通·识·教·育·丛·书

数学思想要义

THE ESSENCE OF MATHEMATICAL THOUGHT

范后宏 ◎ 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

通·识·教·育·丛·书

数学思想要义

THE ESSENCE OF MATHEMATICAL THOUGHT

范后宏 ◎ 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学思想要义/范后宏著；—北京：北京大学出版社，2018. 9

（通识教育丛书）

ISBN 978-7-301-29808-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①范… Ⅲ. ①数学—思想方法 Ⅳ. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 192256 号

书　　名	数学思想要义 SHUXUE SIXIANG YAOYI
著作责任者	范后宏　著
责任编辑	尹照原
标准书号	ISBN 978-7-301-29808-4
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　9.75 印张　192 千字
	2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
定　　价	29.00 元

范后宏　获芝加哥大学数学专业哲学博士学位，毕业后在耶鲁大学从事教学和研究工作，之后曾在英特尔公司从事研究工作，回国后在北京大学数学科学学院从事教学和研究工作，现任北京大学数学系主管本科教学的副主任。在北京大学讲授过的本科生课程有："古今数学思想""微分流形""复变函数""数理逻辑""线性代数B""数学分析II 选讲""数学分析选讲III""理论计算机科学基础"；讲授过的研究生课程有："同调论""同伦论""微分拓扑选讲""纤维丛上的微分几何""组合最优化算法"。研究过的领域有拓扑学、规范场论、集成电路设计自动化。曾获2000/2001年度李氏基金会杰出成就奖；当选北京大学 2007 年第十二届最受学生爱戴的十佳教师；获北京市教育委员会等授予的2016 年北京市"师德先锋"荣誉称号。

内 容 简 介

本书是根据作者在北京大学多次讲授通选课“古今数学思想”的讲稿整理而成，重点讲解那些在哲理上较为深刻的数学思想。内容包括数学语言的真善美、数学思维方式、Euclid 公设、中国古代数学、奇妙的虚数、Newton 思想与自然背后的方程、Euler 与 Gauss 的承前启后、Galois 思想与方程背后的对称、Riemann 的内在空间新思维、深奥的球面与 Poincaré 问题、对称背后的同伦与 Atiyah-Singer 指标理论，等等。本书可作为高等院校数学思想类通选课的教材或教学参考书，其中有关中学数学的内容也适合中学生阅读，可以提高中学生对数学深刻性的认识。为了方便教师多媒体教学，作者为本书中的要点提供了 PPT (Power Point) 文件。

前　言

北京大学的“古今数学思想”课是面向全校本科生的一门通选课，我讲授过多次。讲课用的是 PPT(PowerPoint) 讲稿，同学们希望我把 PPT 讲稿加以整理和完善，写成一本书。这门课是一学期课程，每周 2 学时，课时有限，难以面面俱到。北京大学的学生基础好，期望高，即使是通选课，内容也不能只限于一般性的介绍。因此，这门课挑选了那些在数学哲理上较为深刻的数学思想做重点讲解，特别指出其在数学思维方式上的变革。因此就有了本书的名字《数学思想要义》。

眼前的一张桌子，能看得见摸得着。数学不像桌子，看不见摸不着，怎么能说数学是存在的呢？什么是“存在”？这个问题一直是哲学家们思索的很难的问题，往往是一个哲学体系要回答的基本问题 (参见 [67] 第 53 页)。在不同的哲学体系中，对存在的理解不尽相同。在现代存在论中，海德格尔说“语言是存在的家”[67]。在这个哲学体系中，也可以说“数学语言”是“数学存在”的家。

数学语言与通常语言有着本质的不同。数学语言的第一特征是数学语言是形式逻辑“自洽”的。Hilbert 明确地确定了一个数学公理体系是一个“数学存在”的必要条件是：它的所有公理在形式逻辑推演过程中是“自洽”的，即不可能同时推出一个命题和它的否定命题。

数学语言的第二特征是数学语言有不可思议的“魔力”：人类通过数学语言，可以了解太阳系、银河系、13 亿年前发出的引力波、130 亿年前的早期宇宙；可以了解原子、电子、夸克；可以控制天上的飞船、手机里的上亿个晶体管、机器人下围棋，等等。数学语言的第三特征是几乎“完美”。如果某个数学体系中有不完美的地方，那么数学家们会一代接着一代尽力去完善它。数学语言的第一特征反映数学语言的“真”；第二特征反映数学语言的“善”；第三特征反映数学语言的“美”。数学语言实质是人类在实践中追求永恒“真善美”的精神产物，是人类本质力量的精确符号化。

数学语言是“数学思维”的表达。数学中有四种基本思维方式：“形”“数”“逻辑”“自然理性”。它们的“统一”对数学的发展是至关重要的。在古希腊数学中，形和逻辑是统一的，这是古希腊数学的特色。Newton 在《自然哲学之数学原理》(1687) 中实现了数学和自然理性的统一，因此，近代欧洲数学在深度和广度上大大超过了古希腊数学。Hilbert 在 1899 年构造了实数公理体系，实现了数与逻辑的直接统一。从此，在现代数学中，形、数、逻辑、自然理性全都是统一的，因此现代数学在深度和广度上大大超过了近代欧洲数学。上述内容是第一章要讲的主题。

Euclid 几何的五个公设是欧氏几何的本质。现在每个初中生都要学平面欧氏几何。那么 Euclid 几何五个公设的确切含义是什么呢？有哪些引申？这些是第二章要讲的主题。

中国古代数学存在着一个悠久的价值观和传统：方程与算法。这反映在中国古代数学发展的一条主线中：从公元前 1 世纪《九章算术》中的一次方程组的消元算法，到公元 14 世纪朱世杰的《四元玉鉴》中高次方程组的消元算法。

中国古代数学另一条主线是“几何计算”：从大约公元前 11 世纪的“勾广三，股修四，径隅五”，到公元 5 世纪祖冲之和祖暅的球体积公式和祖氏原理。但令人不解的是，中国几何计算主线在公元 5 世纪之后似乎停止了发展。如果这条主线能一直发展到宋代，特别是其中的“极限”方法，与宋代发达的“方程”和“级数”相结合，那么就有可能发展出中国的微积分方法、中国的无穷级数方法。这表明，“数”与“形”的统一对数学的飞跃发展是至关重要的。

在“几何论证”这一条线上，中国古代数学也迈出了显著的两步：大约公元前 4 世纪，《墨经》中有一些几何概念、逻辑概念、逻辑演绎规则；公元 3 世纪，赵爽对勾股定理给出了一个“经验性的”证明。但没能迈出第三步：如果按《墨经》中“辩”(论证) 的基本规则，对赵爽的勾股定理证明中用到的“故”(前提) 和“辞”(判断) 追问下去，按前后次序来排序，那么就有可能发现“最前面的故”，作为“公设”，从而建立“中国几何的逻辑体系”。所以，古代中国几何学与古希腊几何学的关键区别在于“形”与“逻辑”是不是统一了。这个区别是影响深远的。这些是第三章要讲的主题。

虚数概念的发展是一个传奇。一开始，在 16 世纪，虚数 $\sqrt{-1}$ 被当作是操作式的。在 17 世纪，Newton 不认为虚数有物理意义，Leibniz 认为虚数介于存在与不存在之间。到 18 世纪末和 19 世纪初，Gauss 在实质上把虚数 $a+b\sqrt{-1}$ 看作实数对 (a,b)，其“乘法”定义为 $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)\equiv(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)$。这样就有 $(0,1)^2=(-1,0)$。$(-1,0)$ 被看作 -1，就得到 $(0,1)^2=-1$。Gauss 解释了 $\sqrt{-1}=(0,1)$ 是“数学存在”。惊奇的是，在 20 世纪的量子力学中，虚数 $\sqrt{-1}$ 成为表达位置与动量关系的关键数学量。这些是第四章要讲的主题。

从 Newton 的万有引力方程推出 Kepler 的行星运动三个定律的数学过程并不长，但对于数学价值的认识是一个无与伦比的飞跃：大自然的秘密隐藏在它背后的方程中，即“自然背后的方程”。Newton 和 Leibniz 是微积分原理的共同发现者，但他们的微积分特色有所不同。他们在数学中还有其他显著的工作。这些是第五章要讲的主题。

Euler 和他同时代的数学家们继承了 Newton 和 Leibniz 的数学思想，在众多方向上把数学向前推进。Gauss 的工作中已经蕴含了一些现代数学的“种子”。这些是第六章要讲的主题。

对多项式的研究是数学发展的一个动力。在中学里，我们就知道字母系数的一元二次、三次、四次方程的根都可以由它的系数与有理数经过有限次四则运算与“根式”运算而得到。Abel 证明了对于一般字母系数的一元五次方程，这样做不到。但对于有些数字系数的任意次方程却可以做到，例如，Gauss 证明了对于 $x^n = 1$ 就可以做到。那么，一个基本问题出现了：对哪些多项式方程可以做到呢？Abel 得到了一个充分条件，但没有得到“充分必要条件”。想得到这个充分必要条件需要数学新思想：考察方程所有根之间的所有“对称性”，即“方程背后的对称”。这个对称结构及其深层意义首先是由 Galois 认识到的。

事实上，不仅数学中多项式方程背后有对称，而且，令人惊异的是，“大自然基本方程背后也有对称”：Maxwell 方程的背后有 $U(1)$ 规范对称；Einstein 狭义相对论方程背后有 Lorentz 对称；Einstein 广义相对论方程背后有广义协变对称；Yang-Mills 方程背后有 $SU(2)$ 规范对称。“对称原理”已成为物理学最基本原理之一。“方程背后的对称”是“自然背后的方程”的发展。这些是第七章、第八章要讲的主题。

Galois 的新思想是从研究一元方程中激发出来的。如果研究多元方程，就会遇到“多值”函数的困难。例如，研究二元方程 $x^2 + y^2 = 1$，就会遇到多值函数 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$。经典微积分中思维方式是：把一个整体方程 $x^2 + y^2 = 1$ 分成两个局部单值分支 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$，但在 $x = 1$ 处它们不可导，说是奇点。这不符合实际：$x^2 + y^2 = 1$ 代表一个圆，每点都是光滑的、等价的、没有任何奇点。克服这个困难需要新的数学思维方式：摆脱经典微积分中“单个坐标系”的束缚，大胆想象出一种“内在空间”。这个大胆想象是由 Riemann 做出的。他在 1854 年的《关于几何基础的假设》中写道：“Such researches have become a necessity for many parts of mathematics, e.g., for the treatment of many-valued analytical functions.”(引自 [56] 第 32 页，中译文：这样的研究对数学的许多部分是必要的，例如，多值解析函数的处理。) 这些是第九章要讲的主题。

Riemann 的“内在空间”新思维的意义在于：许多深层的数学“内在联系”在 20 世纪被揭示，这些内在联系在 19 世纪是不可想象的。许多“看似无关”的数学对象实际上存在着内在的联系，用现代数学语言说，就是“同伦”“同胚”“微分同胚”。例如，在 20 世纪 60 年代，数学家们发现方程 $z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$ 的复数解空间的零点附近隐藏着一个“奇怪的球面”，它“连续”地看像 7 维球面，但“微分”地看又不像 7 维球面，用现代数学语言说，它“同胚”于标准 7 维球面，但又“不微分同胚”于标准 7 维球面。在 20 世纪 80 年代，数学家们又发现，在 4 维实线性空间上，“奇怪的微分结构”也出现了，而且还更多，有不可数个：4 维实线性空间上存在“不可数个”相互不微分同胚的微分结构。它们是在 20 世纪中“新发现的数学存在”。Milnor“奇怪的球面”的发现使得人类对于空间的理解，在非欧

几何之后，又来了一次大的飞跃。“奇怪的微分结构”中隐藏着很多奥秘有待继续探索。它们与物质世界的联系是个诱人的谜。这些是第十章要讲的主题。

“球面”是至美的几何对象，“矩阵”是至美的代数对象，它们之间的至美的基本联系是什么呢？这个问题可以引出 20 世纪数学中的又一个深层发现：Bott 周期律。用现代数学语言说，就是稳定酉矩阵群的 k 维同伦群与它的 $k+2$ 维同伦群是同构的。通俗地说，Bott 周期律提供了从 k 维到 $k+2$ 维的一个“梯子”。不断地通过这个“Bott 梯子”，就可能把某类 $2n$ 维的复杂问题归约为 2 维的简单问题，把某类 $2n+1$ 维的复杂问题归约为 1 维的简单问题。而椭圆型线性微分算子的“指标”问题正好是这类问题。因此，通过这个“Bott 梯子”，就可以达到 20 世纪数学的一座“高峰”—— Atiyah-Singer 指标定理：闭合定向微分流形上的椭圆型线性微分算子的“分析指标”等于它的“拓扑指标”。它能推出 20 世纪数学中许多“山峰”，如，代数几何中的 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理、微分拓扑中的 Hirzebruch 指标定理、四维微分拓扑中 Rochlin 定理、数学 Dirac 算子的指标公式、数学 Yang-Mills 理论中模空间的维数公式，等等。这些重要定理都能归“根”到 Bott 周期律，足见 Bott 周期律的深度，足见同伦思想的力量。Bott 周期律是关于稳定酉矩阵“群”的“同伦”性质。在数学上，群即对称。因此 Bott 周期律代表的是“对称背后的同伦”的数学思想，它是“自然背后的方程”和“方程背后的对称”的更深发展。这些是第十一章要讲的主题。

Riemann 的“内在空间”思想在数学中发展得很广。在现代数学中，最一般的内在空间概念叫“拓扑空间”。它的定义“不需要”事先定义实数的概念，“不需要”事先定义坐标的概念，是“完全内在的”。拓扑空间的概念包含了极其广泛的数学对象：可以是光滑的，也可以是有奇点的；可以是有限维的，也可以是无穷维的；可以是连续的，也可以是离散的。拓扑空间可以来自几乎所有的数学分支。拓扑空间的概念实质上代表一种思维方式——用“内在空间”的思维去看数学对象，发现它们之间的“隐秘内在联系”。

关于拓扑学对 20 世纪下半叶数学发展的中心意义，菲尔兹奖和沃尔夫奖获得者 S. P. Novikov 这样评论道：“The wealth of ideas introduced by topology and by the great mathematicians who worked in topology placed it in the centre of world mathematics from the mid 20th century. For example, between 1950 and 2002, a total of 44 Fields Medals were awarded at World Congresses to active young mathematicians under 40 years of age and recognised as the most outstanding. Among these were Serre (1954), Thom (1958), Milnor (1962), Atiyah (1966), Smale (1966), Novikov (1970), Quillen (1978), Thurston (1982), Donaldson (1986), Freedman (1986), Witten (1990), Vaughan Jones (1990), Kontsevich (1998), whose central mathematical contributions during those years relate to topology; also Kodaira (1950), Grothendieck

(1966), Mumford (1974), Deligne (1978), Yau (1982) and Voevodsky (2002), whose work is at the crossroads of the ideas of topology, algebraic geometry and homological algebra. ”(引自 [53] 第 804 页. 中译文：由拓扑学以及在拓扑学中工作的伟大数学家们引进的丰富的思想使得拓扑学从 20 世纪中期开始处于世界数学的中心。例如，在 1950 年到 2002 年之间，总共有 44 个菲尔兹奖在国际数学家大会上授予年龄在 40 岁以下的公认最杰出的活跃的年轻数学家。其中有 Serre (1954)，Thom (1958)，Milnor (1962)，Atiyah (1966)，Smale (1966)，Novikov (1970)，Quillen (1978)，Thurston (1982)，Donaldson (1986)，Freedman (1986)，Witten (1990)，Vaughan Jones (1990)，Kontsevich (1998)，他们在这些年间的首要数学贡献与拓扑学有关; 还有 Kodaira (1950)，Grothendieck (1966)，Mumford (1974)，Deligne (1978)，Yau (1982) 和 Voevodsky (2002)，他们的工作是在拓扑、代数几何和同调代数的思想交汇处。)

由于作者的专业所限，选题难免有不全之处，敬请读者谅解。

范后宏

2018 年 4 月于北京大学

目　录

第一章　数学语言与数学思维方式 ······ 1
第一节　数学语言的真善美 ······ 1
第二节　形、数、逻辑、自然理性 ······ 6
第二章　Euclid 公设 ······ 8
第一节　Euclid 第一公设 ······ 8
第二节　Euclid 第二公设 ······ 16
第三节　Euclid 第三公设 ······ 17
第四节　Euclid 第四公设 ······ 18
第五节　Euclid 第五公设 ······ 20
第三章　中国古代数学 ······ 23
第一节　算法的价值观和传统 ······ 23
第二节　几何计算的传统 ······ 26
第三节　几何论证的经验性 ······ 28
第四章　奇妙的虚数 ······ 32
第一节　虚数的存在 ······ 32
第二节　虚数的妙 ······ 33
第五章　自然背后的方程 ······ 37
第一节　形与数的统一 ······ 37
第二节　数学与自然理性的统一 ······ 38
第三节　Newton 的数学工作 ······ 41
第四节　Leibniz 的数学工作 ······ 43
第五节　Newton 与 Leibniz 微积分的特色比较 ······ 45
第六章　经典数学的发展 ······ 47
第一节　Euler 的数学工作 ······ 47
第二节　Fourier 展开 ······ 53
第三节　Gauss 的承前启后 ······ 56
第四节　Cauchy 的经典分析 ······ 68
第五节　二维拓扑 ······ 71
第六节　高维乘积 ······ 73
第七章　经典数学思维方式遇到的困难 ······ 80

第一节 根式可解性 ······ 80
第二节 多值函数 ······ 81
第八章 方程背后的对称 ······ 86
第一节 三次、四次方程背后的对称 ······ 86
第二节 十一次单位根背后的对称 ······ 94
第三节 Galois 的正规子群套 ······ 102
第九章 内在空间新思维 ······ 109
第一节 Riemann 的新思维 ······ 109
第二节 空间的隐秘内在联系 ······ 114
第十章 深奥的球面 ······ 116
第一节 Poincaré 的新不变量 ······ 116
第二节 Poincaré 问题 ······ 117
第三节 Milnor 怪球 ······ 123
第十一章 对称背后的同伦 ······ 125
第一节 同伦简化复杂性 ······ 125
第二节 矩阵群的同伦群 ······ 126
第三节 Atiyah-Singer 指标定理 ······ 130
参考文献 ······ 133
索引 ······ 137

第一章　数学语言与数学思维方式

第一节　数学语言的真善美

第一眼看数学，数学是一行行符号，像一种语言。那么，数学语言与通常语言有什么本质不同呢？

通常语言

数学是大自然的语言。

Mathematics is the language of nature.

数学语言是数学存在的家。

Mathematical language is the home of mathematical existence.

数学语言是真善美的统一。

Mathematical language is the unity of truth，goodness and beauty.

数学语言

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1}} + 1 = 0$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\text{素数}}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$\int_M K d\sigma = 2\pi e(M)$$

$$y^2 = x^3 + 17$$

$$Gal(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = S_5$$

$$H^p(M) \cong H_{n-p}(M)$$

$$z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$$

$$\pi_{n+2}(U) \cong \pi_n(U)$$

$$\mathrm{dimKer}D - \mathrm{dimCoker}D = \langle Th^{-1}(Ch(d(E, F, \sigma(D))))Td(M), [M]\rangle$$

数学语言与通常语言有什么本质不同呢?

一、 数学语言的第一特征是形式逻辑自洽的

现代数学语言中的每个规范术语都是在某个数学公理体系中被严格定义的。Hilbert 在 1904 年提出一个数学公理体系在数学中能存在的必要条件是：它的所有公理在形式逻辑推理过程中是自洽的，也就是说，不可能同时推出一个命题和它的否定命题。因此，用数学语言，就不可能推出形式逻辑上矛盾。

康德在《未来形而上学导论》(1783) 中写道："这里有一种庞大的，并且已得到证明的知识，它现在就已经具有值得惊赞的规模，并且预示着未来不可限量的发展；它具有完全无可置疑的确定性，也就是绝对的必然性，因此不依据任何经验的根据，从而是一种纯粹的理性产物，此外它又完全是综合的。"①

在数学史上，有的数学对象在刚开始时是数学家的大胆想象，可能与通常经验不符合，例如虚数、非欧几何。但只要定义它们的数学公理体系在形式逻辑上是自洽的，它们都可以被看作是"数学存在"。这样，数学家就可以不受已有体系的思维束缚，大胆地运用想象力，发现新的形式逻辑自洽体系。数学思维可以充分展现人类的本质力量之一——创造力。

二、 数学语言的第二特征是数学语言有不可思议的魔力

不可思议的是，通过数学语言，几个符号串就能准确地表达大自然中一些最基本规律，如:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

$$E = mc^2$$

$$S = 4\pi\left(r - \frac{G}{3c^2}M\right)^2$$

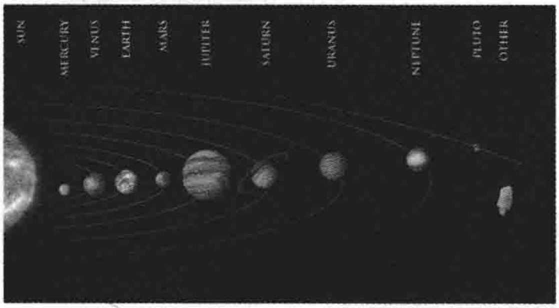
$$dF = 0, \quad d * F = J$$

$$d_A F_A = 0, \quad d_A * F_A = J$$

$$\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = \sqrt{-1}\hbar$$

① 参见 [26] 第 281 页。

上面第一个是 Newton 万有引力公式；第二个是 Einstein 狭义相对论中质能公式；第三个是 Einstein 广义相对论中质量球的表面积公式；第四个和第五个是现代数学形式的 Maxwell 方程；第六个和第七个是现代数学形式的 Yang-Mills 方程；第八个是量子力学中位置与动量的关系方程。



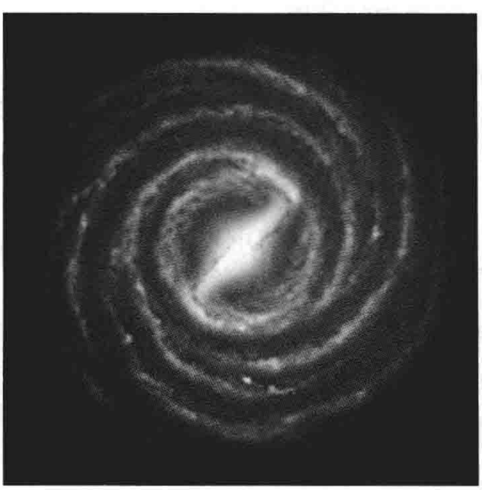
太阳系中的行星

通过数学语言，可以研究太阳系。大自然背后有数学方程，这是 Newton 的伟大发现。

Issac Newton(公元 1642—1726/1727) 在《自然哲学之数学原理》(1687) 中写道：“用前两编中数学证明的命题由天文现象推演出使物体倾向于太阳和行星的重力，再运用其他数学命题由这些力推算出行星、彗星、月球和海洋的运动。”[52]

通过数学语言，可以研究银河系。

Issac Newton



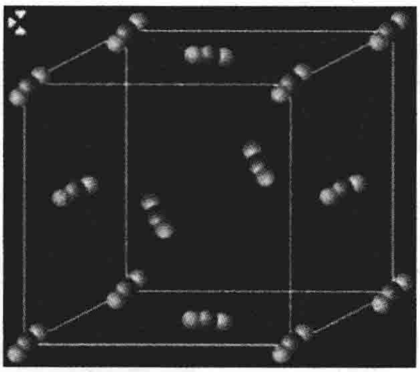
银河系

早期宇宙

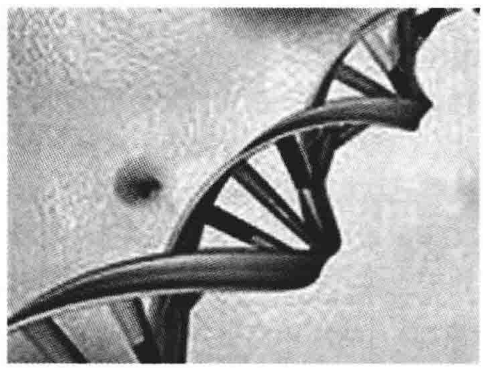
通过数学语言，可以研究约 13 亿年前两个黑洞合并产生的引力波、130 亿年前早期宇宙。光走 130 亿年的距离的数量级达 10^{26} 米。不可思议的是，在如此大的空间中数学语言仍然能做到精确的描述和计算。

物理中量子力学原理告诉人们不可能用日常语言来确切地表达微观世界的规律。要准确地表达微观世界的规律，只能用数学语言。通过数学语言，可以研究原子、电子、夸克 (直径数量级上限为 10^{-18} 米)，等等。同样不可思议的是，在如此小的空间中用数学语言能做到精确的描述和计算，而且只能用数学语言才能做到。

数学语言的巨大力量体现在物理学中。数学语言也可有力地运用到所有自然科学之中。



分子三维空间结构



DNA 双螺旋结构

通过数学，可以研究化学中一些问题，例如: 晶体结构 (与 1985 年诺贝尔化学奖的工作有关)、核磁共振的谱学 (与 1991 年诺贝尔化学奖的工作有关)、化学计算 (与 1998 年诺贝尔化学奖的工作有关)、分子三维空间结构。

通过数学，可以研究化学中富勒烯 C_{60} 的独特的几何结构: 60 个顶点，90 个边，32 个面，其中 12 个为正五边形，20 个为正六边形。(C_{60} 的发现获 1996 年诺贝尔化学奖。) 通过数学，可以研究分子三维空间结构手性的拓扑性质。(2001 年诺贝尔化学奖工作与分子手性有关。)

通过数学，可以研究医学和生物学中一些问题，例如: DNA 双螺旋结构的拓扑性质 (DNA 双螺旋结构的发现获 1962 年诺贝尔生理学或医学奖)。

通过数学，可以研究神经元的脉冲传导过程 (与 1963 年诺贝尔生理学或医学奖的工作有关)、视觉系统侧抑制作用 (与 1967 年诺贝尔生理学或医学奖的工作有关)、断层扫描技术 (与 1979 年诺贝尔生理学或医学奖的工作有关)、DNA 链中碱基序列的测定 (与 1980 年诺贝尔化学奖的工作有关)、遗传的统计规律、种群生长模型，等等。

数学在各种工程技术中有广泛的应用。

数学可以用于研究信息科学技术中一些问题，例如：场效应晶体管的制造工艺与模拟、电路的逻辑设计与物理设计。

数学可以用于机器证明、密码学、信息压缩，等等。

数学可以用于研究地球科学、航空、航天等高技术中一些问题，例如：石油勘探中卫星图像的分析和处理、气象预报、飞行器设计与数值模拟、卫星控制，等等。

数学语言不仅可以用于自然科学和工程技术，还可以用于社会科学与人文学科。

通过数学，可以研究经济学中一些问题，例如：资源最优配置 (与 1975 年诺贝尔经济学奖的工作有关)、一般经济均衡的存在性 (与 1972 年和 1983 年的诺贝尔经济学奖的工作有关)、期权定价公式 (与 1997 年诺贝尔经济学奖的工作有关)、汇率、物价与利率分析 (与 2003 年诺贝尔经济学奖的工作有关)，等等。

通过数学，可以研究语言学中一些问题，例如：自然语言逻辑结构分析、人的语音结构分析，等等。通过数学，可以研究艺术中一些问题，例如：雕像中各部分比例的和谐、音乐中和声、分形艺术，等等。

三、 数学语言的第三特征是数学美

数学美到底是什么？这要从多个美学观点来体会。

毕达哥拉斯认为美表现于对称与和谐。数学美表现于形的对称、数的和谐、逻辑的自洽。例如：圆、$(3,4,5)$、$e^{i\pi}+1=0$、Euclid 几何公理体系的逻辑自洽，等等。

苏格拉底认为美与善是一致的。数学美与数学的广泛应用是一致的。例如：Newton-Leibniz 公式、Fourier 级数、中国古代《九章算术》中的线性方程组的消元算法、厄米矩阵的对角化、群的概念、拓扑空间的概念，等等。

黑格尔认为美是理念的感性显现。数学美是自洽逻辑体系的数形显现。例如：欧氏几何的逻辑体系、复数的逻辑体系、四元数的逻辑体系，等等。

马克思认为美是人的本质力量的对象化。数学美是人的本质力量的精确符号化。例如：古代数学中的 Euclid 几何公设、中国汉代《九章算术》中的解线性方程组的消元法、Archimedes 的球体积公式；近代数学中的 Newton-Leibniz 公式、Euler 发现二次互反律、Gauss 曲率内蕴性；现代数学中的 Galois 群、Riemann 曲率、Poincaré 同调群、陈省身示性类、Bott 周期律、Atiyah-Singer 指标定理、Milnor 怪球、Deligne 对 Weil 猜想的证明，等等。这些数学成就都是人类的本质力量在那个时代的代表，它们已经转化成精确符号了。这些“精确符号”将被人类一代接着一代传承下去，获得了“永恒”。这就是“数学特有的永恒美”。