Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 2

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 2

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析习题课讲义. 2 / 李傅山，王培合编著. —北京：北京大学出版社，2018. 9

ISBN 978-7-301-29185-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②王… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 020591 号

书　　名	数学分析习题课讲义 2 SHUXUE FENXI XITIKE JIANGYI 2
著作责任者	李傅山　王培合　编著
责任编辑	潘丽娜
标准书号	ISBN 978-7-301-29185-6
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@ 北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62752021
印刷者	北京大学印刷厂
经销者	新华书店
	890 毫米 ×1240 毫米　A5　9.75 印张　258 千字
	2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
定　　价	32.00 元

内 容 简 介

本书是与华东师范大学数学系编写的教材《数学分析（第四版）》配套的学习辅导书，内容安排上与教材相一致，是在作者近二十年讲授“数学分析”课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上多次修订而成的. 本书共分三册，按节进行编写，每节先梳理知识结构，再按照题目的类型和难度对教材中的习题进行重新编排并给予详细解答. 很多题目提供了多种解法并加以分析和备注，有利于学生理解数学知识蕴涵的数学思想，建构知识的内在联系. 本书还选取了一些教材之外的有代表性的习题，以拓宽知识面，也有利于夯实学习后续专业课的基础.

本书可供高等院校数学各专业学生学习“数学分析”课程使用，也可作为考研学生的复习资料，还可作为“数学分析”课程教师的参考书.

作 者 简 介

李傅山 曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师. 2005年于复旦大学获理学博士学位. 主要研究方向是偏微分方程及其应用. 主持多项国家级、省部级科研课题；在 *Journal of Differential Equations*，*Nonlinear Analysis*: *Real World Applications* 等国际权威期刊发表论文多篇. 长期讲授“数学分析”“偏微分方程”等课程，主讲数学类专业的考研辅导课和全国大学生数学竞赛辅导课. 出版了著作《数学分析中的问题与方法》；主持省级教学改革项目，并于2014年获省级教学成果二等奖.

王培合 曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师. 2003年于华东师范大学获理学博士学位. 主要研究方向是几何分析. 主持国家自然科学基金等多项国家级、省部级科研课题；在 *Journal of Functional Analysis*，*Journal of Differential Equations* 等国际权威期刊发表论文多篇. 长期讲授“解析几何”“微分几何”等课程，并参与全国大学生数学竞赛辅导工作. 承担省级教学改革项目，并于2014年获省级教学成果二等奖.

前　言

"数学分析" 是高等院校数学各专业最重要的一门基础课程. 它是数学各专业学生学习后续专业课程的基础, 也是数学各专业研究生入学考试的必考科目. 华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》是国内 "数学分析" 课程使用最广的教材之一. 本书是与该教材配套的学习辅导书, 可满足高等院校数学各专业学生学习、复习和提高之用, 对该课程教师的教学也有一定的参考价值.

在编写本书时, 我们突出了以下几点:

第一, 按节编写, 简明归纳每节的主要内容, 对理论性较强的部分章节编写了知识结构图.

第二, 对每节的习题按照题目的类型和难度进行重新梳理、归类、排序, 努力使得课后习题的编排更系统、更有条理, 对少部分难度较大的习题标注上星号 "*".

第三, 书中许多题目都给出了多种解法, 有的解法是同类书中所没有的, 便于学生举一反三, 触类旁通.

第四, 在习题解答后面给出分析和备注, 引导学生深刻思考, 梳理并理解问题的本质, 并建构前后知识的内在联系.

第五, 部分章节后面增加了适量的教材之外的习题, 以便初学者适当扩大知识面, 提高解决问题的能力. 对这类题目建议读者先审题思考, 自己写出解答过程, 再参考本书的解答和备注进行比较、归纳和总结, 以达到 "学习 — 消化 — 转化 — 创新" 的目的.

与华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》配套的学习指导书有很多版本, 为学生学习该课程提供了很大的帮助和指导. 在教学实践中, 我们发现某些版本省略或回避了部分有难度的习题的解答, 个别题目解法单一或者不自然, 有些题目缺乏必

要的从数学思想高度上的分析和备注. 所有这些现象, 促使我们编写了此套 “数学分析” 学习辅导书. 本书是李傅山教授在近二十年讲授 “数学分析” 课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上撰写而成的. 王培合教授对本书做了试用并参与了书稿的修改, 增加了部分问题的新解法. 在本书编写过程中, 得到了曲阜师范大学数学科学学院领导和同事们的大力支持和关心. 本书的出版还得到了曲阜师范大学教材建设基金的资助. 另外, 王前、许文秀、尹清等同学帮助校对了书稿内容. 在此, 一并表示衷心感谢.

限于作者的水平有限, 书中的不足之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

编者

2018 年 7 月

目 录

第八章　不定积分

§ 8.1　不定积分的概念和基本积分公式表

内容要求　理解不定积分的背景和定义; 熟练掌握基本积分公式表; 掌握分段函数不定积分的求法.

例 8-1-1　解答下面问题 (不定积分的计算):

1. 验证下列等式:

(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$;

(2) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$. ($C$ 为常数)

证明　(1) 因为 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的一个原函数, 所以

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C.$$

(2) 因为 $\int \mathrm{d}f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \left(1-x+x^3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x$

$+\int x^3\mathrm{d}x - \int x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-3x^{\frac{1}{3}}+C.$

(2) $\int \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x = \int \left(x^2-2x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\ln|x|+C.$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{\frac{2x}{g}}+C.$

(4) $\int (2^x+3^x)^2\mathrm{d}x = \int [2^{2x}+2(2\cdot 3)^x+3^{2x}]\mathrm{d}x$

$$= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) \mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

(5) $\int \frac{3}{\sqrt{4 - 4x^2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \arcsin x + C.$

(6) $\int \frac{x^2}{3(1 + x^2)} \mathrm{d}x = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{3(1 + x^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}(x - \arctan x) + C.$$

(7) $\int \tan^2 x \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$

(8) $\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C.$$

(9) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} \mathrm{d}x$

$$= \int (\cos x + \sin x) \mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$$

(10) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \mathrm{d}x$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x = -\cot x - \tan x + C.$$

(11) $\int 10^t \cdot 3^{2t} \mathrm{d}t = \int (10 \cdot 9)^t \mathrm{d}t = \frac{(10 \cdot 9)^t}{\ln(10 \cdot 9)} + C = \frac{90^t}{\ln 90} + C.$

(12) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{8}} \mathrm{d}x = \frac{8}{15} x^{\frac{15}{8}} + C.$

(13) $\int \left(\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} + \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x = 2 \arcsin x + C.$$

(14) $\int (\cos x + \sin x)^2 \mathrm{d}x = \int (1 + \sin 2x) \mathrm{d}x$

$$= \int 1 \mathrm{d}x + \int \sin 2x \mathrm{d}x = x - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

(15) $\int \cos x \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos x) \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right) + C.$$

(16) $\int (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^3 \mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x})\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + C.$$

(17) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x = 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x \mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x$

$$= -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.$$

(18) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int x^{-5}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

例 8-1-2 解答下面问题 (原函数、导数的计算与证明):

1. 求一曲线 $y = f(x)$, 使得在曲线上每一点 (x, y) 处的切线斜率为 $2x$, 且通过点 $(2, 5)$.

解 由导数的几何意义知, $f'(x) = 2x$, 所以

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

于是可知曲线族为 $y = x^2 + C$, 再由条件 "曲线通过点 $(2, 5)$" 知, $5 = 2^2 + C$, 解得 $C = 1$, 从而所求曲线为 $y = x^2 + 1$.

2. 验证 $y = \frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x$ 是 $|x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数.

证明 分情况讨论:

(1) 当 $x > 0$ 时, $y = \frac{x^2}{2}$, $y' = x$;

(2) 当 $x < 0$ 时, $y = -\frac{x^2}{2}$, $y' = -x$;

(3) 当 $x = 0$ 时, y 的导数为 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\mathrm{sgn}x - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\mathrm{sgn}x}{2} = 0.$

综上可知,

$$y' = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

3. 导函数至多有第二类间断点.

证明 假设 x_0 是 $f'(x)$ 的任一间断点, 只要证明 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ 至少有一个不存在. 事实上, 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ 均存在, 则由导数定义及 Lagrange 中值定理知

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \to x_0^+} f'(\xi),$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f'(\eta) = \lim_{\eta \to x_0^-} f'(\eta),$$

即

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0),$$

这与 x_0 是 $f'(x)$ 的间断点矛盾.

4. 据理说明为什么每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数?

解 反证法. 假设函数 f 在区间 I 上具有第一类间断点且有原函数. 记 F 为 f 的一个原函数, 即 f 为 F 的导函数, 因此 f 至多有第二类间断点, 这与 f 在区间 I 上具有第一类间断点矛盾.

5. 举例说明含有第二类间断点的函数可能有原函数, 也可能没有原函数.

解 例如 (1):

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$F(x)$ 的导函数为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} -\cos \dfrac{1}{x} + 2x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 存在第二类间断点 $x=0$, 但有原函数 $F(x)$.

例如(2): Dirichlet 函数 $D(x)$ 每一点都是第二类间断点, 但没有原函数. 由 Darboux 定理知导函数一定具有介值性质, 而 $D(x)$ 没有介值性质. 因此不存在原函数.

注 由上述结论可知四个特殊函数: $\mathrm{sgn}x, [x], D(x), R(x)$, 均不存在原函数.

6. 设 $f'(\arctan x)=x^2$, 求 $f(x)$.

解 令 $t=\arctan x$, 则 $x=\tan t$, 从而

$$f'(t)=\tan^2 t=\sec^2 t-1 \Rightarrow f(t)=\tan t-t+C,$$

即 $f(x)=\tan x-x+C$.

注 $f'(\arctan x)=f'(t)|_{t=\arctan x}\neq[f(\arctan x)]'$.

7. 计算下面不定积分:

(1) $\displaystyle\int|x-1|\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$; (3) $\displaystyle\int|\sin x|\mathrm{d}x$.

解 (1) 由于

$$f(x):=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\in[1,+\infty),\\ 1-x, & x\in(-\infty,1]\end{cases}\in C(\mathbb{R}),$$

因此 $f(x):=|x-1|$ 存在原函数. 原函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-x, & x\in[1,+\infty),\\ -\dfrac{1}{2}x^2+x+C_1, & x\in(-\infty,1].\end{cases}$$

为使 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 由导函数极限定理, 只要求 $F(x)$ 在点 $x=1$ 处连续即可, 即满足

$$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^-}F(x)=F(1)\Rightarrow C_1=-1.$$

因此有

$$\int|x-1|\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-x, & x\in[1,+\infty),\\ -\dfrac{1}{2}x^2+x-1, & x\in(-\infty,1]\end{cases}+C.$$

(2) 类似地,

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0, \\ \mathrm{e}^{x}-2, & x \leqslant 0 \end{cases} + C.$$

(3) 由于

$$f(x) := |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \\ -\sin x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} \in C(\mathbb{R}),$$

因此 $f(x) := |\sin x|$ 存在原函数 $F(x)$. 为使 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, 由导函数极限定理, 只要求 $F(x)$ 在点 $x = \pm n\pi, n \in \mathbb{N}$ 连续即可, 即满足

$$F(x) = \begin{cases} \cdots\cdots \\ -\cos x - n \times 4, & x \in [-2n\pi, (-2n+1)\pi], \\ \cos x - (n-1) \times 4 - 2, & x \in [(-2n+1)\pi, (-2n+2)\pi], \\ \cdots\cdots \\ -\cos x - 2 \times 4, & x \in [-4\pi, -3\pi], \\ \cos x - 4 - 2, & x \in [-3\pi, -2\pi], \\ -\cos x - 4, & x \in [-2\pi, -\pi], \\ \cos x - 2, & x \in [-\pi, 0], \\ -\cos x, & x \in [0, \pi], \\ \cos x + 2, & x \in [\pi, 2\pi], \\ -\cos x + 4, & x \in [2\pi, 3\pi], \\ \cos x + 4 + 2, & x \in [3\pi, 4\pi], \\ -\cos x + 4 \times 2, & x \in [4\pi, 5\pi], \\ \cos x + 4 \times 2 + 2, & x \in [5\pi, 6\pi], \\ \cdots\cdots \\ -\cos x + 4k, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi], \\ \cos x + 4k + 2, & x \in [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi], \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

又可以写成

$$F(x)=\begin{cases}-\cos x+4k, & x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],\\ \cos x+4k+2, & x\in[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi],\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$$

故

$$\int|\sin x|\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

注 类似地,

$$\int|\cos x|\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\sin x+4k, & x\in\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right],\\ -\sin x+4k+2, & x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right].\end{cases}$$

§ 8.2 换元积分和分部积分

内容要求 掌握换元积分和分部积分方法, 第一换元法 (凑微分) 是将被积函数中自变量的某个函数表示成一个新的变量; 第二换元积分法是将被积函数中的自变量表示成新变量的某个函数. 被积函数是两个函数乘积时, 根据函数的类型: 指数函数、三角函数、幂函数、反三角函数, 依此先后凑微分.

例 8-2-1 求下列不定积分 (换元法):

(1) $\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x$; (2) $\int x\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x$; (3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1}$;

(4) $\int(1+x)^n\mathrm{d}x(n\neq-1)$; (5) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

(6) $\int 2^{2x+3}\mathrm{d}x$; (7) $\int\sqrt{8-3x}\mathrm{d}x$; (8) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{7-5x}}$;

(9) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$; (10) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$; (11) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$;

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$; (13) $\int \csc x \mathrm{d}x$; (14) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$; (16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; (17) $\int \frac{x^4}{(1-x^5)^3}\mathrm{d}x$;

(18) $\int \frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$; (19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$; (20) $\int \cot x \mathrm{d}x$;

(21) $\int \cos^5 x \mathrm{d}x$; (22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$; (23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(24) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$; (25) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x$; (26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

(27) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$; (28) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; (29) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(30) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$; (31) $\int x(1-2x)^{99}\mathrm{d}x$;

(32) $\int \frac{1}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x$; (33) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$; (34) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x \cdot \ln\ln x}$;

(35) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}\mathrm{d}x$; (36) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$; (37) $\int [f(x)]^a f'(x)\mathrm{d}x$;

(38) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x$; (39) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$; (40) $\int \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $$\int \cos(3x+4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos(3x+4)\mathrm{d}(3x+4) = \frac{1}{3}\sin(3x+4)+C.$$

(2) $$\int x\mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2) = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x^2}) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x^2}+C.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

(4) $$\int (1+x)^n\mathrm{d}x = \int (1+x)^n\mathrm{d}(1+x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}+C.$$

(注: 如果将 $(1+x)^n$ 用二项式定理展开, 会比较复杂.)

(5) $$\int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\right)\mathrm{d}x$$