万学教育 UNIVERSAL EDUCATION GROUP 海文考研

最新版 考研系列图书

考研数学（题型篇）概率论与数理统计高分解码

主编 丁勇

名师点题，答疑

★ 科学分解备考时间，合理规划复习进程

★ 基础阶段重理论，夯实基础知识

★ 强化阶段练题型，培养解题能力

★ 循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP
海文考研

最新版
考研系列图书

考研数学（题型篇）
概率论与数理统计高分解码

主编 丁勇

名师点题，答疑

★ 科学分解备考时间，合理规划复习进程
★ 基础阶段重理论，夯实基础知识
★ 强化阶段练题型，培养解题能力
★ 循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社
2017·北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学概率论与数理统计高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-5620-6991-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 210109 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印	保定市中画美凯印刷有限公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	17
字　数	445 千字
版　次	2016 年 9 月第 1 版
印　次	2016 年 9 月第 1 次印刷
定　价	35.00 元

目 录

第一章 随机事件和概率

重点题型详解

名师解码

题型一 随机事件的关系与运算

解题策略

关于随机事件的关系与运算问题，一般采用运算法则和图形相结合的方法来解决.

在事件的关系中，考生必须对独立与互斥的区别、两两独立与相互独立的区别非常清楚：

(1) 独立与互斥在逻辑上没有必然联系，独立与事件发生的概率有关，而互斥与概率无关. 特别地，由 $P(AB) = 0$ 不能得出 A,B 互斥.

(2) 多个事件相互独立则一定两两独立，但两两独立不一定相互独立.

【例 1】 设 A,B 为两个事件，且 $A \neq \varnothing$,$B \neq \varnothing$，则 $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$ 表示(　　).

(A) 必然事件　　(B) 不可能事件

(C) A 与 B 不能同时发生　　(D) A 与 B 中恰有一个发生

【解】 $(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) = A\bar{A} \cup A\bar{B} \cup B\bar{A} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{A}$，故选(D).

评注 注意不要错选(C). 选项(C) 表示的是 $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}B + B\bar{A} + \overline{AB}$，其中包含了事件 A 与 B 都不发生的情况.

【例 2】 设 A,B,C 为随机事件，A 与 B 相互独立且 $P(C) = 1$，则下列事件中不相互独立的是(　　).

(A) A,B,$A \cup C$　　(B) A,B,$A - C$

(C) A,B,AC　　(D) A,B,$\bar{A}\,\bar{C}$

【思路】 判断事件独立与否，除了用定义以外，还可以用独立的性质.

【解】 因为 $P(C) = 1$，而 $A \cup C \supset C$，故 $P(A \cup C) = 1$.

由 $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(AC) = 1$，得 $P(A) - P(AC) = 0$，即 $P(A - C) = P(A) - P(AC) = 0$. 而 $P(\bar{A}\,\bar{C}) = P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 0$，因为概率为 0 或概率为 1 的事件与任何事件都相互独立，故选项(A)、(B)、(D) 中的事件均相互独立，所以选择(C).

【例 3】 对于事件 A 与 B，下列说法正确的是(　　).

(A) 若 A 与 B 互斥，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也互斥　　(B) 若 A 与 B 互逆，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也互逆

(C) 若 $A - B = \varnothing$，则 A 与 B 互斥　　(D) 若 $A \cup B = \Omega$，则 A 与 B 互逆

【解】 对于选项(A)，若 A 与 B 互斥，$AB = \varnothing$，而 $\overline{AB} = \overline{A \cup B}$ 不一定为 $\varnothing$，所以选项(A) 不正确；

对于选项(B)，若 A 与 B 互逆(即 $AB = \varnothing$)，且 $A \cup B = \Omega$，则 $\overline{AB} = \overline{A \cup B} = \bar{\Omega} = \varnothing$ 且 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB} = \overline{\varnothing} = \Omega$，即 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互逆，所以选项(B) 正确；

对于选项(C)，若 $A - B = \varnothing$，则 $AB = A$，不一定有 $AB = \varnothing$，所以选项(C) 不正确；

对于选项(D)，显然缺少条件 $AB = \varnothing$，所以选项(D) 不正确.

评注 此题用图形法解决更快捷，考生可自行尝试完成.

【例 4】 设事件 A 与 C 互斥，证明：$(A + B) - C = A + (B - C)$.

【证明】 $(A+B)-C=(A+B)\overline{C}=A\overline{C}+B\overline{C}$,由于 A 与 C 互斥,即 $AC=\varnothing$,则 $A\overline{C}=A-AC=A$,所以$(A+B)-C=A+B\overline{C}=A+(B-C)$.

评注 对于三个事件 A,B,C,一般情况下$(A+B)-C\neq A+(B-C)$.这与数字运算不同.

题型二 概率公式

题型 2.1 基本概率公式

解题策略

考生要将简单事件的关系与基本概率公式相结合来计算复杂事件的概率.要特别注意 $P(AB)$ 的核心作用,如事件 A,B 互斥,则 $P(AB)=0$;如事件 A 包含 B,则 $P(A)\geqslant P(B)$,$P(AB)=P(B)$;如事件 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

【例 5】 设 A,B,C 是三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AC)=0$,$P(AB)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则 A,B,C 全不发生的概率为________.

【解】 "A,B,C 全不发生"的事件可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$,即

$$\begin{aligned}p&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-0-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

评注 由于 $ABC\subset AC$,而 $P(AC)=0$,故 $P(ABC)=0$.

【例 6】 设两两相互独立的三个事件 A,B,C 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$________.

【解】 由于事件 A,B,C 两两相互独立,且 $P(A)=P(B)=P(C)$,则

$P(AB)=P(AC)=P(BC)=[P(A)]^2$,又 $ABC=\varnothing$,故 $P(ABC)=0$,

由加法公式 $P(A\cup B\cup C)$

$$\begin{aligned}&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}.\end{aligned}$$

解得 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(A)=\frac{3}{4}$,根据题设 $P(A)<\frac{1}{2}$,则 $P(A)=\frac{1}{4}$.

【例 7】 设事件 A,B,C 同时发生时,事件 D 一定发生,则( ).

(A)$P(C)\geqslant P(A)+P(D)-1$ (B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C)$P(D)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-1$ (D)$P(D)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2$

【解】 由于 $ABC\subset D$,则

$$\begin{aligned}P(D)&\geqslant P(ABC)=P(AB)+P(C)-P[(AB)\cup C]\geqslant P(AB)+P(C)-1\\&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)+P(C)-1\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-2,\end{aligned}$$

所以选择(D).

题型 2.2　全概率公式和贝叶斯公式

解题策略

若随机试验可以看成分两个阶段进行，且第一阶段的试验结果具体发生哪一个是不知道的，此时要求第二阶段某个试验结果发生的概率，则用全概率公式. 设第一阶段的每个试验结果为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组. 可由全概率公式 $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$ 计算出最后结果. 而若是已知第二阶段发生某个试验结果，反求第一阶段的某个试验结果的概率，则用贝叶斯公式.

【例 8】 某仓库有同样规格的产品 12 箱，其中有 6 箱、4 箱和 2 箱分别是甲、乙、丙三个厂生产的，且三个厂的次品率分别为 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{14}$ 和 $\frac{1}{18}$，现从这 12 箱中任选一箱，再从该箱中任取一件产品，求(1) 取得的为次品的概率.(2) 已知取得的是次品，它是乙厂生产的概率.

【思路】 由于每个厂的次品率不一样，随机地取一箱是不知道哪个厂的，但全部厂家是知道的. 再从箱子中取产品，要求取得次品，那就符合全概率公式模型. 接下来只要设全部可能的厂家为一个完备事件组即可.

【解】 设 A_1 表示“甲厂生产的产品”，A_2 表示“乙厂生产的产品”，A_3 表示“丙厂生产的产品”，B 表示“次品”.

$$(1)P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{14} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{18} \times \frac{2}{12} \approx 0.083$$

$$(2)P(A_2 \mid B) = \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)} \approx 0.287.$$

评注　题目条件分为“选”和“取”两个阶段进行，当然只能运用全概率公式和贝叶斯公式求解.

【例 9】 甲、乙两人进行网球比赛，每一回合胜者得 1 分，且每一回合甲获胜的概率为 α，乙获胜的概率为 β，$\alpha + \beta = 1$，比赛进行到有一人比另一人多 2 分为止，多 2 分者最终获胜，求甲最终获胜的概率.

【解】 用 A_1 表示事件“第一、二回合甲均获胜”，A_2 表示事件“第一、二回合乙均获胜”，A_3 表示事件“第一、二回合甲、乙各获胜一回”，B 表示事件“甲最终获胜”.

$$P(A_1) = \alpha^2,\quad P(A_2) = \beta^2,\quad P(A_3) = \alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta,$$
$$P(B|A_1) = 1, P(B|A_2) = 0, P(B|A_3) = P(B),$$
$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$
$$= \alpha^2 + 0 + 2\alpha\beta \times P(B),$$

解得 $P(B) = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha\beta}$.

评注　本题的解题关键是如果第一、二回合甲、乙各获胜一回，相当于甲、乙两人又回到开始，所以有 $P(B|A_3) = P(B)$.

题型三　概率模型

解题策略

判断概型、正确选择公式是关键.

古典概型的相关问题,计算的要点是先要计算样本点的总数;其次要求出有关事件 A 的有利场合数,而在这些计算中,经常需要借助排列与组合公式.

解决几何概型的相关问题,关键是在坐标系中表示出样本空间 Ω 和事件 A 所在的区域.

题型 3.1　古典概型

【例 10】　将 3 个球随机地放入 4 个杯子,求第一个杯子中没有球的概率.

【思路】　用组合的方法先算出全部样本点数,然后再算出事件所包含的样本点数.

【解】　用 A 表示"第一个杯子中没有球"的事件,全部样本点数为 $C_4^1C_4^1C_4^1$. 由于第一个杯子中没有球,A 中的样本点数为 $C_3^1C_3^1C_3^1$,所以 $P(A)=\dfrac{C_3^1C_3^1C_3^1}{C_4^1C_4^1C_4^1}=\dfrac{27}{64}$.

【例 11】　从数字 1,2,…,9 中(可重复地)任取 n 次,试求所取的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率.

【思路】　n 个数的乘积能被 10 整除,意味着 n 个数中至少有 1 个偶数且至少有 1 个为 5,而样本点的总数显然为 9^n.

【解】　设 A 表示事件"所取的 n 个数的乘积能被 10 整除",B 表示事件"所取的 n 个数中至少有 1 个偶数",C 表示事件"所取的 n 个数中至少有 1 个为 5",则 $A=BC$.

事件 $\overline{B}$ 中样本点数为 5^n,事件 $\overline{C}$ 中样本点数为 8^n,事件 $\overline{B}\,\overline{C}$ 中样本点数为 4^n,则

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{BC})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})\\&=1-[P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\,\overline{C})]=1-\left(\frac{5^n}{9^n}+\frac{8^n}{9^n}-\frac{4^n}{9^n}\right)\\&=\frac{9^n-5^n-8^n+4^n}{9^n}.\end{aligned}$$

评注　当直接计算某个事件中的样本点个数比较困难时,该事件的对立事件中的样本点个数往往比较容易计算.在此基础上利用对立事件概率公式即可.

★ 题型 3.2　几何概型

【例 12】　从区间$(0,\dfrac{1}{2})$和$(\dfrac{1}{2},1)$中随机各取一个数,求两数之和小于$\dfrac{5}{6}$的概率.

【思路】　在坐标系中表示出样本空间 Ω 和事件 A 所在的区域,一般以二维区域(即平面图形)为主.

【解】　以 x,y 分别表示这两个数,则 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$.

这样的(x,y)构成了 xOy 平面上边长为$\dfrac{1}{2}$的正方形区域 Ω. 两数之和小于$\dfrac{5}{6}$这一条件决定了 Ω 的子集 A(阴影部分),如图 1-1 所示,则

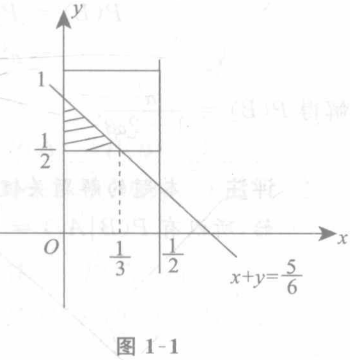

图 1-1

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}.$$

【例 13】　甲乙两人在某一个小时内的某一时刻随机地到达同

一地点，他们到达后各停留 10 分钟，求他们没有碰上的概率.

【思路】 本题考查几何概型的实际应用. 甲乙两人的到达时间即为两个数，他们没有碰上即是两个数之差的绝对值大于 $\frac{1}{6}$ 小时.

【解】 以 x, y 分别表示甲乙两人到达的时间，则 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$，这样的 (x, y) 构成了 xOy 平面上边长为 1 的正方形区域 Ω.

用 A 表示“他们到达后各停留 10 分钟而没有碰上”，即 $A = \{|x - y| > \frac{1}{6}\}$，则 A(阴影部分) 如图 1-2 所示，所以

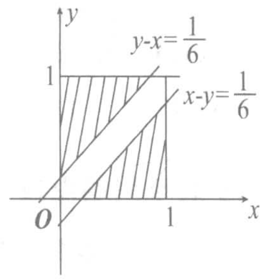

图 1-2

$$P(A) = \frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6}}{1} = \frac{25}{36}.$$

【例 14】 在一张画有方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，方格要多大才能使硬币与方格的边不相交的概率小于 1%？

【思路】 此题可以看作是在边长为 a 的方格上投硬币，为了使硬币与方格的边不相交，硬币的中心坐标必须落在图 1-3 所示的阴影部分.

【解】 设硬币中心坐标为 (x, y)，这样的 (x, y) 构成了 xOy 平面上边长为 a 的正方形区域 Ω.

用 A 表示“硬币与方格的边不相交”，即

$A = \{(x, y) \mid 0.5 < x < a - 0.5, 0.5 < y < a - 0.5\}$，

则 A(阴影部分) 如图 1-3 所示，所以

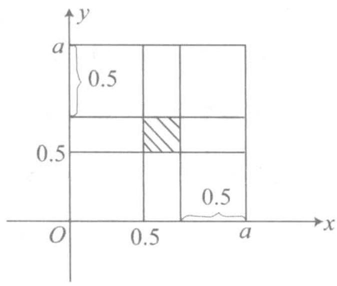

图 1-3

$$P(A) = \frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{(a-1)^2}{a^2} < 0.01,$$

解得 $a < \frac{10}{9}$，即方格的边长最大为 $\frac{10}{9}$ 才能使硬币与方格的边不相交的概率小于 1%.

题型 3.3　伯努利概型

解题策略

对于伯努利概型的相关问题，关键是找准两个参数，即试验次数 n 和每次试验中事件 A 发生的概率 p.

【例 15】 一本 n 页的书，共有 r 个错误，每个错误等可能地出现在每一页上，求在第一页上至少有两个错误的概率.

【思路】 错误出现在第一页上记为 A，$p = P(A) = \frac{1}{n}$，没有出现在第一页上记为 $\overline{A}$，r 个错误相当于 r 次试验，这样就构成了伯努利概型.

【解】 用 B 表示事件“第一页上至少有两个错误”，其对立面是“第一页上有一个错误或没有错误”，由 r 重伯努利试验对应的二项式概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P_r(0) - P_r(1) = 1 - C_r^0 (1 - \frac{1}{n})^r - C_r^1 \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{n})^{r-1} \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{n})^r - \frac{r}{n} (1 - \frac{1}{n})^{r-1}. \end{aligned}$$

评注　这里的试验次数是 r，而不是 n，而每个错误等可能地出现在每一页上，故 $p = P(A) = \frac{1}{n}$.

【例 16】 某人对一目标独立地射击 3 次,若至少命中一次的概率为$\frac{26}{27}$,则他射击一次命中目标的概率为________.

【思路】 这是在伯努利概型中反推每次试验中事件 A 发生的概率 p 的典型命题.考试中也可能出现反推试验次数的类似问题.

【解】 由题设知 $n=3$. 设 A 为事件"射击一次命中目标",B 为事件"至少命中目标一次",$p=P(A)$,$P(B)=1-C_3^0p^0(1-p)^3=\frac{26}{27}$,即$(1-p)^3=\frac{1}{27}$,则 $p=\frac{2}{3}$.

疑难问题点拨

1. 事件概率中的最大、最小值问题

关于事件概率中的最大、最小值问题,一般是通过建立概率不等式来解决.如 $p\geqslant a$,且 p 可以取到 a,则可得 p 的最小值为 a;如 $p\leqslant b$,且 p 可以取到 b,则可得 p 的最大值为 b.

这和函数最值问题不一样,函数最值可以通过导数来解决,而事件概率的最值问题,一般是没有函数关系的,就算能建立某些等式,事件概率 p 也是自变量,函数最值是因变量的最大、最小值,所以两者不能混淆.

【例 17】 已知 $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$,则 $P(A\mid B)+P(B\mid A)$ 的最小值为________.

【思路】 为了建立不等式,可以试试利用 $P(A\cup B)\leqslant 1$.

【解】 由 $P(A\mid B)+P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(AB)}{P(A)}=3P(AB)$,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-P(AB)\leqslant 1,$$

得 $P(AB)\geqslant\frac{1}{3}$,则 $P(A\mid B)+P(B\mid A)=3P(AB)\geqslant 1$,且当 $P(AB)=\frac{1}{3}$ 时等号成立,所以$P(A\mid B)+P(B\mid A)$ 的最小值为 1.

> **评注** 欲建立不等式,经常可以使用的结论有:事件和的概率小于等于1;事件交的概率大于等于0;若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$ 等.

【例 18】 设两两独立且不能同时发生的三个事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(C)=P(B)=p$,则 p 的最大值为________.

【思路】 由于$(A\cup B)\subset(A\cup B\cup C)$,可以尝试从 $P(A\cup B)\leqslant P(A\cup B\cup C)$ 入手.

【解】 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=p^2$,$P(ABC)=0$,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2p-p^2$,

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=3p-3p^2.\end{aligned}$$

由于$(A\cup B)\subset(A\cup B\cup C)$,可得 $P(A\cup B)\leqslant P(A\cup B\cup C)$,即 $2p-p^2\leqslant 3p-3p^2$,则 $p(2p-1)\leqslant 0$,解不等式得 $p\leqslant\frac{1}{2}$,所以 p 的最大值为$\frac{1}{2}$.

> **评注** 这里如果使用 $P(A\cup B)=2p-p^2\leqslant 1$ 或 $P(A\cup B\cup C)=3p-3p^2\leqslant 1$,显然都不能解决问题;所以尝试用 $P(A\cup B)\leqslant P(A\cup B\cup C)$ 求解.这就要求考生在解决问题的过程中要敢于多次尝试,最终找到所需结果.

★2. 两个事件的独立、互逆、互斥

“事件 A 与 B 互斥”和“事件 A 与 B 独立”是两个不同的概念，前者与事件发生的概率无关，而后者与事件发生的概率有关，它们在逻辑上没有因果关系.

“事件 A 与 B 互逆”可以得出“事件 A 与 B 互斥”，反之不成立.

【例 19】 对于任意两个事件 A 和 B，有(　　).

(A) 若 A 与 B 互斥，则 A 与 B 一定独立

(B) 若 A 与 B 互逆，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互逆

(C) 若 A 与 B 互斥，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互斥

(D) 若 A 与 B 互逆，则 A 与 B 一定不独立

【思路】 本题考查对互斥、互逆和独立的概念以及它们之间关系的理解.

【解】 首先独立与互斥没有必然联系，同样互逆与独立也没有必然联系，故选项(A)、(D) 都不正确；

对于选项(C)，尽管 $AB=\varnothing$，但 $\overline{AB}=\overline{A\cup B}$ 不一定为 $\varnothing$，故选项(C) 不一定成立；

对于选项(B)，$AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=\overline{\Omega}=\varnothing$，且 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}=\overline{\varnothing}=\Omega$，即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互逆，所以选项(B) 正确.

综合拓展提高

【例 20】 设有一批产品，每箱产品有 10 件，其中含次品数 0，1，2 件是等可能的. 开箱检验时，从中任取一件，如果检验是次品则认为该箱产品不合格而拒收，假设由于检验有误，一件正品被检验为次品的概率是 2%，一件次品被漏查误判为正品的概率为 5%，计算该箱产品通过验收的概率.

【思路】 由于每箱产品中次品数不一样，从中任取一件产品是正品或次品都要考虑该箱产品的次品数，这就需要使用全概率公式；又由于检验有误，取出的产品不管是正品还是次品，最后都有可能通过验收，所以再使用一次全概率公式.

【解】 设 B 为表示事件“该箱产品通过验收”，A_i 表示事件“箱内有 i 件次品”$(i=0,1,2)$，B_1 表示事件“取出的产品是正品”，B_2 表示事件“取出的产品是次品”，则

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\quad P(B_1\mid A_i)=\frac{10-i}{10},\quad i=0,1,2,$$

$$P(B_1)=P(B_1\mid A_0)P(A_0)+P(B_1\mid A_1)P(A_1)+P(B_1\mid A_2)P(A_2)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{10}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{10}=0.9,$$

$$P(B_2)=1-P(B_1)=0.1,$$

$$P(B)=P(B\mid B_1)P(B_1)+P(B\mid B_2)P(B_2)=0.98\times0.9+0.05\times0.1=0.887.$$

> **评注**　全概率公式的两次使用再一次说明了其重要性，本书在后面的随机变量部分中会再次体现它的应用.

【例 21】 设一个汽车站上，某路公共汽车每 5 分钟有一辆车到达，设乘客在 5 分钟内任一时间到达是等可能的，求在车站候车的十位乘客中只有一个等待时间超过 4 分钟的概率.

【思路】 先考虑某位乘客等待时间超过 4 分钟的概率，由于汽车是固定时间到达，只是乘客是随机到达，所以符合一维几何概型. 然后假设十位乘客相互独立，这是一个 10 重伯努利概型.

【解】 设 A 表示事件“某位乘客等待时间超过 4 分钟”，B 表示事件“十位乘客中只有一个等待时间超过 4 分钟”，则 $p=P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=C_{10}^{1}\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{9}\approx0.268.$

评注　这是两个概率模型的混合应用问题.在后面的内容中,伯努利概型还会和随机变量的一些常用分布联合应用.

【例 22】　若三个事件 A,B,C 相互独立,证明 $A-B$ 与 $\overline{C}$ 相互独立.

【思路】　事件的独立,用定义判定.

【证明】
$$\begin{aligned}P[(A-B)\overline{C}] &= P(A\overline{B}\overline{C}) = P[A\,\overline{(B\cup C)}]\\ &= P[A-(B\cup C)] = P(A)-P[A(B\cup C)]\\ &= P(A)-P(AB\cup AC) = P(A)-[P(AB)+P(AC)-P(ABAC)]\\ &= P(A)-[P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)]\\ &= P(A)[1-P(C)]-P(A)P(B)[1-P(C)]\\ &= [P(A)-P(AB)][1-P(C)] = P(A-B)P(\overline{C}).\end{aligned}$$

所以 $A-B$ 与 $\overline{C}$ 相互独立.

本章同步练习

1. 设事件 A,B,C 满足 $C\supset AB,\overline{C}\supset\overline{AB}$,证明:$AC=C\overline{B}+AB$.

2. 已知 $(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})=C,P(C)=\dfrac{1}{4}$,求 $P(B)$.

3. n 个朋友随机地围绕圆桌就座,求其中有两个人一定要坐在一起(即座位相邻)的概率.

4. 一幢 10 层的楼房中有一架电梯,在底层登上 5 位乘客,电梯在每一层都停.乘客从第二层起离开电梯.假设每位乘客在每一层离开电梯是等可能的,求:

(1) 没有两位及两位以上乘客在同一层离开电梯的概率;

(2) 除有两位乘客在同一层离开电梯外,其余乘客都是单个在各层离开的概率.

5. 某人写了 n 封信,又写了 n 个信封,将 n 封信任意地装入 n 个信封,求至少有一封信与信封匹配的概率.

6. 从 $(0,1)$ 中随机地取出两个数,则两个数之积小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率.

7. 把长度为 10 m 的木棒任意折成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

8. 一个家庭中有两个孩子.假设男孩、女孩是等可能的.

(1) 已知其中有一个是女孩,求另一个也是女孩的概率;

(2) 已知第一个是女孩,求第二个也是女孩的概率.

9. 在一系列的独立试验中,每次试验成功的概率为 p.记事件 A 为"第 3 次成功之前失败 4 次",事件 B 为"第 3 次成功之前至多失败 2 次",求 $P(A),P(B)$.

10. 口袋中有 m 只正品硬币,n 只次品硬币(次品硬币两面均印有国徽),在口袋中任取一只,将它投掷 r 次,已知每次都得到国徽,问这只硬币是正品的概率是多少?

11. 某班有女生 10 名,男生 20 名,姓名各异,一次联欢会上,将 30 人的姓名做了 30 个阄.主持人任抓一阄,得一个学生的姓名,并令其掷一骰子,若得 1 点,就由该学生指定一名异性学生表演;若得 3 点或 5 点,就在其余的阄中任抓一阄决定表演者;若得偶数点,就由该学生自己表演.

(1) 求由男生表演的概率 p_1;

(2) 已知表演者是女生,求主持人抓到的是男生阄的概率 p_2.

12. 每次射击的命中率均为 0.2,必须进行多少次独立射击,才能使至少击中一次的概率不小于 0.9?

13. 考虑图 1-4 所示的通信网络,线路 1~7 发生故障的概率均为 p,且各条线路是否发生故障互不影响,求能在 x 和 y 之间通信的概率.

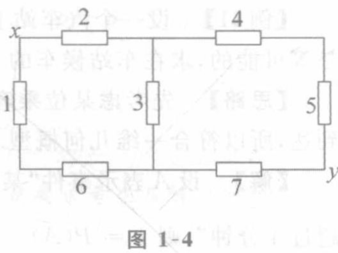

图 1-4

14. 设昆虫产 n 个卵的概率为 $p_n=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(\lambda>0$ 为常数$)$,而每个卵孵化成昆虫的概率均为 p,设各个卵是否孵化成昆虫相互独立.证明:昆虫下一代恰有

r 只的概率为 $\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}$.

15. 某人随身带有两盒烟，吸烟时从任一盒中取一根，经过若干时间后，发现一盒烟已经用完. 如果最初两盒烟中各有 n 根烟，求这时另一盒中还剩 r 根烟的概率.

16. (2002[4]) 设任意的随机事件 A 与 B，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

本章同步练习答案解析

1. 由于 $\overline{C} \supset \overline{AB}$，得 $C \subset A+B$，则 $C\overline{B} \subset (A+B)\overline{B} = A\overline{B} + B\overline{B} = A\overline{B} \subset A$，故 $AC\overline{B} = C\overline{B}$，$ACB = ABC = AB$，所以 $AC = AC(B+\overline{B}) = ACB + AC\overline{B} = AB + C\overline{B} = C\overline{B} + AB$.

2. $C = (\varnothing \cup A\overline{B} \cup \overline{AB} \cup \overline{B}) \cup \overline{AB} \cup A\overline{B} = A\overline{B} \cup \overline{AB} \cup \overline{B} = \overline{B}$，

$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{4}$，所以 $P(B) = \frac{3}{4}$.

3. 设要坐在一起的是甲和乙两人，先让甲坐好，则乙共有 $(n-1)$ 个座位可坐，而有利场合有两种(乙在甲的左边或右边)，故所求概率为 $\frac{2}{n-1}$.

4. (1) $p_1 = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{9^5} \approx 0.256$. (2) $p_2 = \frac{C_5^2 C_9^1 C_8^3 3!}{9^5} \approx 0.512$.

5. 记 A_i 为第 i 封信与信封匹配的事件，则所求的概率为 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$，不难求得

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},\ P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},\cdots,P(A_1A_2\cdots A_n) = \frac{1}{n!},$$

于是由加法定理，

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = C_n^1 \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

6. 以 x,y 分别表示这两个数，则 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$，这样的 (x,y) 构成了 xOy 平面上边长为 1 的正方形区域 Ω.

两数之积小于 $\frac{1}{2}$ 这一条件决定了 Ω 的子集 A(阴影部分所示)，如图 1-6，则

$$P(A) = \frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{1-\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 - \frac{1}{2x}\mathrm{d}x}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

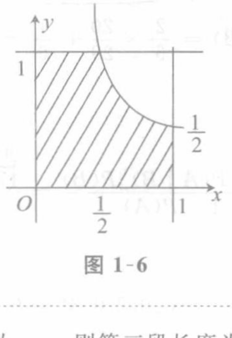

图 1-6

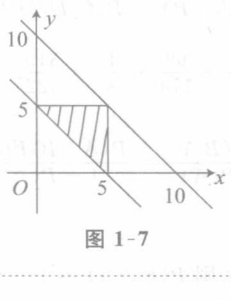

图 1-7

7. 设其中两段长度分别为 x,y，则第三段长度为 $10-x-y$，于是有 $x>0, y>0, x+y<10$，$\Omega = \{(x,y) \mid x>0, y>0, x+y<10\}$，而事件"三段可以构成一个三角形"记为 A，三段可以构成一个三角形的充要条件是任意

两段的和大于另一段，即为：

$x+y>10-x-y, x+(10-x-y)>y, (10-x-y)+y>x$,

于是 $A=\{(x,y)\mid 0<x<5, 0<y<5, x+y>5\}$，(阴影部分所示)如图 1-7，则 $P(A)=\dfrac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=$

$\dfrac{\frac{1}{2}\times 5\times 5}{\frac{1}{2}\times 10\times 10}=\dfrac{1}{4}$.

8. 设 A_i 表示事件"家庭中第 i 个是女孩"，$(i=1,2)$.

(1) $P(A_1A_2\mid A_1\cup A_2)=\dfrac{P(A_1A_2(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

(2) $P(A_2\mid A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

9. 对于 A，意味着第 7 次成功，前 6 次是伯努利概型，则 $P(A)=pC_6^2p^2(1-p)^4=15p^3(1-p)^4$.

对于 B，$B=B_0+B_1+B_2$，其中 B_i 为"第 3 次成功之前失败 i 次"，$(i=0,1,2)$，则

$$P(B)=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=pC_2^2p^2+pC_3^2p^2(1-p)+pC_4^2p^2(1-p)^2$$
$$=p^3+3p^3(1-p)+6p^3(1-p)^2=p^3(10-15p+6p^2).$$

10. 设 B 表示事件"每次投掷硬币都得到国徽"，A 表示事件"所取硬币是正品"，$\overline{A}$ 表示事件"所取硬币是次品"，$A,\overline{A}$ 构成一个完备事件组，由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{C_r^r(\frac{1}{2})^r\times\frac{m}{m+n}}{C_r^r(\frac{1}{2})^r\times\frac{m}{m+n}+C_r^r(1)^r\times\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}.$$

11. 设 A 表示事件"由男生表演"，B 表示事件"主持人抓到的是男生阄"，C_1 表示事件"掷骰子得 1 点"，C_2 表示事件"掷骰子得 3 点或 5 点"，C_3 表示事件"掷骰子得偶数点"，D 表示事件"在其余的阄中抓到男生表演".

(1) $P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})$，其中 $P(B)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$，$P(\overline{B})=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$，

而 $P(A\mid B)=P(C_2D\cup C_3\mid B)=P(C_2D\mid B)+P(C_3\mid B)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{19}{29}+\dfrac{3}{6}=\dfrac{125}{174}$，

$P(A\mid\overline{B})=P(C_2D\cup C_1\mid\overline{B})=P(C_2D\mid\overline{B})+P(C_1\mid\overline{B})=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{20}{29}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{69}{174}$，

所以 $p_1=P(A)=\dfrac{125}{174}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{69}{174}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{319}{522}$.

(2) $p_2=P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\mid B)P(B)}{1-P(A)}=\dfrac{[1-P(A\mid B)]P(B)}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{49}{174}\times\frac{2}{3}}{\frac{203}{522}}=\dfrac{98}{203}$.

12. 设进行 n 次独立射击，则 $P(k\geqslant 1)=1-P(k=0)=1-C_n^0 0.2^0 0.8^n\geqslant 0.9$，即 $0.8^n\leqslant 0.1$，经计算得 $0.8^{10}\approx 0.1074$，$0.8^{11}\approx 0.0859$，取 $n=11$.

13. 设 A_i 表示"第 i 条线路不发生故障"，$(i=1,2,\cdots,7)$；B 表示"能在 x 和 y 之间通讯"，此通讯网络的关键是第三条线路是否发生故障，A_3 和 $\overline{A}_3$ 构成一个完备事件组，

$$P(B)=P(B\mid A_3)P(A_3)+P(B\mid \overline{A}_3)P(\overline{A}_3),$$

$$\begin{aligned}P(B\mid A_3)&=P[A_2\cup(A_1A_6)]\cdot P[A_7\cup(A_4A_5)]=[(1-p)+(1-p)^2-(1-p)^3]^2\\&=(1-p)^2(1+p-p^2)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B\mid \overline{A}_3)&=P[(A_2A_4A_5)\cup(A_1A_6A_7)]=(1-p)^3+(1-p)^3-(1-p)^6\\&=(1-p)^3(1+3p-3p^2+p^3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B)&=(1-p)^2(1+p-p^2)^2(1-p)+(1-p)^3(1+3p-3p^2+p^3)p\\&=(1-p)^3(1+3p+2p^2-5p^3+2p^4).\end{aligned}$$

14. 设 A_n 表示"有 n 个卵"，$n=0,1,2,\cdots$；B 表示"昆虫下一代恰有 r 只".

$$P(A_n)=p_n=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\quad P(B\mid A_n)=C_n^rp^r(1-p)^{n-r},\quad n\geqslant r.$$

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{n=0}^{\infty}P(B\mid A_n)P(A_n)=\sum_{n=r}^{\infty}C_n^rp^r(1-p)^{n-r}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{n=r}^{\infty}\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\\&\xlongequal{t=n-r}\frac{p^r\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{\infty}(1-p)^t\cdot\frac{\lambda^t}{t!}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

15. 我们不妨把吸一次烟看作一次试验，每次试验的结果只有两个：取于甲盒（记为 A）和取于乙盒（记为 $\overline{A}$），由于使用时从任一盒中取，因此 $p=P(A)=0.5$.

假如甲盒已空而乙盒还剩 r 根烟，则在此之前一定已经取过 $2n-r$ 次，其中恰好有 n 次取于甲盒，有 $n-r$ 次取于乙盒，而第 $2n-r+1$ 次必然抓了甲盒，因此这种情况的概率为 $p_1=\frac{1}{2}C_{2n-r}^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$，假如乙盒已空而甲盒还剩 r 根烟，同样的道理可得这种情况的概率为 $p_2=\frac{1}{2}C_{2n-r}^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$，因此一盒烟已经用完另一盒中还剩 r 根烟的概率为 $p=p_1+p_2=C_{2n-r}^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=C_{2n-r}^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$.

16. 必要性　由事件 A 与 B 独立，得事件 $\overline{A}$ 与 B 也独立，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),\quad P(B\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}=P(B),$$

因此 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$.

充分性　由 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，得 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件 A 与 B 独立.

第二章　随机变量及其分布

重点题型详解

名师解码

题型一　概率分布、概率密度和分布函数

★ 题型 1.1　概念与性质

$f(x)$ 为概率密度的充分必要条件是：$f(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$；且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

$F(x)$ 为分布函数的充分必要条件是：

(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1, \forall x\in \mathbf{R}$;

(2) 若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$，即单调不减；

(3)$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0), \forall x_0\in\mathbf{R}$，即右连续.

重要结论：若 $F_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 均是分布函数，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_iF_i(x)\left(a_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\right)$ 和 $\prod\limits_{i=1}^{n}F_i(x)$ 也是分布函数.

若 $f_i(x)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 均是概率密度，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_if_i(x)\left(a_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\right)$ 也是概率密度；但是 $\prod\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$ 不一定是概率密度.

【例 1】　(2011[1][3]) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度为 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　).

(A) $f_1(x)f_2(x)$　　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$　　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【思路】　本题考查概率密度的充分必要条件以及概率密度和分布函数的关系.

【解】　因为 $F_1'(x)=f_1(x), F_2'(x)=f_2(x)$，于是

$$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)=F_1'(x)F_2(x)+F_1(x)F_2'(x)=[F_1(x)F_2(x)]',$$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x=[F_1(x)F_2(x)]\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$,

且 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\geqslant 0$，所以 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度，故选(D).

> **评注**　如果利用重要结论 $F_1(x)F_2(x)$ 是分布函数，则
> $[F_1(x)F_2(x)]'=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度.

【例 2】　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，引入函数 $F_1(x)=F(ax), F_2(x)=F^2(x), F_3(x)=1-F(-x), F_4(x)=F(x+a)$，则可以确定也是分布函数的为(　　).

(A) $F_1(x), F_2(x)$　　　(B) $F_2(x), F_3(x)$

(C) $F_3(x), F_4(x)$　　　(D) $F_2(x), F_4(x)$

【思路】　本题是考查分布函数的充分必要条件.

【解】　$F_1(x)=F(ax)$，当 $a<0$ 时，$F_1(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(ax)=F(-\infty)=0\neq 1$，则 $F_1(x)$ 不是分布函数.