普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

大学数学（经济管理类）II

线性代数

主编　苗宝军　史艳华

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

大学数学(经济管理类)II

线性代数

主　编　苗宝军　史艳华

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书涵盖了教育部制定的大学本科线性代数教学基本要求的内容，汲取了现行线性代数教材的优点，结合教育部对高校转型发展的实际需求和多年来经济、管理类相关本科专业教学实践中的经验、成果和体会，在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成. 本教材具有以下特点：① 以线性代数基本知识模块化的应用为主线，立足于线性代数基本理论和思想方法的综合运用；② 强调知识的可理解性和应用性相结合，注重专业理论素养的培养，突出掌握知识的实效性；③ 兼顾传统知识结构体系和部分考研学生的需求，适当提高了部分重点知识的深度，增加了理解问题的注意事项和模块化测试题；④ 每一模块有相对的独立性，具备一定的可塑性，可根据各类专业其学时的特点和学生的需要选择相应模块的教学内容和习题；⑤ 易教易学，深入浅出，突出重点，适合启发式教学方法和翻转课堂教学模式实践的运用.

本书共 6 大模块，分别为行列式、矩阵、线性方程组、向量组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换. 各模块都包含典型例题和少而精的有针对性子模块习题，以及针对每一模块的综合测试题.

本书适合作为普通高校经济、管理类专业的教材，也可供成人本科教育、高等职业教育选用.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学：经济管理类. Ⅱ，线性代数/苗宝军，史艳华主编. —北京：科学出版社，2016. 9

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

ISBN 978-7-03-049680-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①苗… ②史… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材

Ⅳ. ①O1②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 203167 号

责任编辑：张中兴　胡海霞／责任校对：张凤琴

责任印制：白　洋／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 9 月第　一　版　开本：787 × 1092 1/16

2016 年 9 月第一次印刷　印张：39

字数：973 000

定价：95. 00 元

丛书序言

Preface to the series

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求, 结合编者多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括: 《高等数学 (理工类)(上、下册)》、《线性代数 (理工类)》、《概率论与数理统计 (理工类)》、《高等数学 (文科类)》、《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道, 高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程, 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业, 而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前, 关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多, 这类教材主要以经典数学的理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是, 这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的, 这对于非数学类专业学生学习数学课程来说不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外, 这类教材几乎通用于所有的非数学类专业, 而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此, 本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化, 将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块, 不同的专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象, 根据各个学科专业的特点, 针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题, 以突出教学内容的应用性, 使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性, 能广泛适用于非数学类各专业的学生, 可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出, 易教易学, 突出重点, 强调案例式教学方法.

当然, 上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷, 本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

丛书编委会

2016 年 6 月

前　　言

Preface

本书参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业线性代数的教学基本要求, 结合教育部对高校转型发展的实际需求和多年来经济、管理类相关本科专业教学实践中的经验、成果和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为高等学校经济、管理类等各本科专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书.

线性代数是一门重要的基础课, 对学生的逻辑思维、抽象综合及应用创新能力的培养, 以及后续课程的学习起着非常重要的作用, 线性代数也有着非常广泛的应用背景, 在工业、农业、商业、军事、科学研究、工程技术、经济管理等几乎所有领域都有重要应用. 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来线性代数的基本思想和方法在经济、金融、保险、生物、医学和管理等许多领域中得到了广泛应用和深入发展. 正是这种广泛的应用性, 使得线性代数成为高等学校大部分专业开设的一门重要必修课. 通过本课程的学习, 学生可以掌握线性代数的基本理论和基本思想方法, 为各专业知识的进一步深入学习或应用打下良好的基础.

关于经济、管理类线性代数的教材或教科书已非常多, 这类教材主要以线性代数的基本理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的线性代数概念和方法. 随着信息技术的快速发展、大数据时代的来临、高校转型发展实际, 人们需要采用线性代数的思想和方法分析和解决实际问题的应用创新需求也越来越大, 这就为线性代数学科发展和教学内容的改革提出急迫的挑战. 为此, 本书力求在以下五个方面做一些尝试:

(1) 以线性代数基础知识为基础, 以基本知识模块化的应用为主线, 立足于线性代数的基本理论和思想方法的综合运用.

(2) 强调知识的可理解性和应用性相结合, 注重专业理论素养的培养, 突出掌握知识的实效性.

(3) 兼顾传统知识结构体系和部分考研学生的需求, 适当提高部分重点知识的深度, 增加理解问题的注意事项和模块化测试题, 供学生自主学习和检测掌握知识的情况.

(4) 每一模块有相对的独立性, 具备一定的可塑性, 能广泛适用于高等院校经济、管理类等相关本科专业, 可根据各类专业学时的特点和学生的需要, 有选择性地选择相应模块的教学内容和习题.

(5) 易教易学, 深入浅出, 突出重点, 适合启发式教学方法和翻转课堂教学模式实践的运用.

本书共分 6 大模块, 主要内容包括：行列式, 矩阵, 线性方程组, 向量组, 相似矩阵及二次型，线性空间与线性变换. 各模块包含典型例题和少而精的有针对性子模块习题, 以及针对每

一模块的综合测试题.

本书模块 1、模块 3 和模块 5 初稿由史艳华执笔, 模块 2、模块 4 和模块 6 初稿由苗宝军执笔. 苗宝军负责全书的统稿和定稿.

本书在编写过程中参阅和借鉴了大量的现行教材和著作, 在此向有关作者表示由衷的感谢和真诚的谢意!

由于编者水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 敬请广大同行、读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目 录
Contents

模块1
行　列　式

行列式是线性代数中的一个重要概念. 它最初出现在解线性方程组的问题中, 后来从方程组的求解中分离出来, 形成了独立的行列式理论. 本模块先从二元线性方程组的求解公式出发, 引出二阶行列式的概念, 然后类似定义三阶行列式, 进而推广到 n 阶行列式, 再介绍行列式的性质、计算方法、按行按列展开公式等内容.

子模块 1　行列式的概念

一、 二阶、三阶行列式

用消元法求解一般形式的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

用 a_{21} 和 a_{11} 分别乘以上式两个方程的左右两端, 然后将得到的两个方程相减, 可消去未知量 x_1, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

类似地, 可消去未知量 x_2, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 可得方程的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

注意到 (1-2) 式中的分子、分母都是四个数两两相乘再相减得到. 为了方便记忆, 我们引入二阶行列式的概念.

定义 1　称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**, 它表示两项的代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{ij}\,(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素或元**, 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行指标**, 第二个下标 j 称为**列指标**, 表明该元素处在第 i 行第 j 列, 也称该元素为行列式的 (i,j) 元.

该二阶行列式, 可采用对角线法则记忆, 如图 1-1 所示.

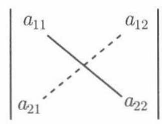

图 1-1

其中实线称为**主对角线**, 主对角线上的元素称为**主对角元**, 虚线称为**副对角线**, 副对角线上的元素称为**副对角元**. 因此二阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积.

利用二阶行列式的定义, 二元线性方程组的解 (1-2) 可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},$$

这里 D 称为二元线性方程组的**系数行列式**, 而 D_1, D_2 分别是右端常数项分别替换系数行列式的第一列、第二列得到的. 那么对于 n 阶行列式是否有类似的结论呢？我们将在后面进一步讨论.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-1\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

所以,

$$x=\frac{D_1}{D}=3,\quad y=\frac{D_2}{D}=-1.$$

类似于二阶行列式, 我们可得到三阶行列式的定义.

定义 2 称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**, 它表示 6 项的代数和,

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上式表明三阶行列式不仅是 6 项的代数和, 而且每一项都是处在不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 它也可以用对角线法则记忆, 三阶行列式等于三条实线上三个元素的乘积之和再减去三条虚线上三个元素的乘积之和 (图 1-2).

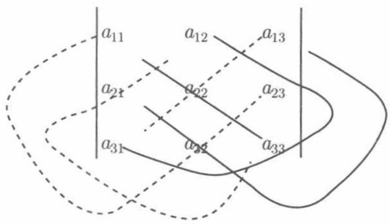

图 1-2

例 2　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解　由三阶行列式的对角线法则,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)\times(-1) + 0\times 0\times 1 + 1\times 1\times 2 - 1\times(-1)\times 1$$
$$- 0\times 1\times(-1) - 2\times 0\times 2 = 5.$$

例 3　求方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的根.

解　根据三阶行列式的对角线法则, 左端的行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6,$$

因此可解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

为了给出 n 阶行列式的定义, 我们先介绍排列、逆序和对换的概念及性质.

二、 排列、逆序和对换

定义 3　将 n 个不同的元素 $1, 2, \cdots, n$ 排成的有序数组, 称为一个 n **级排列**, 简称**排列**.

如 1234 是一个 4 级排列, 51324 是一个 5 级排列. 那么对于 n 个不同的元素的排列, 到底有多少种呢? 根据全排列的计算方法, 不难得到 $n!$ 个.

一般地, 我们将一个 n 级排列记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

定义 4 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 若某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面, 就称它们构成一个**逆序**, 这个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

如排列 51324 的逆序是 51, 53, 52, 54, 32, 则 $\tau(51324)=5$; 排列 41325 的逆序是 41, 43, 42, 32, 则 $\tau(41325)=4$.

一般地, 计算一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数的方法为: 依次计算与每个元素 $i_s(s=1,\cdots,n)$ 构成逆序的个数, 再相加, 即依次记录排在 i_s 前面且比 i_s 大的元素的个数为 t_s, 则

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

定义 5 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列.**

通过上面的讨论, 可知 51324 为奇排列, 41325 为偶排列.

定义 6 在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中, 如果只将 i_s 和 i_t 对调, 而其余的顺序不变, 得到了另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$, 这样的变换称为一次**对换**.

如排列 51324 是 41325 经过一次 5, 4 的对换得到的, 但通过前面的讨论可以看出, 奇排列 51324 经过这样的一次对换后变成了偶排列 41325, 奇偶性发生了变化.

事实上, 有以下定理.

定理 1 任意排列经过一次对换后奇偶性发生改变.

证明 (1) 首先讨论相邻两个数对换的情形.

设排列为 $i_1 i_2 \cdots i_l a b j_1 j_2 \cdots j_m$, 将相邻两个数 a 和 b 作一次对换, 则排列变为: $i_1 i_2 \cdots i_l b a j_1 j_2 \cdots j_m$. 显然在这次对换中, $i_1 i_2 \cdots i_l$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_m$ 中数的顺序没有改变, 因此逆序数也没有发生改变. 但是对于 a 和 b 来说, 经过一次对换后, 若 $a<b$, 新排列的逆序数增加 1; 若 $a>b$, 新排列的逆序数减少 1 个. 所以排列的奇偶性发生改变.

(2) 再讨论不相邻的两个数对换的情形.

设排列为: $i_1 i_2 \cdots i_l a j_1 j_2 \cdots j_m b k_1 k_2 \cdots k_r$. 将$a$和$b$作一次对换, 则排列变为: $i_1 i_2 \cdots i_l b j_1 j_2 \cdots j_m a k_1 k_2 \cdots k_r$. 注意到, 新排列可以看作先将 a 依次与 $j_1,\cdots,j_m$ 作 m 次相邻的对换变成排列: $i_1 i_2 \cdots i_l j_1 j_2 \cdots j_m a b k_1 k_2 \cdots k_r$, 然后将数 b 依次与它前面的数 $a, j_m, \cdots, j_1$ 作 $m+1$ 次相邻两数的对换而得到. 因此, 对换不相邻的数 a 和 b(中间有 m 个数), 相当于作 $2m+1$ 次相邻两数的对换. 由情形 (1) 知, 排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次. 从而新排列的奇偶性发生了改变.

三、 n 阶行列式的定义

定义 7 由 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列, 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n **阶行列式**, 它是位于不同行不同列的 n 个元素 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 乘积的代数和, 每一项的符号由 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 确定, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,

因此这样的乘积共有 $n!$ 项, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

简记作 $D = \det(a_{ij})$, 其中 a_{ij} 表示行列式的 (i, j) 元.

特别地, 当 $n = 1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$, 注意不要与绝对值符号相混淆.

注　如果按第 1 列, 第 2 列,$\cdots$, 第 n 列的顺序依次取每一项乘积的元素, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

主对角线以下 (上) 的元素全为 0 的行列式称为**上 (下) 三角形行列式**, 主对角线以外的元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**.

例 4　利用行列式的定义证明

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

证明　由定义知

$$D_4 = \sum_{4!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

由于当 $j > i$ 时, $a_{ij} = 0$, 所以可能不为 0 的项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 必须满足 $j_i \leqslant i (i = 1, 2, 3, 4)$, 而同时满足该条件的只有一项 $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$, 因此

$$D_4 = (-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

例 4 的结论可以推广到一般的 n 阶下三角行列式的计算, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

类似地, 上三角行列式和对角行列式的值也有同样的结论成立.

例 5 证明 n 阶 (反对角) 行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & d_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ d_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

证明 由定义知

$$D=\sum_{n!}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

对于乘积中的第一项, 只有 $j_1=n$ 才可能不为零, 对于第二项, 只有 $j_2=n-1$ 才可能不为零, 依次类推, 对于第 n 项, 只有 $j_n=1$ 时可能不为零. 因此所有 $n!$ 项中只剩下一项, 即

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

子模块 1 习题

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \tan\theta & \sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 当 x 取何值时,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq 0.$$

3. 求下列排列的逆序数.

(1) 4132; (2) 3675241; (3) $n(n-1)\cdots 21$; (4) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

4. 在 5 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中, 下列项应取什么符号?

(1)$a_{21}a_{33}a_{45}a_{12}a_{54}$; (2)$a_{22}a_{31}a_{43}a_{15}a_{54}$.

5. 写出 4 阶行列式中含因子 $a_{13}a_{22}$ 的项, 并指出正负号.

6. 根据行列式定义, 分别写出行列式 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中含 x^4 的项和含 x^3 的项.

7. 根据行列式定义, 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (n 阶).

子模块 2　行列式的性质

在学习了行列式的定义之后, 我们发现用行列式的定义去计算行列式是不太现实的, 因为它是 $n!$ 项的代数和, 计算量非常大, 因此它只适用于行列式的元素有大量 0 的情形或理论的推导. 接下来有必要进一步研究行列式的性质来简化行列式的计算.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

一、 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证明　记 $D^{\mathrm{T}} = \det(b_{ij})$, 则 $b_{ij} = a_{ji}$. 根据行列式的定义

$$D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

将 D^{T} 按列的顺序取元素, 则

$$D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D.$$

由性质 1 可知, 行列式的行和列的地位是同等的, 行所具有的性质, 列也同时具有.

性质 2　互换行列式的两行 (或两列) 元素, 行列式变号.

证明　设 $D = \det(a_{ij})$. 交换行列式 D 的第 s 行与第 t 行元素, 得到的新行列式记为 $\bar{D} = \det(b_{ij})$, 则对于所有的 j, 都有 $b_{ij} = a_{ij} (i \neq s, t), b_{sj} = a_{tj}$, $b_{tj} = a_{sj}$, 则

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} b_{1j_1} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} = -D. \end{aligned}$$