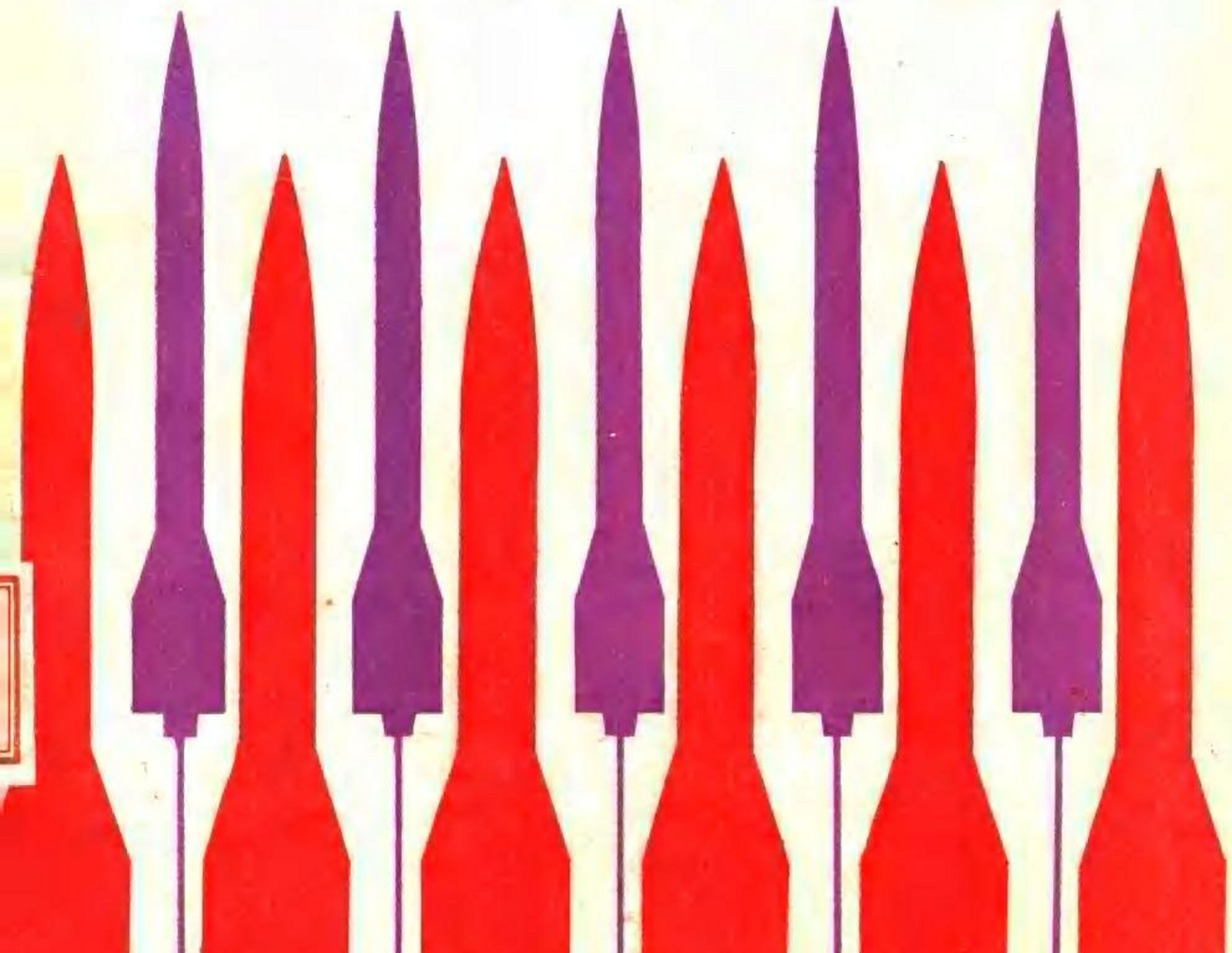
火箭结构力学

〔苏〕Л.И.瓦拉布赫 К.С.科列斯尼科夫 等 著

詹世斌 邸晓华 傅子智 译

国防工业出版社



序（摘　译）

目前，火箭技术的进展异常迅速，而且涉及的面也很广泛，因而大大地促进了国民经济许多部门的相应发展。火箭技术的成就也直接反映了许多有关科学领域的成就。

除了军事目的之外，火箭还越来越多的用于对空间和其它星球的研究。例如，1961年，加加林乘宇宙飞船“东方”号完成了围绕地球的飞行；1966年，自动站“月球-9”号在月球上进行了一次软着陆，并向地球发回了月球表面状况的图象；1967年，自动驾驶的行星际站“金星-4”也成功的在金星表面着陆。当前，已有大量的人造地球卫星和行星际站正在对地球和太阳系的外层空间进行探索。

在火箭技术和空间研究发展的每一阶段，都有许多复杂的问题需要靠科学技术来解决，如火箭强度就是其中一个很重要的方面。

解决现代火箭的强度问题，是以先进工业部门，首先是以造船和飞机结构的成就为基础的。

对从事火箭强度工作的工程师的要求是非常高的。他们应当了解变形体力学基础知识，结构力学、弹性结构动力学以及传热学等知识。此外，在分析不同结构的工作时，还应当能够迅速而准确地进行初步设计计算和最终验算。

关于弹道式导弹的强度问题，就用这本《火箭结构力学》，以最少的篇幅作一综合论述。阅读本书时，应当具备材料力学、振动理论和物理学的有关知识。

连续介质力学、动力学、传热学以及外载荷的计算问题，不是全都包括在结构力学内的。在早期的结构力学中，主要任务是对桥梁及不同工程结构的杆系进行计算。随着造船业的发展，又出现了另一类结构力学，如帕普科维奇所著的《船舶结构力学》。由于其中引入了平板的弯曲和稳定性理论，故又可叫作“应用弹性理论”。飞机结构力学的基本特点，是引进了薄壁杆件的理论。

自然，火箭结构力学在计算火箭强度中，也有其自身的固有特点。主要是研究结构与温度、动力和静力计算之间的相互关系。为了迅速和准确的确定火箭结构的基本尺寸，工程师应当具备全面的知识，以便在整个计算过程中都能进行具体计算。当然，计算工作也不能过分细化，否则会花费不少宝贵时间。因此，在研究结构问题时，应当进行简化，用近似方法计算强度。这一点也是本书讨论问题的基础。

本书共分三篇。

第一篇，是讨论变形体力学、旋转壳体理论、薄壁结构的动力计算和温度计算。在写这部分时，作者花了很大的精力详尽地分析了所有有关的理论资料，从而为系统地建立火箭强度计算的理论奠定了基础。一般辅助性的理论知识很少引入，因为这些知识是从事火箭专业的工程师必须具备的。当然，对研究壳体理论、火箭动力学和薄壁结构热计算的专业人员来说，本篇的相应章节也可作为辅助内容参考。

第一章，详述了变形体力学的基本概念。其中，还借用了理论力学的概念和方法，也

就是说，平衡方程和边界条件是根据可能位移（虚位移）原理导出的。这样作是为了给读者研究下一章的内容做准备（在下一章，将根据力学的变分方程论述壳体的近似理论）。而且，对塑性力学理论的基本概念也给予了适当的阐述。最后一节是讲复合介质，目的是为了使读者熟悉这种介质的某些近似理论的概念。

第二章，导出了旋转壳体理论的基本微分方程，并给出了积分的方法。而重点是阐述壳体在不同载荷和各种支承条件下工作的特点，以及以无力矩理论为基础的计算方法。最后两节是讨论壳体的承载能力和稳定性问题。本章所述的基本概念和关系式，在以后近似计算火箭结构元件稳定性和承载能力的章节中都会用到。

第三章，是讲结构的动力计算问题，包括自然振动频率、振型和动载荷的计算方法，以及液体晃动问题。在研究火箭体的纵向和横向振动时，采用了非均匀弹性直杆作为计算图。贮箱液体的晃动计算就是按最小容积确定自然振动频率和载荷。

第四章，是讨论薄壁结构元件的温度场的计算方法和火箭结构温度场的计算特点。同时，也简要地叙述了结构与空气流和发动机冷却剂进行换热的条件，介绍了导热方程和边界条件，而且还建立了结构导热过程的数学模型。其中，对导热问题的解法也作了分析。

第二篇，是讨论火箭强度的具体计算。特别值得指出的是给出了设计计算的简化方法，即初步设计阶段的计算方法。完成这些计算的质量和速度，对所设计结构的完善程度是有决定影响的，因为在最后校核计算时，只能根据已有的图纸进行，亦即只可能校核火箭的强度是否足够。

设计计算的质量，在很大程度上是取决于火箭的计算图。因此，在本篇各章的开头，都对计算图的主要特点作了扼要叙述。所给的结构图，是为了有助于读者从材料强度的工程观点对火箭结构有所了解。

第五章，介绍了火箭的计算图、计算情况、载荷和安全系数。还引入了确定载荷的概念。根据这种概念（如乾部段● 的载荷是轴向压力；贮箱的载荷是轴向力和流体压力，等等）可以确定结构的计算图。

第六章，是讨论火箭贮箱的各种结构形式和载荷，以及贮箱及其元件的计算。重点是对受力式圆筒贮箱进行了分析。另外，也简述了球形和环形贮箱的结构特点，以及光滑贮箱和网格式贮箱结构的特点及其计算。

第七章，介绍了某些乾部段的结构形式，并给出了桁条、纵梁、波纹加强件以及过渡架、发动机架和受外压力壳体的计算方法。

第八章，是讨论火箭弹头在再入大气层期间的近似计算方法，并考虑了结构的受热影响。同时，也讨论了壳体的强度和稳定性计算以及在外压力下稳定裙的计算问题。最后一节，对有关卫星和宇宙飞船的整流罩结构以及弹头支撑结构的计算作了介绍。

第九章，是讨论火箭典型结构元件（承力隔框、压力容器、导管和波纹管）的强度计算问题。

● 所谓乾部段是贮箱以外的弹体各部段的统称，如发动机舱、箱间段、整流罩、仪器设备舱等。（见第七章）——译者注

第三篇，是论述火箭发动机的强度问题。描述的方法与第二篇相同。

第十章，是讨论液体推进剂火箭发动机燃烧室的典型结构形式和所受的载荷，并详述了液体推进剂火箭发动机壳体温度和应力-应变的计算方法。

第十一章，是讨论固体推进剂火箭发动机温度场的计算，特别是有关这种燃烧室强度计算的某些问题。如同液体推进剂火箭发动机一样，固体推进剂火箭发动机燃烧室的动力学问题，只作了定性的论述。

本书没有讨论宇宙飞船的强度问题，因为它们有自身的计算图，而且强度要求也与运载火箭不完全相同。

书末列出了大量文献目录，读者可以从中找到所感兴趣的更完整的论述。

绪　论(摘　译)

火箭技术在人类活动的许多最新和最先进的发展领域中占有突出的地位。二十世纪后期，最难忘的光辉成就是开始了准确地运用火箭技术来征服宇宙。这些成就的取得，只有当我们的知识提高到一定水平以后才有可能，因为它们与复杂的科学研究和先进的工业技术是紧密相关的。

现在，总的趋向是要加强各门独立科学间的相互联系，特别是火箭结构力学问题。如果在不久以前，人们把结构强度、振动理论、传热学和空气动力学作为独立的学科来看待的话，那么，现在在处理若干火箭技术问题时，就需要把它们密切结合起来加以考虑。对导弹工程师来说，不仅应当熟知这些学科，而且还要十分清楚地了解这些学科之间的关系。因为只有这样，才能准确自如的判明每一个力学方面的问题。

不仅如此，合理的分析方法和步骤（不仅是火箭技术）也是很重要的。一般地说，每一项工程计算和每一种技术科学的研究，都包含以下三个步骤：

1．选择计算图。在这一阶段，要讨论和分析实际对象的特点，这是所要研究的最本质的问题；

2．分析计算图。这时借助于逻辑学（通常是以数学符号的方式）来阐明反映实际对象的计算图的性质；

3．从计算图返回到实际对象，并建立用于计算的最终公式。

关于计算图的分析和实际结构可靠性的评定，利用普通教程通常是作不到的（第二步）。十分明显，现代工程结构的种类是多种多样的，必须要按工程专业加以区分。

计算图，只是在某些专业学科内才有所论述。这类学科叫做“结构力学”：有建筑结构力学、焊接结构力学、船舶结构力学、飞机结构力学等等。在这些学科里，都是采用典型计算图进行分析的。

选择计算图（第一步）和估计安全系数（第三步）的问题，属于另一学科的内容，这一学科叫做“强度学”：有结构强度、船舶强度、飞机强度等等。

在飞机强度学里，是把典型组件（如机身）作为连续体进行论述的。首先，根据每一种工作条件和基本载荷类型作出计算图，尔后，根据分析结果评定结构效率。具体地说，就是用某一安全系数估计强度。安全系数的大小，取决于飞机的类型、结构和技术条件的要求。

但是，有关强度学的著作还是不多的。这首先可能是由于问题的复杂性所造成的，因为强度学与结构力学除计算方法不同外，还要研究与结构特性、结构工艺和使用性能有关的整个问题。

数学理论在强度计算中虽是很重要的，但一般都认为用单纯的数学方法计算应力实际上并不必要，而可以通过必要的假设进行简化计算，由此造成的误差均可在计算中引入安全系数加以考虑。因此，合理地选择安全系数是非常重要的。但总的来说也是极其困难

的，因为在确定安全系数时，需要考虑当代的技术水平和实际经验（如对类似结构已积累的经验），以及其它的后果，包括结构的破坏和许多其它情况等。

上面所述问题，在火箭技术上也同样存在。唯一的区别是需要使这些在方法上和技术上的问题得到合理的解决。现代的弹道式导弹是由一次使用的薄壁结构组成的，我们绝不能只根据弹性理论来计算它的元件，在许多情况下，还需要考虑塑性变形和局部失稳。但所有这些情况必然会使问题复杂化，因此，需要合理地协调相互间的关系，并使之最佳化。

如果火箭强度计算仍采用传统的结构力学原则，那么，就会限制读者的眼界，而且还可能忽视与具体计算直接有关的重要问题。另一方面，有限的强度计算文献即使很好，也不能认为是可以完全接受的，因为在这些文献中，所需要的实用资料是很少的。而且，在火箭技术不断飞速发展期间，这种文献很可能已过时而毫无价值。

参与本书的作者虽然把书名定为《火箭结构力学》，但他们也选取了结构力学与强度学之间的其它内容。论述时，一方面是以普通理论为基础；另一方面，又以很大的注意力分析了结构的特点和工作范围，以及选择计算图和讨论安全系数。同时，还阐述了与书名关系不大的温度场和动力计算问题。

本书作者是尽力不回避困难问题，并以最大可能阐明问题以满足读者要求。因此，即本书有不足之处，也会取得读者的谅解。自然，以后还可以加以纠正和改进。

В. И. 费奥多西耶夫

(В.И.Феодосьев)

第　一　篇

第一章　变形体力学

§1　基本概念和方程

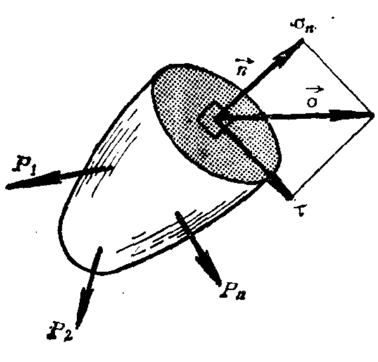
应　　力

应力是表征结构材料内力水平的一个指标，它不一定是由作用于物体上的外力引起的，可能是由于温度变化或生产时的工艺方法造成的。在后一种情况下产生的应力叫做残余应力。研究残余应力对结构强度的影响，是一个专门问题，不属于本书所讨论的范围，读者可以参阅残余应力理论的文献[18]。在这里，假设所讨论的结构材料中不存在初始残余应力，即初始状态时应力等于零。在这种情况下，可以假设应力是由外力和温度场的作用引起的。

拉应力的定义是用截面将物体分割成两部分后，单位截面积上的作用力。如果以 dS 表示截面上的微元面积，以 $d\vec{R}$ 表示作用力，则拉应力为

$$\vec{\sigma}=\frac{d\vec{R}}{dS}$$

向量 $\vec{\sigma}$ 不仅取决于微元在所述截面上的位置，而且还取决于它的空间方位，亦即 dS 的法向向量 $\vec{n}$ 的方向。向量 $\vec{\sigma}$ 可以分解为彼此垂直的两个分量：沿法向的分量和在截面内的分量（图 1.1 a），它们分别叫做正应力 σ_n 和剪应力 τ，拉应力向量的模为 $\sigma=\sqrt{\sigma_n^2+\tau^2}$。



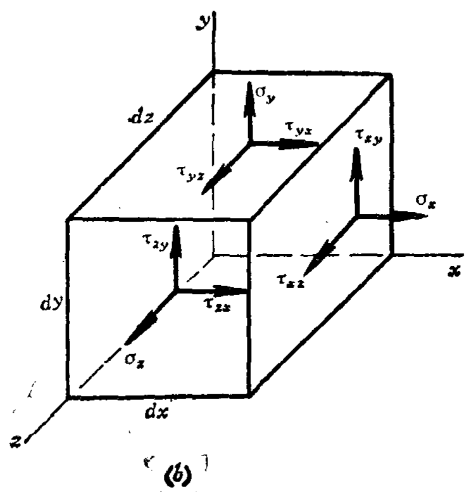


图　1.1

剪应力也可在截面内分解为两个任意方向的分力。

为了完全确定物体上某一点的应变状态，需要详细讨论一下应力向量沿坐标轴 x，y，z 上的投影，该坐标系不是任意选取的，应当使各坐标轴平行于相应的截面。现令 $x=$ 常

数（即平行于坐标面 yz，图 1.1 b），且以 σ_x，τ_{xy}，τ_{xz} 表示正应力和剪应力分量，剪应力分量的第一个脚标表示应力向量所在的位置，第二个脚标表示向量的方向；若令 y = 常数，则应力分量即以 σ_y，τ_{yx}，τ_{yz} 表示；如果令 z = 常数，应力分量就是 σ_z，τ_{zx}，τ_{zy}。用这种方法表示应力分量时，可以写成矩阵形式，即

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}。 \tag{1.1}$$

由于剪应力是成对出现的（即 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$；$\tau_{zy}=\tau_{yz}$；$\tau_{xz}=\tau_{zx}$），故矩阵（1.1）是对称的。

如果取出的是无限小的平衡角锥体，则各截面上的力应当平行于坐标面。但基体的方位仍由特定的法向方向 $\vec{n}$ 表示（图 1.2），于是，便得到熟知的柯西（Cauchy）方程[15]，即

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n &= X; \\ \tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n &= Y; \\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n &= Z。 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

其中，$l=\cos(\vec{n},\ x)$、$m=\cos(\vec{n},\ y)$ 和 $n=\cos(\vec{n},\ z)$ 表示向量 $\vec{n}$ 对坐标轴的方向余弦，由此即可确定应力向量 $\vec{\sigma}$。X、Y、Z 表示该向量在各坐标轴上的投影。

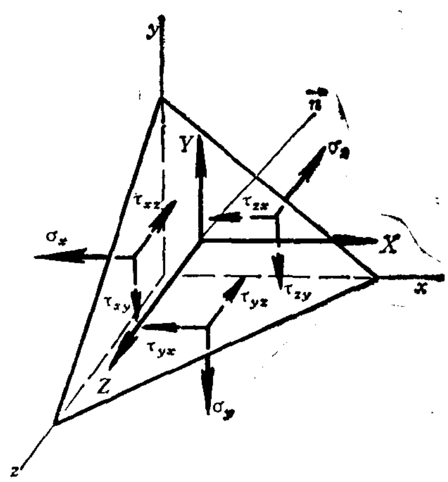


图 1.2

如果给定了所给点上的应力分量（1.1），那么，按照公式（1.2）即可以确定通过该点任意方向上的应力向量 $\vec{\sigma}$ 的分量，应力向量的模是

$$\sigma=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

正应力是

$$\sigma_n=Xl+Ym+Zn;$$

剪应力的绝对值是

$$\tau=\sqrt{\sigma^2-\sigma_n^2}。$$

借助于矩阵 T_σ，可以把方程组（1.2）看成是由具有分量 l、m、n 的向量 $\vec{n}$ 转换成具有分量为 X、Y、Z 的向量 $\vec{\sigma}$。由一个向量转换成另一个向量所得到的矩阵叫做张量[49]。因此，矩阵（1.1）是表示应力的对称张量。

主应力可定义为下述三次方程的根：

$$-\sigma^3+J_1\sigma^2+J_2\sigma+J_3=0,$$

式中　J_1、J_2、J_3——应力张量的不变量[15]。

通过主应力 σ_1、σ_2、σ_3 可将不变量表示为

$$J_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3;$$

$$J_2=-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1;$$

$$J_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3。$$

在这种情况下，

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3。$$

平均应力可表示为

$$\sigma_c=\frac{1}{3}J_1=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)。\tag{1.3}$$

应力张量可用下述两个张量之和的形式表示：

$$T_\sigma=T_c+D_\sigma,$$

式中.

$$T_c=\begin{bmatrix}\sigma_c & 0 & 0\\ 0 & \sigma_c & 0\\ 0 & 0 & \sigma_c\end{bmatrix};\tag{1.4}$$

$$D_\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_c & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma_c & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma_c\end{bmatrix}。\tag{1.5}$$

T_c 叫做球形张量；D_σ 叫做应力偏量，它在塑性理论中起着很重要的作用。

应　变

假设在无初始应力状态的物体上，有一个坐标为 x、y、z 的点M，现求在外力或温度场作用下的位移。令 u、v、w 是点M的总位移在坐标轴 x、y、z 上的投影(图1.3a)。

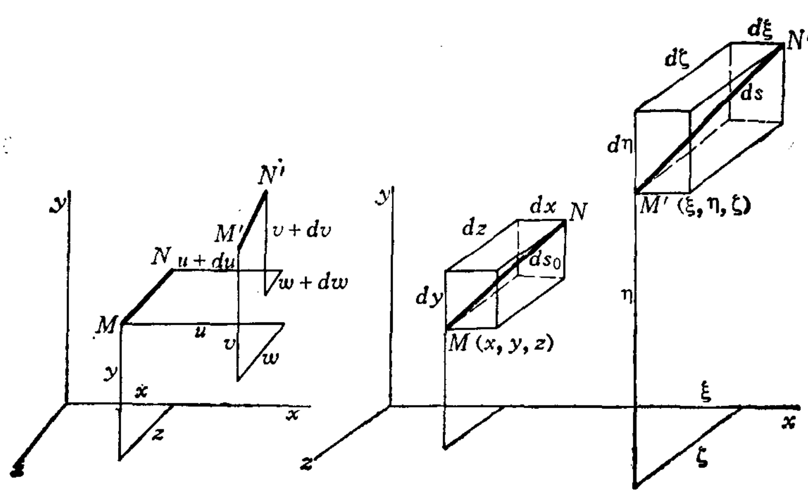


图 1.3

显然，u、v、w 可以认为是点M的坐标 x、y、z 的函数。在变形以后，点M的坐标是

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x+u(x,\ y,\ z);\\ \eta&=y+v(x,\ y,\ z);\\ \zeta&=z+w(x,\ y,\ z)。\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

在公式 (1.6) 中，独立变量 x、y、z 是起参数作用，即好像它们是连在物体的M

点上，在物体的整个变形过程中，它们可以把点M与其他的点区别开。借助于独立变量x、y、z（即初始状态下介质上点的坐标）讨论连续介质的变形，即相当于讨论所谓拉格朗日（Lagrange)坐标（拉格朗日坐标x、y、z又叫做物质坐标)。在弹性理论中，这是常见的方法，这与流体力学中的方法是不同的，在流体力学中，最常用的方法是采用固定于空间的欧拉（Euler）坐标。

现取与点M无限接近的另一点N，初始坐标为$x+dx$、$y+dy$、$z+dz$。变形以后，点N的坐标是

$$\left.\begin{aligned}\xi+d\xi&=x+dx+u(x+dx,\ y+dy,\ z+dz);\\ \eta+d\eta&=y+dy+v(x+dx,\ y+dy,\ z+dz);\\ \zeta+d\zeta&=z+dz+w(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)。\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

根据微分法则，

$$\left.\begin{aligned}d\xi&=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz;\\ d\eta&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz;\\ d\zeta&=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz。\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

线段MN长度的平方是：变形前为$ds_0^2=dx^2+dy^2+dz^2$，变形后为$ds^2=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$。根据公式（1.8）得

$$ds^2=ds_0^2+2(\varepsilon_{xx}dx^2+\varepsilon_{yy}dy^2+\varepsilon_{zz}dz^2+\varepsilon_{xy}dxdy+\varepsilon_{yz}dydz+\varepsilon_{zx}dzdx),\tag{1.9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right];\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y};\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

其它类似的值，通过循环排列（u、v、w）和（x、y、z）后，不难按公式（1.10）得到。现假设$l=\dfrac{dx}{ds_0}$、$m=\dfrac{dy}{ds_0}$、$n=\dfrac{dz}{ds_0}$是变形前线段MN的方向余弦，则按公式（1.9）即有

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2=1+2(\varepsilon_{xx}l^2+\varepsilon_{yy}m^2+\varepsilon_{zz}n^2+\varepsilon_{xy}lm+\varepsilon_{yz}mn+\varepsilon_{zx}nl)。\tag{1.11}$$

当ε_{xx}、ε_{yy}、……、ε_{zx}的值远小于1时，运用近似公式$\sqrt{1+\alpha}\approx1+\frac{1}{2}\alpha$（当$\alpha$很小时)，便得下述表达式：

$$\varepsilon=\frac{ds}{ds_0}-1=\varepsilon_{xx}l^2+\varepsilon_{yy}m^2+\varepsilon_{zz}n^2+\varepsilon_{xy}lm+\varepsilon_{yz}mn+\varepsilon_{zx}nl。\tag{1.12}$$

借助于方向余弦l、m、n和ε_{xx}、ε_{yy}、…、ε_{zx}的值，可以用公式（1.12）确定任意线段的正应变（相对伸缩)。因此，把这些值叫做应变分量。如果x、y、z的函数u、v、

w的所有偏导数远小于1，就可以使上述表达式大大简化。在这种情况下，公式（1.10）中的平方项和相乘的导数项均可舍去。因此，应变分量可用线性表达式表示。为了使它们与公式（1.10）相区别，现用符号ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}来表示，即

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\\&\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x};\\&\gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y};\\&\gamma_{zx}=\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}。\end{aligned}\right\}\tag{1.13}$$

上述各式是线性弹性理论中所熟知的应变与位移关系的表达式。在以后的所有情况中，如果没有特殊规定，所讨论的都是弹性理论的线性方程。这就是说，平衡方程是由物体几何形状不变时的原始方程组成，而应变方程则取（1.13）的形式。在非线性弹性理论方面有兴趣的读者，可以参阅诺沃日洛夫（В. В. Новожилов）的著作[60]。

矩阵

$$T_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{pmatrix}\tag{1.14}$$

是对称张量，与前面讨论的应力张量类似。用于应力张量的所有公式，当用ε_x代σ_x，ε_y代σ_y，ε_z代σ_z，$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$代τ_{xy}，$\frac{1}{2}\gamma_{yz}$代τ_{yz}和$\frac{1}{2}\gamma_{zx}$代τ_{zx}后，即可仿写出应变张量的表达式。因此，主应变的表达式可以由下述三次方程确定：

$$-\varepsilon^3+J_1\varepsilon^2+J_2\varepsilon+J_3=0,\tag{1.15}$$

式中 J_1、J_2、J_3——应变张量的不变量。

第一个不变量$J_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$是微元体积的相对应变。

平均应变为

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)。\tag{1.16}$$

引进平均应变ε_0这个值后，就可以像应力张量那样以两个张量之和的形式表示应变张量。

应变偏量是

$$D_\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_0\end{pmatrix}。\tag{1.17}$$

应变 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 是应力 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 的广义位移。如果从物体上截取的平行六面体的微元 dx、dy、dz 有附加应变 $\delta\varepsilon_x$、$\delta\varepsilon_y$、……，$\delta\gamma_{zx}$ 时，就要消耗功，其值是

$$(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\cdots\cdots+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dxdydz。\tag{1.18}$$

现假设在所讨论的物体上（图 1.4）沿坐标轴有分布体载荷（重力，惯性力）分量 p_x、p_y、p_z 和分量为 X_n、Y_n、Z_n 的面载荷作用。体载荷是单位体积内的力，而面载荷是单位表面积上的力。在物体的整个或部分表面上除了给定的外载荷外，还可能有约束反力的作用。具有这种约束的物体，在空间的位置可能是固定的，也可能是可移动的。物体表面上的点可以用位移 u_r、v_r、w_r 来表示。在所有情况下，都认为是理想约束，亦即假设约束反力在物体表面上的点有任何可能位移时都不会作功。理想约束可以用绝对刚性的销栓与物体基座牢固连接的形式表示，这个基座可能是固定的，也可能有给定的位移。

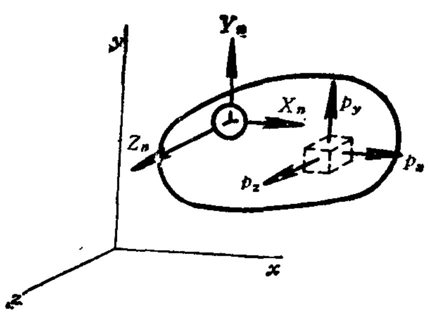


图 1.4

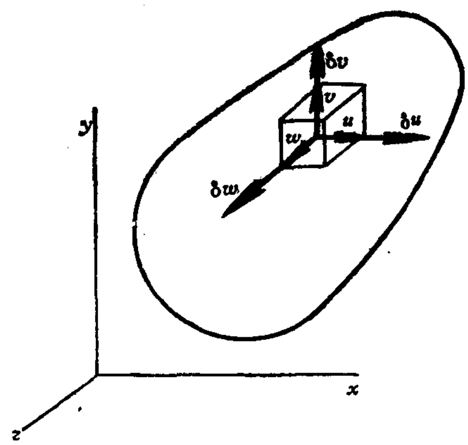


图 1.5

变形体内的可能位移 δu、δv、δw 是个任意函数，可以认为它们是真实位移 u、v、w 的微小变化（变分）（图1.5）。体载荷 p_x、p_y、p_z 在可能位移 δu、δv、δw 上所作的功是

$$\delta R_1=\iiint(p_x\delta u+p_y\delta v+p_z\delta w)dxdydz。\tag{1.19}$$

同理，面载荷 X_n、Y_n、Z_n 所作的功是

$$\delta R_2=\iint(X_n\delta u+Y_n\delta v+Z_n\delta w)dS,\tag{1.20}$$

式中　δu、δv、δw——物体表面上点的可能位移。

积分是沿物体的表面进行的。在这里，只有外载荷起作用，因为约束反力在可能位移上不作功。可能位移 δu、δv、δw 与应变的可能变化，即它的变分是相对应的，亦即

$$\delta\varepsilon_x=\frac{\partial\delta u}{\partial x};\quad \delta\varepsilon_y=\frac{\partial\delta v}{\partial y};\quad \cdots\cdots;\quad \delta\gamma_{zx}=\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\frac{\partial\delta u}{\partial z}。\tag{1.21}$$

后面，将会经常遇到“变分”这个术语，但这并不意味着读者必须掌握变分计算。只要记住变分就是某些值或函数的最小可能变化就足够了。理解“可能”这个词在每一种具

体情况下所包含的意义是必要的。已经指出，函数 u 、 v 、 w 的变分 δu、δv、δw，必须是包含约束在内的最小可能位移。

按照关系式（1.18），由物体整个体积的附加应变所消耗的总功是

$$\delta A=\iiint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\cdots\cdots+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dxdydz。\tag{1.22}$$

根据力学的可能位移原理，变形体的平衡条件可以由一个方程表示：

$$\delta A=\delta R_1+\delta R_2。\tag{1.23}$$

方程（1.23）对任何的可能位移 δu，δv、δw 都是适用的。

从方程（1.23），可以得到从物体上截取的微元平行六面体的平衡微分方程和表面的边界条件。为此，需要运用熟知的三重积分的分部积分公式：

$$\left.\begin{aligned}\iiint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdydz&=\iint\varphi\psi l dS-\iiint\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdydz;\\ \iiint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}dxdydz&=\iint\varphi\psi m dS-\iiint\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}dxdydz;\\ \iiint\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}dxdydz&=\iint\varphi\psi n dS-\iiint\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}dxdydz。\end{aligned}\right\}\tag{1.24}$$

在上述公式中：三重积分是在物体限定表面 S 内的体积分，二重积分是沿该表面的面积分；l 、 m 、 n 是表面外法线的方向余弦。在这种情况下，$ldS=dS_{yz}$、$mdS=dS_{xz}$ 和 $ndS=dS_{xy}$ 是表面的微元面积 dS 在坐标平面上的投影。

公式（1.24）可以转换为 δA 的表达式（1.22）。运用分部积分法，可得下述积分形式：

$$\iiint\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}dxdydz;\quad\iiint\tau_{xy}\left[\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right]dxdydz;\quad\cdots\cdots$$

把系数相同的项合并之后，即可写出方程（1.23）的详细表达式：

$$\begin{aligned}&\iint[(\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n)\delta u+(\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n)\delta v+(\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n)\delta w]dS\\&-\iiint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta u+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta v\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)\delta w\right]dxdydz=\delta R_1+\delta R_2。\end{aligned}\tag{1.25}$$

δR_1 和 δR_2 的表达式已由公式（1.19）和（1.20）给出。因为物体体积内的变分 δu、δv、δw 是任意的，所以从方程（1.25）可得到含有 δu、δv、δw 的相应系数，即根据该方程左边和右边的三重积分号内的项相等，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+p_x=0;\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+p_y=0;\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}+p_z=0。\end{aligned}\right\}\tag{1.26}$$

这就是物体微元体积的平衡微分方程。

使方程（1.25）左边和右边的二重积分号内含有 δu、δv、δw 的相应系数相等，便得到物体表面上力的边界条件，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=X_n;\\ \tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n=Y_n;\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n=Z_n。\end{aligned}\right\}\tag{1.27}$$

在物体表面有固定式约束反力作用的那些截面上，亦即约束完全阻止了位移时，则几何边界条件可写成 $u=v=w=0$；如果约束只是在一个或两个方向上阻止位移，那么，所得到的即是混合边界条件。在每一种特殊情况下，这些边界条件是很容易建立的。例如，如果约束仅阻止沿 z 轴方向的位移，则相应的边界条件即是

$$w=0;\quad \sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=X_n;$$
$$\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n=Y_n。$$

物体的整个或部分表面，也可以由位移 u_r、v_r、w_r 表示，在这种情况下，有约束的表面部分，$\delta u=\delta v=\delta w=0$。

公式（1.23）有时叫做变分方程，但更确切的说是用变分表示的方程，因为在这种方程中，一般只有 δA、δR_1 和 δR_2 有意义，而 A、R_1 和 R_2 是没有意义的。这只有在存在变形位能和外载荷 p_x、p_y、p_z、X_n、Y_n、Z_n 为势力的条件下才是可能的。后面将会见到，那时，将用变分方程的形式 $\delta(A-R_1-R_2)=0$ 来确定真实函数 A、R_1、R_2 和表示方程（1.23）。

用变分表示的方程与变分方程间存在的上述区别，正如力学中可能位移原理的方程与总位能的极限条件间有区别是一样的。

用应力变分表示的方程

现给应力 σ_x、σ_y、σ_z、…、τ_{zx} 以微小增量（变分）$\delta\sigma_x$、$\delta\sigma_y$、$\delta\sigma_z$、…、$\delta\tau_{zx}$，并要求总应力 $\sigma_x+\delta\sigma_x$、$\sigma_y+\delta\sigma_y$、…、$\tau_{zx}+\delta\tau_{zx}$ 是静力可能的，亦即满足平衡方程和力的边界条件。则应力的可能变分 $\delta\sigma_x$、$\delta\sigma_y$、…、$\delta\tau_{zx}$ 即不会改变作用于物体上力的值。

根据平衡方程（1.26）得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z}=0;\\ \frac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\delta\tau_{zy}}{\partial z}=0;\\ \frac{\partial\delta\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z}=0。\end{aligned}\right\}\tag{1.28}$$

根据物体表面部分（外载荷给定）的边界条件（1.27）得

$$\left.\begin{aligned}\delta\sigma_x l+\delta\tau_{yx}m+\delta\tau_{zx}n=0;\\ \delta\tau_{xy}l+\delta\sigma_y m+\delta\tau_{zy}n=0;\\ \delta\tau_{xz}l+\delta\tau_{yz}m+\delta\sigma_z n=0。\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

积分（1.29）式与积分（1.22）式的方法是类似的，只是所积分的项是应变分量与应力变分乘积的和，即

$$\iiint(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\cdots+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx})dxdydz。\tag{1.30}$$

代入 ε_x、ε_y、…、γ_{zx} 的表达式（根据公式（1.13），它们是位移的导数），并按公式(1.24)对各部分积分，即可得到三重积分。根据平衡方程（1.28)，该积分将等于零。但考虑关系式（1.29）以后的二重积分只是在位移被给定的表面部分才不等于零。

给定的表面位移，可以通过约束加于物体上的强迫位移来实现。给定这些位移的可能性，与前面假设的理想约束并不矛盾，因为对物体表面上的这些点所给定的位移，其变分等于零，因此，约束反力并不作功。

假设物体某一表面部分的给定位移用 u_r、v_r、w_r 表示，而相应于约束反力的面载荷分量用 X_r、Y_r、Z_r 表示，则借助于这些载荷分量即可得到位移 u_r、v_r、w_r。由此便得到

$$\iiint(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\cdots+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx})\ dxdydz=\iint(u_r\delta X_r+v_r\delta Y_r+w_r\delta Z_r)dS,\tag{1.31}$$

式中 δX_r、δY_r、δZ_r——物体内应力变化（变分）时约束反力分量的增量，即

$$\delta X_r=\delta\sigma_x l+\delta\tau_{yx}m+\delta\tau_{zx}n;$$
$$\delta Y_r=\delta\tau_{xy}l+\delta\sigma_y m+\delta\tau_{zy}n;$$
$$\delta Z_r=\delta\tau_{xz}l+\delta\tau_{yz}m+\delta\sigma_z n。$$

如果约束是加在物体的绝对刚性的基座上，那么，这些约束反力在它们作用点的真实位移上所作的功等于零，即方程（1.31）的右边变为零，亦即

$$\iiint(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\cdots+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx})dxdydz=0。\tag{1.32}$$

后面将会见到由方程（1.32）可以得到在材料力学[94]中所讨论的力法的方程，也可从方程（1.32）得到变形一致方程（圣维南方程）。读者在列宾逊（Л. С. Лейбезон）的著作[54]中可找到这一问题的详细论述。

§2 弹性体 变分方程 温度应力

弹性体的位能

到目前为止，还没有作过关于变形规律的任何假设，前一节得出的方程仅适于任意刚体的小变形情况。

工程人员经常要处理的是弹性体，弹性体的最明显特点是变形过程的可逆性。材料在弹性范围内工作时，应当认为完全不存在永久变形。这就意味着外力功都转换为变形位能。由于应变 ε_x、ε_y、…、γ_{zx} 是应力 σ_x、σ_y、…、τ_{zx} 的广义坐标，因此，按照力学中的位能概念，我们把这种位能叫做弹性体变形的比位能，且以函数 F 表示，因而[54]：

$$\sigma_x=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_x};\quad \sigma_y=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_y};\quad \cdots;\ \tau_{zx}=\frac{\partial F}{\partial\gamma_{zx}}。\tag{2.1}$$

如果函数 F 不是直接取决于坐标 x、y、z，那么，这种弹性体就叫做均匀弹性体。这种物体的应力与应变的关系，在物体的所有点上都是相同的。关系式（2.1)可以认为是

弹性特性的数学公式。考虑到这些关系式，即得到应力在应变变分上的比功，即

$$\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\cdots+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx}。 \tag{2.2}$$

把函数$F(\varepsilon_x、\varepsilon_y、\cdots、\gamma_{zx})$的变分叫做给自变量以微小增量$\delta\varepsilon_x$、$\delta\varepsilon_y$、…、$\delta\gamma_{zx}$后该函数所获得的增量。此变分由全微分的计算法则确定，即

$$\begin{aligned}\delta F&=F(\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x,\ \varepsilon_y+\delta\varepsilon_y,\ \cdots,\ \gamma_{zx}+\delta\gamma_{zx})-F(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \cdots,\ \gamma_{zx})\\&=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_y+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx}。\end{aligned} \tag{2.3}$$

因此，由关系式（2.2）确定的消耗在应变增量上的比功，即等于比位能的变分（增量）δF。

弹性体变形的总位能是

$$\Phi=\iiint F\,dxdydz。 \tag{2.4}$$

在物体附加应变上所消耗的总功，如同由公式（1.22）所确定的总功一样，可表示成下述形式：

$$\delta A=\iiint\delta F\,dxdydz=\delta\Phi。 \tag{2.5}$$

因此，对弹性体而言，表达式δA具有位能Φ的变分的含意。如果在物体变形期间。外力p_x、p_y、p_z、X_n、Y_n、Z_n的值不变，也就是说都是势力，那么，由公式（1.19）和（1.20）所给定的在可能位移上所作的功即具有下述形式：

$$\left.\begin{aligned}\delta R_1&=\delta\iiint(p_xu+p_yv+p_zw)\,dxdydz;\\\delta R_2&=\delta\iint(X_nu+Y_nv+Z_nw)\,dS。\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

因此，对于在外势力作用下的弹性体，可根据力学中的可能位移原理，将基本公式（1.23）表示成下述变分方程：

$$\delta\Pi=0, \tag{2.7}$$

式中

$$\Pi=\Phi-\iiint(p_xu+p_yv+p_zw)\,dxdydz-\iint(X_nu+Y_nv+Z_nw)\,dS。 \tag{2.8}$$

Π值的简单物理意义即是表示弹性体及其所受的外势力所组成的力学系统的总位能。积分号前有负号，是因为外力的方向与位移u，v，w的方向相反，因此，这些力的位能将随位移增加而减少。

由公式（2.7）可知，系统在平衡位置的总能量具有固定（极）值，大量的详细分析表明，该值相当于最小值。

变分方程(2.7)叫做**拉格朗日变分方程**[54]。与用变分表示的最普通的方程(1.23)不同，拉格朗日变分方程只对作用有外势力的弹性体是有效的。

拉格朗日变分方程是以近似的里兹（Ritz）法为基础的。此方法的实质，实际上是使位移的表达式与级数的待定系数相一致，因而即可从作为这些系数的函数——总位能Π的

极值条件确定诸系数。在文献〔54，56〕中可以找到此方法的说明及其各种应用。

由公式（2.1)所确定的应力与应变的关系式，可能是非线性的。它们的关系将在下一节研究塑性理论时加以讨论。

然而，应力与应变的线性关系，一般地说，只有弹性体在小变形情况下才是可能的。因此，往往把应力与应变呈线性关系的物体叫做线性弹性体，或叫虎克（Hooкe）体。

线性弹性体的特性

对于线性弹性体，比位能F由独立变量（应变）ε_x、ε_y、…、γ_{zx}的齐次二次多项式表示。

一般地说，温度应变是被忽略的，因此，线性弹性体的比位能可写成下述形式：

$$
\begin{aligned}
F=\frac{1}{2}(&a_{11}\varepsilon_x^2+a_{22}\varepsilon_y^2+a_{33}\varepsilon_z^2+a_{44}\gamma_{xy}^2+a_{55}\gamma_{yz}^2+a_{66}\gamma_{zx}^2+2a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y+2a_{13}\varepsilon_x\varepsilon_z\\
&+2a_{14}\varepsilon_x\gamma_{xy}+2a_{15}\varepsilon_x\gamma_{yz}+2a_{16}\varepsilon_x\gamma_{zx}+2a_{23}\varepsilon_y\varepsilon_z+2a_{24}\varepsilon_y\gamma_{xy}+2a_{25}\varepsilon_y\gamma_{yz}+2a_{26}\varepsilon_y\gamma_{zx}\\
&+2a_{34}\varepsilon_z\gamma_{xy}+2a_{35}\varepsilon_z\gamma_{yz}+2a_{36}\varepsilon_z\gamma_{zx}+2a_{45}\gamma_{xy}\gamma_{yz}+2a_{46}\gamma_{xy}\gamma_{zx}+2a_{56}\gamma_{yz}\gamma_{zx}),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

其中，a_{11}、a_{22}、…、a_{66}是取决于物体弹性特性的系数。对于均匀物体，它们是常数。一般地说，弹性系数的数量是21个。

根据关系式（2.1），得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x=a_{11}\varepsilon_x+a_{12}\varepsilon_y+a_{13}\varepsilon_z+a_{14}\gamma_{xy}+a_{15}\gamma_{yz}+a_{16}\gamma_{zx};\\
&\sigma_y=a_{12}\varepsilon_x+a_{22}\varepsilon_y+a_{23}\varepsilon_z+\cdots+a_{26}\gamma_{zx};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
&\tau_{zx}=a_{16}\varepsilon_x+a_{26}\varepsilon_y+a_{36}\varepsilon_z+a_{46}\gamma_{xy}+a_{56}\gamma_{yz}+a_{66}\gamma_{zx}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.10}
$$

公式（2.10）中系数a_{ik}的矩阵的对称性，是在写位能的表达式（2.9）时形成的。因此，对于任何线性弹性体，应力与应变的关系应当用对称公式，或更确切地说，应借助于系数的对称矩阵来表示。

现来讨论线性弹性体比位能的几个典型特性。 1

对于齐次二次多项式（2.9），欧拉恒等式是有效的，即

$$
2F=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_x}\varepsilon_x+\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_y}\varepsilon_y+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\gamma_{zx}}\gamma_{zx},
\tag{2.11}
$$

由此，根据关系式（2.1），可得克拉普伦（Clapeyron）公式，即

$$
F=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\cdots+\tau_{zx}\gamma_{zx}).
\tag{2.12}
$$

直接由公式（2.11）计算也是不难的。比位能可以通过应变或应力来表示，即$F=F(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \cdots,\ \gamma_{zx})$或$F=F(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \cdots,\ \tau_{zx})$，于是，便得下述方程： 23

$$
F(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \cdots,\ \gamma_{zx})+F(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \cdots,\tau_{zx})=\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\cdots\tau_{zx}\gamma_{zx}.
\tag{2.13}
$$
27

现来计算上述方程中两部分分量的变分（增量)，设应变和应力的增量为

$$
\delta\varepsilon_x,\ \delta\varepsilon_y,\ \cdots,\ \delta\gamma_{zx};\ \delta\sigma_x,\ \delta\sigma_y,\ \cdots,\ \delta\tau_{zx},
$$

便有

$$
\delta F(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \cdots,\ \gamma_{zx})=\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_x}\delta\varepsilon_x+\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_y}\delta\varepsilon_y+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\gamma_{zx}}\delta\gamma_{zx},
$$