线性函数时，称为线性规划；当目标函数与约束条件中至少有一个是非线性函数时，则称非线性规划；当目标函数是一种特殊形式多项式的非线性函数，同时约束条件是一组特殊形式多项式的非线性函数，可以利用“几何平均和算术平均不等式”来求解时，称为几何规划；当设计变量的一部或全部只能取某些离散值，或只能取整数时，所采用的求解方法称为离散规划；当设计变量具有随机性质时，称为随机规划；当设计变量的取值随时间或位置而变化时，将问题分成若干个阶段，利用一种递推关系式或一个接一个依次作出最优决策，使整个设计取得最优结果的过程，称为动态规划。

在火箭发动机优化设计中，绝大多数是多变量有约束的非线性规划问题。但是，一些有约束非线性规划问题往往可以转化为无约束非线性规划问题来求解，而且，在求解过程中还常常利用一维优化方法来进行搜索。因此，本书将分别介绍常用的一维优化方法，无约束优化方法以及约束优化方法。

在常用的一维优化方法、无约束优化方法与约束优化方法中，根据它们所采用具体方法不同，又可分为直接法和间接法两种。

直接法是按照一定的规律通过直接计算、比较目标函数值，一步步进行搜索、逼近，最后求出最优解；而间接法则利用函数的一阶或二阶导数确定搜索方向，一步步进行搜索、逼近，最后求出最优解，或利用其它间接方向来求最优解，例如一维优化方法中的插值法，多变量约束优化方法中将约束问题转化为无约束问题来求解的惩罚函数法等等。

### 第三节 设计变量

在设计过程中进行选择，并最终必须确定的各项独立参数，称为设计变量。在选择过程中它们是变量，但这些变量确定后，则设计对象也就完全确定。优化设计正是研究怎样合理地优选这些设计变量值的一种现代设计方法。在这些参数中，凡是可以根据设计要求事先给定的，不是设计变量，而是设计常量，只有那些需要在设计过程中优选的参数，才可看成是优化设计过程中的设计变量。

#### 一、确定设计变量的原则

##### 1. 设计变量应相互独立。

数学规划定义  $n$  维欧氏空间，要求设计变量应相互独立。在应用数学规划解决优化设计问题时，设计变量也要求是互相独立的。

一种优化方法的寻优效果，成功的可能性在很大程度上取决于描述问题的方法，对于每个设计问题，可用不同的方法来描述。例如，火箭发动机喷管膨胀比 ( $e$ )，喷管的临界截面积 ( $A_c$ )，喷管的出口截面积 ( $A_e$ )，这三个设计变量，由于  $e = A_e / A_c$ ，可以任选两个参数作为设计变量，选一个不足以描述这一设计问题，选择三个（或四个）太多，显然其中一个不再是独立的设计变量，它们之间存在相互作用，从而使目标函数会出现“山脊”或“沟谷”，这给寻优带来困难。

2. 设计变量应选择对目标函数影响较大的变量，而且它们对目标函数有着矛盾的影响，这样目标函数将有明显的极值存在。

3. 设计变量应尽量采用具有物理意义的无因次量，这样不仅便于计算，更主要的是对同类型的工程问题具有通用性。

4. 在满足设计要求条件下，应充分分析各设计变量的主次，减少变量的数目，使优化设计问题简单。此外，经常把设计变量按其对目标函数影响重要程度依次排列，在考虑节约计算机时的情况下，可以选择最重要的变量进行寻优，或作为全空间寻优的起始过程，或根本就不在全空间内寻优。

#### 二、设计变量的数学处理

##### (一) 变量区间与变量空间

在优化设计中，对于每个设计变量来说，不是从  $(-\infty, +\infty)$  之间进行探索，而是在优化之前就大体上可以确定变量的变化区间。变量区间的确定可以有列两种情况：

第一种情况是由设计条件确定这些设计变量的边界。例如，在结构优化设计中，燃烧室壁厚尺寸这一变量，变化的下边界受到可供应板材最小厚度的限制。在给定的限制范围之外去选取最优值是没有实际意义的。这时可以根据实际条件来确定变量的变化区间。

第二种情况是设计人员根据经验估计最优值可能存在的范围。对于有把握的项目，其变化区间可取得小些；对于把握不大的，其变化区间可取得大些。

在确定了各设计变量的变化区间之后，变量空间是指以独立变量为相互垂直的轴，以变量区间上下限为边界所形成的一个多维封闭空间，称之为设计方案的变量空间，或称之为变量搜索空间。

## (二) 设计变量的表示形式

设计变量的数目称为优化设计的维数，如有  $n$  ( $n=1, 2, \dots, n$ ) 个设计变量，则称为

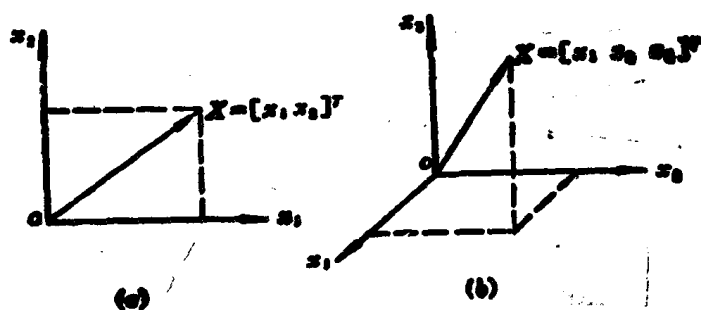


图1-1 设计变量所组成的变量空间

(a) 二维设计问题； (b) 三维设计问题

$n$  维设计问题，只有两个设计变量的二维设计问题，可用图1-1 (a) 所示的平面直角坐标表示；有三个设计变量的三维设计问题可用图1-1 (b) 所表示的空间直角坐标表示。

在图1-1 (a) 中，当设计变量  $X_1, X_2$  分别取不同值时，则可得到在坐标平面上不同的相应点，每一个点表示一种设计方案。如用向量表示这个点，即二维向量：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = [x_1 \quad x_2]^T$$

上式中“ $T$ ”为转置符，即把列向量用行向量转置来表示。

同样，在图1-1 (b) 中，每一个设计方案表示为三维空间的一个点，并可用三维向量来表示该点：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

在一般情况下，若有  $n$  个设计变量，把第  $i$  个设计变量记为  $x_i$ ，则其全部设计变量可用  $n$  维向量的形式表示为



$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_i \ \cdots \ x_n]^T \quad (1-1)$$

这种以  $n$  个独立变量为坐标轴组成的  $n$  维实空间 (用  $R_n$  表示), 如果其中任意两向量又有内积运算, 则叫  $n$  维欧氏空间, 用  $E_n$  表示。当向量  $\mathbf{X}$  中的各个分量  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 都是实变量时, 则称  $\mathbf{X}$  决定了  $n$  维欧氏空间  $E_n$  中的一个点, 并用符号  $\mathbf{X} \in E_n$  ( $\mathbf{X}$  属于  $E_n$ ) 表示。

在优化设计中, 由各设计变量的坐标轴所描述的这种空间就是所谓“设计空间”, 即变量空间, 它是一个重要的概念。图1-1 (b) 给出了一个三维设计变量的设计空间。决定这个空间的三个轴分别描述三个设计变量  $x_1, x_2, x_3$ , 通常设计变量的个数  $n$  要大于 3 个, 并且很难用图象来表示, 这时的  $n$  维空间又称为超越空间。

### (三) 设计变量的标准化处理

在工程设计中, 各设计变量的数量级相差很大, 例如在飞行器总体设计中, 发动机推力的变化范围可能是几百牛〔顿〕至几万牛〔顿〕, 而燃烧室壁厚度只有几毫米至几十厘米, 这样的设计变量在同一寻优过程中若采用真实值, 显然计算误差对数量小的变量影响很大, 从而造成失真, 若采用标准值, 则可采用统一的寻优步长, 也可保证相同的计算精度, 这会对优化法子程序的编制带来方便。

所谓标准值就是将设计变量的真实值化为  $0 \sim 1$  之间的数值, 用来表示设计变量值在变量区间的相对位置。在数学上, 实质为坐标变换问题。下面来说明设计变量的真实值与标准值之间的关系, 如图1-2所示, 设某设计变量的真实值为  $x_R$ ,  $A$  为该变量的变化下限,  $B$  为上限, 将  $x_R$  化为标准值  $x_s$ , 即将  $A$  取作标准值坐标轴的原点,  $B$  的对应标准值取为 1。因此,  $x_R$  相应的标准值为

$$x_{s,i} = \frac{x_{R,i} - A_i}{B_i - A_i}, \quad 0 \leq x_{s,i} \leq 1, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

如已知变量的标准值时, 由下列式求得相应的真实值为

$$x_{R,i} = A_i + x_{s,i}(B_i - A_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

式中:  $x_{s,i}$ ——第  $i$  个设计变量的标准值。

下标:  $i$ ——第  $i$  个设计变量。

设计空间的维数又表征设计的自由度, 设计变量愈多, 则设计的自由度愈大, 可供选择的方案愈多, 设计愈灵活, 但难度也愈大, 求解亦愈复杂。一般含  $2 \sim 10$  个变量的为小型设计问题;  $10 \sim 50$  个变量的为中型设计问题;  $50$  个变量以上的为大型设计问题。据文献报导, 目前已经能够解决  $200$  个设计变量的大型优化设计问题。

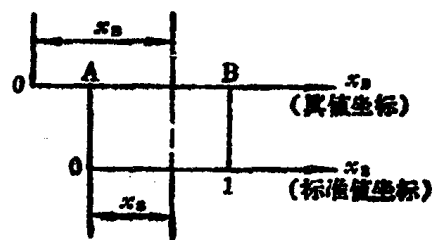


图1-2 设计变量的标准化变换