高等学校教学参考书

数学分析讲义

上册

吉林师范大学数学系
数学分析教研室编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析讲义

上册

吉林师范大学数学系
数学分析教研室编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析讲义

（上　册）

吉林师范大学数学系
数学分析教研室编
人民教育出版社出版（北京沙滩后街）
人民教育出版社印刷厂印装
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售

统一书号 13012·0102　开本 $850\times1168^1/_{32}$　印张 14
字数 333,000　印数 5,001—105,000　定价(6)¥1.30
1960 年 8 月第 1 版　1978 年 5 月北京第 2 次印刷

本书是为高等函授院校数学系开设"数学分析"课而编写的，比较适合在职中等学校数学教师业务进修的需要. 叙述比较详细，范例较多，便于自学.

全书分上、下两册；上册分十六章，其中主要内容有实数理论、函数、极限理论、一元函数的微分学和积分学；下册分十三章，其中主要内容有多元函数的微分学、级数理论、广义积分、含参变量的积分和多元函数的积分学.

本书除可供高等函授院校数学系作为"数学分析"课教材外，也可供同等程度的业余学校和全日制学校学生作为参考书和自修用书.

前　言

本讲义是在我系函授本科“数学分析”教材的基础上经过修改完成的。在修改时，尽量吸收了系内有关教师和广大函授生对该讲义在多次教学中所提出的意见。

本讲义的内容选取，首先考虑了当前中等学校多数数学教师的业务基础，同时也注意了“数学分析”本身的系统性，适当地照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺流利，公式推导和定理证明力求详明准确，使其通俗易懂，便于自学。

我们还根据函授生分析和想象能力较强的特点，对一些重要的概念和定理作了细致的分析；对一些定理的证明，除了用分析方法严格论证外，特别注意用几何图形帮助读者理解定理内容，掌握定理的证明方法和思考线索。

为了减轻读者阅读讲义的困难，我们不追求减弱定理的条件。在不影响基本要求的前提下，对某些定理用了较强的条件；有些定理所指明的事实比较明显，就不追求理论上的严谨，只给以几何直观的说明。

本讲义有些章节用小字排印，它们有的是对某些问题作进一步的说明；有的是“数学分析”的难点；有的是对一些读者虽不是很急需，但又是进一步提高所不可缺少的内容。初学“数学分析”的读者，可先不阅读小字部分，待逐步掌握数学分析的方法之后，再阅读这部分内容。

由于我们水平的限制，错误和不妥之处一定很多，敬希广大读者批评指正。

本讲义主要由刘玉琏同志执笔编写，付沛仁同志参加了部分节章的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系

数学分析教研室

1965.11.于长春

目 录

預 篇

第一篇 分析引論

第二篇 微分学

第三篇 积分学

預　篇

I. 基本公式

为了使讀者方便起見，将今后学习中用到的一些公式列举于下:

1. 初等代数的一些公式

(一) 二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

i) 求根公式:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ii) 根的性质:

$$\text{当}\ b^2-4ac\begin{cases}>0, & \text{两个根是实数且不相等,}\\ =0, & \text{两个根是实数而且相等,}\\ <0, & \text{两个根是虚数。}\end{cases}$$

(二) 对数:

i) 若 $a^y=x$, 則 $y=\lg_a x\ \begin{pmatrix}a>0,\ a\neq 1,\\ x>0\end{pmatrix}$

ii) $\lg_a a=1$.

iii) $\lg_a 1=0$.

iv) $\lg_a A\cdot B=\lg_a A+\lg_a B$.

v) $\lg_a \frac{A}{B}=\lg_a A-\lg_a B$.

vi) $\lg_a A^\alpha=\alpha\lg_a A$.

vii) $a^{\lg_a x}=x$.

（三）牛頓二項式公式:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n.$$

（四）阶乘:

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1.$$

2. 初等几何的一些公式

以字母 r 或 R 表示半徑，h 表示高，S 表示底面积，l 表示母綫长。

（一）圓　周长 $=2\pi r$；面积 $=\pi r^2$.

（二）圓扇形　面积 $=\frac{1}{2}r^2\alpha$（α 为扇形的圓心角）

（三）正圓柱体　体积 $=\pi r^2h$；側面积 $=2\pi rh$；

表(全)面积 $=2\pi r(r+h)$.

（四）正圓錐　体积 $=\frac{1}{3}\pi r^2h$；側面积 $=\pi rl$；

表(全)面积 $=\pi r(r+l)$.

（五）球　体积 $=\frac{4}{3}\pi r^3$；表面积 $=4\pi r^2$.

（六）正截錐体　体积 $=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$；

側面积 $=\pi l(R+r)$.

3. 三角学的一些公式

(一) 弳与度

$$180^\circ=\pi \text{ 弳},$$

即
$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弳}=0.0174\cdots\text{弳},$$

$$1\text{ 弳}=\frac{180}{\pi}\text{度}=57^\circ17'45''=57.29\cdots\text{度}。$$

(二) 弧长公式

半徑为 r，圓心角为 θ，圓弧长为 s，則 $s=r\theta$.

(三) 公式

$$\sin^2x+\cos^2x=1.$$

$$1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2x.$$

$$1+\operatorname{ctg}^2x=\csc^2x.$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y.$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y.$$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

$$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y).$$

$$2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y).$$

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y).$$

$$-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y).$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

$$\begin{aligned}\cos 2x&=\cos^2x-\sin^2x\\&=1-2\sin^2x\\&=2\cos^2x-1.\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

(四) 特殊角的三角函数值

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

4. 平面解析几何的一些公式

設平面上有两点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$:

(一) 两点間的距离:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(二) 綫段 M_1M_2 的斜率:

$$K=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\varphi.$$

(三) 通过两点 M_1 与 M_2 的直綫方程:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

（四）直角坐标与极坐标的关系式:

$$\left.\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{array}\right\};\qquad \left.\begin{array}{l}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.\end{array}\right\}$$

（五）以点(a, b)为心，以 r 为半徑圓的方程:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

或

$$\left.\begin{array}{l}x=a+r\cos\varphi,\\ y=b+r\sin\varphi.\end{array}\right\}\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

（六）以原点为心，分别以 a 与 b 为半长、短軸的橢圓方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

II. 希腊字母

字	母	中文发音	汉語拼音字母拼音
A	α	阿拉法	alfa
B	β	貝他	beta
Γ	γ	嘎瑪	gama
Δ	δ	得尔他	delta
E	ε	唉普西弄	epsilon
Z	ζ	綏他	zheita
H	η	唉他	eta
Θ	θ	斯伊他	sita
I	ι	优他	yota
K	κ	卡怕	kapa

Λ	λ	兰姆大	lamda
M	μ	米 优	miu
N	ν	泥 优	niu
Ξ	ξ	刻斯伊	ksi
O	o	欧迷克弄	omiklon
Π	π	派 爱	pai
P	ρ	漏	lo
Σ	σ	西格瑪	sigma
T	τ	套	tao
Υ	υ	伊普西弄	ipsilon
Φ	φ	夫 爱	fai
X	χ	气	qi
Ψ	ψ	普斯伊	psi
Ω	ω	欧米嘎	omiga

III. 数学論証中最常用的术語与方法

(一)必要条件与充分条件

現在举一些例子来說明必要条件与充分条件的意义及其区别。

(i) 充分但并非必要的条件:

例 “若两个三角形全等,則这两个三角形的面积相等。”

很明显,“两个三角形全等”是“两个三角形面积相等”的充分条件,但不是必要的条件(因为只要两个三角形是等底等高的就够了)。

如果把充分而非必要的条件作为前提,命題是必然成立的,但倒过来就不一定成立了。例如“若两个三角形的面积相等,則它們

是全等的"这一命题一般就未必成立。

(ii)必要但不充分的条件:

例 "若两三角形的对应角都相等,它們才可能是全等的"

很明显,两个三角形的对应角都相等是它們全等的必不可少的条件,但并不是足够的条件,因为不全等的两个相似三角形也具备这一条件,所以在这命题里只能說"它們才可能是全等的"而不能說"則它們是全等的。"

因此,如果把必要但不充分的条件作为前提,命題是不一定成立的,但倒过来說,命題就成立:"若两个三角形全等,則它們的对应角都相等。"

(iii)充分而又必要的条件

例 "若三角形的两底角相等,这三角形是等腰的。"

因为若三角形的两个底角相等,而且也只要它的两个底角相等,这三角形就必定是等腰的。这里,三角形的"两底角相等"是其为"等腰"的充分而又必要的条件。

用充分而又必要的条件来叙述的命題,倒过来叙述也是成立的。充分而又必要的条件簡称"充要条件"。充分但并非必要的条件常簡称"充分条件",必要但未必充分的条件也簡称为"必要条件。"

如果一个命題的前提是充要条件,則結論永远成立,而且这个命題还可以倒过来叙述。象这样的命題就成为完善的定理。

如果前提 A 是充分条件,而我們能証明 A 成立,那末我們也就从而証明了結論 B 成立。但是,如果我們要証明結論 B 不成立,那末只証明充分条件 A 不成立是不够的。例如,两个三角形全等是它們具有等面积的必要条件,但我們不能說不是全等的两个三角形就不会有相等的面积。

在数学中,給出充分条件的命題常称为准則。

如果前提A是必要条件，那末如前所說，証明了必要条件A成立还不足以証明結論B成立，例如証明了两三角形的对应角相等(必要条件A)还不足以証明这两三角形是全等的。但若必要条件A不成立，那末結論B肯定是不能成立的。例如，只要証明了两三角形的对应角不等，那末这两个三角形一定不会是全等的。

上面所講的結果可列表如下：

前提A的性質	A的成立与否	結論B的成立与否
充分条件	成立	成立
充分条件	不成立	?
必要条件	成立	?
必要条件	不成立	不成立
充要条件	成立	成立
充要条件	不成立	不成立

如果我們要証明或应用数学定理时，对条件的性質、意义和区别必須有明确的認識。

(二)反証法(或归謬法)

在数学分析中論証問題和定理时，如果結論只有两种可能，就常常用到反証法。用反証法証明命題不外乎先将命題的結論否定，然后根据邏輯推理引出一个与已知条件或者与已知事实相矛盾的結果来。我們可以写出这种方法的一般形式。首先将命題写成已知、求証的形式。因为已知条件有时有很多个，所以我們用$A_1, A_2, \cdots A_n$来表示已知条件。

命題： 已知 $A_1+A_2+\cdots+A_n$

求証 B成立。

反証：首先否定結論，即設非B，再根据已知条件 $A_1+A_2+\cdots$

$+A_n$ 和邏輯推理引出与已知事实矛盾結果。可以写成为:

$$非\ B+A_1+A_2+\cdots+A_n\longrightarrow 与已知事实矛盾。$$

有时反証法又将取另一种形式: 如果非 B, 再用某些个已知条件(如 $A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}$), 根据邏輯推理得到与另外已知条件(如 A_n)相反的結果。可以表示为:

$$非\ B+A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}\longrightarrow 非\ A_n。$$

最簡单情形, 当只有一个已知条件 A 时, 常常出現非 $B\longrightarrow$ 非 A 的推理方法。

我們不准备举例来說明上面的各种形式, 讀者只要在学习过程中, 凡是用到反証法时就复习本节所講的內容, 就会碰到上面所說的各种情形。

第一篇　分析引論

第一章　函数

函数是数学分析課研究的对象，因此开始学习数学分析时，首先，对函数概念要有清楚的理解。讀者虽然在中学学过了一些有关函数的知識，但是不够詳尽、透彻。因而有必要把函数概念詳細、深刻地講一講。

§1. 变量

在人們的生产实踐过程中，在自然科学与技术科学中，我們經常要碰到各种各样不同性質的量。例如：在物理学中有重量、温度、时間、速度、力等；在化学中有原子量、分子量、溶解度等；在几何学中有长度、面积、体积等。然而一切量都有一个共同的性質，那就是，每一个量都可以用同种类的任意量作为測量单位来測量它。例如，以"米"作为长度的測量单位，以"公斤"作为重量的測量单位，以"分"作为时間的測量单位等。

一个具体的量与它同类的測量单位相比时，其比值将是一个抽象的数(或不名数)，这个抽象的数叫做已給具体量的数値，簡称为已給量的値。

数学中所研究的量，并不考慮它的物理意义、化学意义或几何意义等。即該量是重量还是分子量或是体积，从数学观点来看，都不予考慮。所以数学中所研究的量乃是从生产实踐中抽象出来的量(数)。但是这种抽象只是暂时的脫离了生产实际。当人們掌握了量的某种規律之后，再将它应用到生产实踐当中，就能解决生产