线性代数

孙显奕 编著

北京工业学院出版社

目　录

第一章　行列式

第二章　矩　阵

第三章　线性方程组

第四章　线性空间与线性变换

第五章　二次齐式

第一章　行列式

§1.1　引　言

在中学代数里，曾经介绍过二阶、三阶行列式，并讨论了利用二阶、三阶行列式解二元、三元线性方程组的方法。例如，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

当其系数行列式不为零时，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

对于三元线性方程组有相仿的结论。在这一章，我们要把这个结果推广到n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

为此，我们首先给出n阶行列式的定义并讨论它的性质和计算方法，以及利用n阶行列式来解n元线性方程组。这就是本章的主要内容。

§1.2　排　列

作为定义n阶行列式的准备，先介绍有关排列的知识。

定义1　由1，2，3，…，n组成的一个有序数组称为一个n元全排列（或称n元排列）。

显然，n元全排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

例1　写出全部3元全排列。

［解］　3元全排列的总数有$3!=6$个。它们是123，132，213，231，312，321。

$1234\cdots n$是一个n元全排列，这个全排列是按大小顺序排列的，称为自然顺序；其它的n元全排列都或多或少地破坏自然顺序。例如在4元全排列2143中，2排在1之前，4排在3之前，这样的排列顺序是与自然顺序相反的，我们称它为逆序。

定义2 在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，就称这两个数组成一个逆序。一个排列中，逆序的总数称为这个排列的逆序数。

例2 求4元全排列4213的逆序数。

[解] 在4元全排列4213中共有42，41，43，21等4个逆序，所以4元全排列4213的逆序数等于4。

为了方便起见，我们引进一个符号：如果$a_1a_2\cdots a_n$是一个n元全排列，我们用$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$来表示n元全排列$a_1a_2\cdots a_n$的逆序数。例如$\tau(21534)=3$。

例3 求$\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)$

[解] 在n元全排列$n, n-1, \cdots, 2, 1$中，n与后面的$n-1$个数都组成逆序；$n-1$与后面的$n-2$个数都组成逆序；…；2与后面的1组成逆序。所以

$$\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$
$$=\frac{(n-1)n}{2}$$

定义3 设$a_1a_2\cdots a_n$是一个n元全排列。如果$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$是一个偶数，则称n元全排列$a_1a_2\cdots a_n$是偶排列；如果$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$是一个奇数，则称n元全排列$a_1a_2\cdots a_n$是奇排列。

例如，4元全排列2431是偶排列；5元全排列45321是奇排列。

定义4 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列。这样一个变换称为对换。

例如，经过1与2对换，4元全排列2431就变成了4元全排列1432。

关于排列的奇偶性，我们有下列的基本事实。

定理1 每个对换改变排列的奇偶性。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

[证] 先看特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形。排列

$$\cdots\cdots jk\cdots\cdots \tag{1.2—1}$$

经过j与k对换变成

$$\cdots\cdots kj\cdots\cdots \tag{1.2—2}$$

排列(1.2—1)和(1.2—2)在两端…处的数字是一样的。显然，在排列(1.2—1)中如果j，k与其他的数构成逆序，则在排列(1.2—2)中仍然构成逆序；在排列(1.2—1)中如果j，k与其他的数不构成逆序，则在排列(1.2—2)中仍然不构成逆序。再者，如果在排列(1.2—1)中jk组成逆序，则在排列(1.2—2)中kj不组成逆序，即是说排列(1.2—2)的逆数序比排列(1.2—1)的逆序数减少一个；如果在排列(1.2—1)中jk不组成逆序，则在排列(1.2—2)中kj组成逆序，即是说排列(1.2—2)的逆序数比排列(1.2—1)的逆序数增加一个，不论是减少1还是增加1，排列(1.2—1)的逆序数的奇偶性总是变了。所以，在这个特殊的情形，定理是对的。

再看一般的情形，设排列为

$$\cdots\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots\cdots \tag{1.2—3}$$

经过j与k对换，排列（1.2—3）变成

$$\cdots\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots\cdots \tag{1.2—4}$$

从排列（1.2—3）变成排列（1.2—4），也可以通过一系列的相邻两数的对换来实现。从（1.2—3）出发，把k一位一位地向左移动，经过$s+1$次相邻两数的对换，（1.2—3）就变成

$$\cdots\cdots k j i_2 i_2 \cdots i_s \cdots\cdots \tag{1.2—5}$$

再从（1.2—5）出发，把j一位一位地向右移动，经过s次相邻两数的对换，（1.2—5）就变成（1.2—4）了。因此，j与k对换可以通过$2s+1$次相邻两数的对换来实现。$2s+1$是奇数。相邻两数的对换改变排列的奇偶性。显然，奇数次这样的对换的最终结果还是改变排列的奇偶性。

定理 2　在全部$n!$个n元全排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$n!/2$个。

［证］　假设在$n!$个n元全排列中有s个奇排列，t个偶排列，我们来证明$s=t$。先将s个奇排列的头两个数字都对换一下，就得s个不同的偶排列，但是偶排列一共有t个，所以$s\leqslant t$。再将t个偶排列的头两个数字都对换一下，就得到t个不同的奇排列，但是奇排列一共有s个，所以$t\leqslant s$。由以上即得$s=t$。因为$s+t=n!$。所以$s=t=n!/2$

定理 3　任意一个n元全排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$与具有自然顺序的全排列$123\cdots n(n-1)$都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与$n$元全排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$有相同的奇偶性。

［证］　用归纳法。当$n=1$时，结论显然成立。假设对$n-1$元全排列，结论是成立的。现在证明对n元全排列的情形结论也成立。

设在n元全排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$中，$j_n=n$，那么根据归纳法假设，$n-1$元全排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$可以经过一系列对换变成$12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换也就把$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$变成$12\cdots(n-1)n$。如果$j_n \neq n$，则对$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$作$j_n$和$n$的对换，它就变成$j'_1 j'_2 \cdots j'_{n-1} n$，这就归结成上面的情形，因此结论普遍成立。

相仿地，$12\cdots(n-1)n$也可用一系列对换变成$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$。又因为$123\cdots(n-1)n$是偶排列，所以根据定理1，所作对换的个数与$n$元全排列$j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$有相同的奇偶性。

§ 1.3　n阶行列式

在给出n阶行列式的定义之前，我们先对三阶行列式作一些分析。根据三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.3—1}$$

由（1.3—1）式我们看到：三阶行列式的每一项都是位于不同行与不同列的三个元素的乘积，并且所有这样的项（共有$3!=6$项）都出现。每项的三个元素都有两个下标，其中第一下标表示该元素所在的行数，第二下标表示该元素所在的列数。并且每项的第一下标都是按123排列的，而第二下标恰好是所有的三元全排列：123、231、312、321、213、132。前

三个排列是偶排列，在（1.3—1）式中相应的项的前面带有正号；后面三个排列是奇排列，在（1.3—1）式中相应的项的前面带有负号。

现在我们根据这个结构规律来定义n阶行列式。

定义 1 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.3—2)$$

等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.3—3)$$

的代数和，这里$j_1j_2\cdots j_n$是1，2，…，n的一个全排列。每一项(1.3—3)都按下列规则带有符号：当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，（1.3—3）带有正号，当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，(1.3—3)带有负号。因此，n阶行列式（1.3—2）可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.3—4)$$

这里Σ表示对所有n元全排列求和，故（1.3—4）式是$n!$项的代数和。

定义 1 表明，为了计算n阶行列式，首先作出所有可能由位于不同行不同列的n个元素构成的乘积。把构成这些乘积的元素的下标按行标排成自然顺序，然后由列标所组成的排列的奇偶性来决定这一项的符号。一般说来，直接用定义去计算行列式是十分麻烦的，但是对一些特殊的行列式还是可以用定义来计算的。

例 1 **计算行列式**

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

［解］ 这是一个四阶行列式，应该有$4!=24$项，但由于D中有十二个元素为0，所以24项中就有许多项为0，要想计算D的值，只要找出24项中的非0项就可以了。因为D中只有四个元素1，2，3，4是非0的 而且它们又正好位于不同的行不同的列，所以D只含有一项$1\cdot2\cdot3\cdot4$，又该项的行标已按自然顺序排列，列标的顺序是4321，故$D=(-1)^{\tau(4321)}1\cdot2\cdot3\cdot4=(-1)^6\cdot24=24$

例 2 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

［解］ 由于D的第一行除了a_{11}外其它元素都是0，于是想得非0项，第一行必须选a_{11}，而第二行不能选a_{21}，因为一列中只能选一个元素，所以在第二行只能选a_{22}。同理第三行只能选a_{33}，…，第n行只能选a_{nn}。这样D只有一项$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$。又该项的行标和列标都是按自然顺序排列的，故$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。这表明，下三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

特别是，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

§ 1.4 n阶行列式的基本性质

在n阶行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把n个元素的下标先按行标的自然顺序排列好。因为，数的乘法是可交换的，所以这n个元素的次序是可以任意写的。一般地，n阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.4—1}$$

其中行标$i_1i_2\cdots i_n$和列标$j_1j_2\cdots j_n$是两个n元全排列。利用对换，可以证明（1.4—1）的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1.4—2}$$

事实上，为了根据n阶行列式的定义来决定（1.4—1）的符号，就需要把（1.4—1）中的n个元素重新排列一下，使得它们的行标成为自然顺序，也就是排列成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{1.4—3}$$

于是它的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')} \tag{1.4—4}$$

现在来证明，(1.4—2)和(1.4—4)是相等的。我们知道，由（1.4—1）变到（1.4—3）可以经过若干次两元素的对换来实现。每作一次对换，元素的行标与列标所组成的排列$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$就都同时作一次对换，也就是$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$与$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$同时改变奇偶性，因而它们的和$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$的奇偶性不变，即是说，对（1.4—1）作一次两元素的对换不改变（1.4—2）的值。因此，在对（1.4—1）作若干次两元素的对换之后

有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}$$

$$= (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}$$

这就证明了（1.4—2）和（1.4—4）是相等的。

按（1.4—2）来决定n阶行列式中每一项的符号的好处在于，行标与列标的地位是对称的。因此，为了决定n阶行列式中每一项的符号，我们同样可以把每一项按列标的自然顺序排列，于是n阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad (1.4—5)$$

性质 1　行列互换，行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（上式的两个行列式互称转置行列式）。

［证］　因为元素a_{ij}位于上式左端行列式的第i行第j列上，所以元素a_{ij}位于上式右端行列式的第j行第i列上。今将上式右端的行列式按列标的自然顺序展开，得

$$右端 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= 按n阶行列式的原定义展开 = 左端$$

这个性质证明了行列式中行、列地位的对称性。由此可知，行列式中有关行的性质对列同样也成立。

例 1　证明上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

［证］　由性质1知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22}\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

性质2 行列式中某一行的公因子可以提出来，或者说，用一个数乘行列式的某一行（即用此数乘这一行的每个元素），就等于用这个数乘此行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2}\cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

［证］ 上式左端 $= \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$= k\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$

= 上式右端

推论 若行列式的某行元素全为0，则行列式为0（在性质2中令$k=0$即得）。

性质3 对换行列式中两行的位置，行列式反号。

［证］

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2}\cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对换第p行与第q行得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2}\cdots & a_{qn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若暂不问正负号则D的每一项可写成$a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$，这一项的元素也位于$D_1$的不同行不同列。因此，它也是$D_1$的一项。反之，$D_1$的每一项也是$D$的一项。于是$D$与

D_1含有相同的项。

其次，
$$a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4—6}$$
在D中的符号为 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$。因为$D$与$D_1$列的次序相同，只是行的次序经过一个对换，所以行标由自然顺序$(12\cdots p\cdots q\cdots n)$的偶排列变成奇排列$(12\cdots q\cdots p\cdots n)$，令$\tau(1\cdot 2\cdots q\cdots p\cdots n)=2s+1$（$s$为非负整数）则（1.4—6）在$D_1$中的负号应为

$$(-1)^{2s+1+\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$$

于是D与D_1反号，所以$D=-D_1$。

推论1 若行列式D有两行相同(即是说两行的对应元素相同)，则$D=0$。

［证］ 因为对换D的相同的两行，有$D_1=D$，又根据性质3，有$D=-D_1$，于是$D=-D$，所以$D=0$。

推论2 若行列式D有两行成比例，则$D=0$。

［证］ 因为把比例系数提出后，新行列式D_1有两行全同，所以$D_1=0$，从而$D=0$。

性质4 若行列式的某行元素都是两数之和，则该行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1}+c_{p1} & b_{p2}+c_{p2} & \cdots & b_{pn}+c_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2}\cdots & b_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2}\cdots & c_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

［证］

$$左端=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{pj_p}+c_{pj_p})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{pj_p}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{pj_p}\cdots a_{nj_n}$$

$$=右端$$

性质5 把行列式某一行的倍数加到另一行，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

[证]

$$右端 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 左端$$

行列式的性质就介绍到这里。最后再强调一下：上面所讲的性质2～5尽管是对行而言的，但对于列也同样成立。

例2 证明

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

[证]

$$左端 = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

例3 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

这个行列式的各列（行）元素之和都是$a+3$。因此，若逐次把第二列，第三列，第四列都加到第一列上，则第一列的元素都等于$a+3$，再把第一列的公因子$a+3$提出来，就可以把这个行列式化为便于计算的形式。这是一种常用的方法。

［解］

$$D=\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3$$

例 4　计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$$

［解］ 将第三行加到第一行、第四行加到第二行得到

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+c & b+d & c+a & d+b \\ a+c & d+b & c+a & b+d \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}=0$$

§ 1.5　n阶行列式按一行(列)展开

定义 1　在n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中选取某k个行及某k个列（$1\leqslant k\leqslant n$），由这k个行与这k个列相交处的元素，按原来次序组成的k阶行列式，叫做D的k阶子式。划去D中的元素a_{ij}所在的行及列后所得到的D的（$n-1$）阶子式M_{ij}叫做a_{ij}的余子式。又$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做a_{ij}的代数余子式。

例1 求下述行列式中第一行元素的余子式及代数余子式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

[解]

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4 \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=4$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-2$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=5$$

可以把一个n阶行列式通过它的（$n-1$）阶子式来表达。为此可证明下列结果：

1° 特殊情况，即对于D的第一行的元素a_{11}、a_{12}、…、a_{1n}及其余子式的：

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}+\cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n} \qquad (1.5-1)$$

2° 一般情况，即对于D的第i行（$i=1, 2, \cdots, n$）的元素a_{i1}、a_{i2}、…、a_{in}及其余子式的：

$$D=(-1)^{i-1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i}a_{i2}M_{i2}+\cdots + (-1)^{i-1+k-1}a_{ik}M_{ik}+\cdots+(-1)^{i-1+n-i}a_{in}M_{in} \qquad (1.5-2)$$

首先，分三步证明（1.5—1）：

（1）先考虑(1.5—1)的第一项$a_{11}M_{11}$。因为M_{11}中任何一项可写成$(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，所以$a_{11}M_{11}$中任何一项可写成$(-1)^{\tau(p_2\cdots p_n)}a_{11}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。显然它也是$D$中的一项，故$a_{11}M_{11}\subset D$。

（2）再考虑（1.5—1）的一般项$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}$。我们可以将此情况化为（1）。为此，把D的第k列依次和它前面相邻的列互换，经过$k-1$个互换后，D的第k列就移到新行列式B的第一列；

$$B=\begin{vmatrix} a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式的性质3有$D=(-1)^{k-1}B$。

要注意，上述列的互换，并未改变D中M_{1k}的列的相对位置。因此a_{1k}在B中的余子式仍然是M_{1k}，于是根据(1) $a_{1k}M_{1k}\subset B$。从而$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}\subset(-1)^{k-1}B=D$ $(k=1,2,\cdots,n)$。这就表明，(1.5—1)中的各项：

$a_{11}M_{11}$、$-a_{12}M_{12}$、…、$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}$、…、$(-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}$　　　(1.5—3)

都是D的一部分。

因为M_{1k} $(k=1,2,\cdots,n)$是$(n-1)$阶行列式，所以$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}$含有$(n-1)!$项。从而(1.5—3)中n个乘积项之和有$n(n-1)!=n!$项。

(3) 若我们还能证明：(1.5—3)的n个乘积项中，任何两个乘积都没有公共项，则(1.5—3)的n个乘积项之和就是D的全部了，亦即(1.5—1)得证。

我们知道，$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}$中的各项都含有D中第一行的元素a_{1k}，而$(-1)^{t-1}a_{1t}M_{1t}$ $(t\neq k)$中的各项都含有D中第一行的元素a_{1t}。因为a_{1k}和a_{1t}都在D的第一行，但D中每一项只能含第一行的一个元素，所以D中的项含a_{1k}的就不含a_{1t}，故$(-1)^{k-1}a_{1k}M_{1k}$和$(-1)^{t-1}a_{1t}M_{1t}$ $(t\neq k)$没有公共项。

其次，我们再来证明(1.5—2)。我们把行列式D的第i行依次和它前面相邻的行互换，经过$(i-1)$个互换后，D的第i行就移到新行列式C的第一行，其它行、列的相对位置未变。因此，a_{ij} $(j=1,2,\cdots,n)$在C中的余子式就是a_{ij} $(j=1,2,\cdots,n)$，在D中的余子式M_{ij} $(j=1,2,\cdots,n)$。由已证得的(1.5—1)有

$$C=a_{i1}M_{i1}-a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{k-1}a_{ik}M_{ik}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}M_{in}$$

但是$D=(-1)^{i-1}C$，所以

$$D=(-1)^{i-1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i-1+k-1}a_{ik}M_{ik}+\cdots$$
$$+(-1)^{i-1+n-1}a_{in}M_{in}$$

故(1.5—2)得证。

综上所述可得下面的主要定理。

定理1　n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i-1+n-1}a_{in}M_{in}$$
$$=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$
$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(1.5—4)$$

这个定理很有用，习惯上我们把它说成：n阶行列式D按它的第i行展开。即是说，n阶行列式D的值等于它任意一行的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积之和。

假如把行换成列的话，也可得到n阶行列式D按它的第j列展开的公式：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1.5—5)$$

上面的定理1是说，D的第i行中各元素分别与它的代数余子式乘积之和等于D。现在我们要问：D的第j行中各元素分别与D的第i行（$i\neq j$）各对应元素的代数余子式相乘积之和：$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}$（$i\neq j$）等于什么？回答这个问题，有下列定理。

定理2 设有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果$i\neq j$，则$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{ij}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0$。

［证］ 由定理1已知

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

假如把行换成列的话，又有下列公式：

$$a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots+a_{ni}A_{ni}=0 \qquad (i\neq j)$$

这两个公式在理论上是重要的。在计算行列式时，直接应用展开式(1.5—4)或(1.5—5)并不一定能简化计算，因为把计算一个n阶行列式换成计算n个（$n-1$）阶行列式，并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多的0时，应用公式(1.5—4)或(1.5—5)才有意义。所以在计算行列式时，我们常常先应用行列式的性质把行列式改变，使它某一行或某一列含有较多的0，然后再应用公式（1.5—4）或（1.5—5）就比较容易了。下面举例

说明。

例2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

［解］

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -13 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=30+10=40$$

例3 证明范得蒙（$A.T.Vandermonde$）行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j) \qquad (1.5-6)$$

［证］ 我们对n作归纳法。

1°当$n=2$时

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=(x_2-x_1)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j)$$

所以（1.5—6）成立。

2°假设对于$n-1$时（1.5—6）成立。现在来证明对于n时（1.5—6）也成立。我们根据行列式的性质，试用消去法将范得蒙行列式D的第1列的元素除去第一个元素1外，其它元素均化为0。首先从最后第n行减去第$n-1$行的x_1倍，再从第$n-1$行减去第$n-2$行的x_1倍，继续这样进行，直到第二行减去第一行的x_1倍，就得