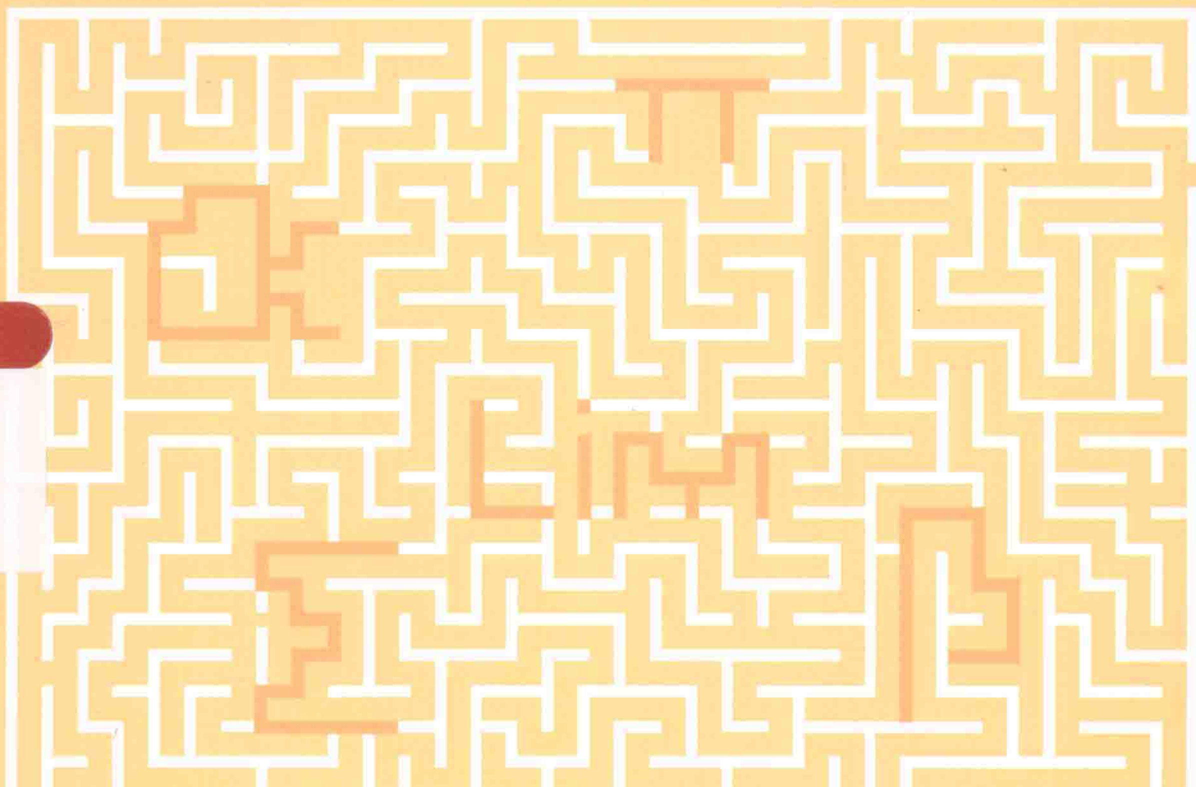
高等数学

(下册)

易正俊　邓林　主编



清华大学出版社

高等数学

(下册)

易正俊　邓　林　主　编
张　敏　赵品勇　副主编

清华大学出版社

内容简介

本书是专为经济管理类本科生学习高等数学及其经济应用而编写的教材. 全书共 6 章，主要内容有：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、级数、微分方程、差分方程. 每节配有 A,B 两组习题，每章配有总习题. 书后附有部分习题参考答案或提示.

本书讲解简明扼要，图文并茂，覆盖面广，为学生提供进一步深造所必需的理论基础知识，同时加强案例教学，注重学生应用能力的提升. 本书也可以作为非数学专业本科高等数学教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/易正俊、邓林主编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-38845-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①易… ②邓… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 000880 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：17 **字 数**：411 千字
版 次：2015 年 2 月第 1 版 **印 次**：2015 年 2 月第1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：30.00 元

产品编号：062940-01

前言

编者从事“高等数学”课程教学多年，采用的教材主要偏重于理论，淡化了背景知识和应用案例；期终检测主要是偏重于学生的运算能力，很少涉及概念的理解型题目和应用性较强的题目.这两个方面的原因使得教师对实际有用的知识和培养学生的应用能力的典型案例几乎省去不讲，学生学习这门课程也只是应付测试，很难把所学的高等数学知识用于解决实际问题，极大地影响了学生的理论创新和应用创新能力的培养，因为创新思维来源于数学思想和方法.要提升培养学生的质量，需要完善教材的内容体系和对学生的检测标准.

全国教学指导委员会根据经济管理领域学生对高等数学这门课程的要求，提出了经济管理类高等数学课程教学改革设想和指导意见，收集数学在经济管理中的应用案例，引入教学和教材，从解决经济管理领域中适当的实际问题入手，在建立数学模型解决这些实际问题的过程中引入数学概念、思想和方法.在教学实践中注意改革创新，逐步形成适应现代社会经济管理实际的数学教学内容体系.旨在服务于经管专业学生创新发展的需求，提升职业能力，注重解决实际问题，提高在实践中发现问题、分析问题和解决问题的能力.

“高等数学”是经济管理类专业学生的一门重要公共基础课程，在经济管理领域有广泛的应用.教材的编写是由易正俊教授组织具有丰富教学经验的一线教师邓林、张敏、赵品勇、罗广萍、彭智军、袁玉兴、谭宏等讨论编写.教材具有以下几个方面的特色：

(1) 充分强调高等数学基础理论的重要地位，所有的基本概念和基本理论尽可能从研究的背景引入，选取学生熟悉的背景知识，采用几何图形等方法加强学生对基本理论和基本方法的理解，淡化比较复杂的理论推导，增强教材的可读性和可接受性.培养学生熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达自己数学思想的素质.

(2) 加强案例教学，突出专业需求导向，案例的选取参考了国内外优秀教材，博采众家之长，体现案例的实用性和趣味性，激发学生学习的积极性.培养学生主动抓住数学问题的背景和本质，善

于对现实经济领域中的现象和过程进行合理的简化和量化，建立数学模型的素质.

(3) 重视反例在学生理解和掌握基本概念和基本理论中的重要作用，对读者易误解的概念和理论进行必要的注释.

(4) 习题的设置依据培养学生不同层次和不同要求分为 A，B 两组，A 组主要是训练学生的基础知识，B 组是能力提升，训练学生的创新思维.

本书共分 6 章，第 7 章由张敏和袁玉兴编写，第 8 章由罗广萍编写，第 9 章由易正俊和袁玉兴编写，第 10 章由谭宏编写，第 11 章由邓林编写，第 12 章由赵品勇和彭智军编写，书中的图形由易正俊绘制. 重庆大学数学与统计学院穆春来教授审阅了全书.

由于编者学识有限，书中不妥之处，真诚地欢迎读者批评指正，以期不断完善.

编 者

2014 年 11 月

目录

第7章 向量代数与空间解析几何 1

7.1 向量及其运算 …… 1
7.1.1 向量的概念 …… 1
7.1.2 向量的运算 …… 2
习题7.1 …… 7
7.2 空间直角坐标系与向量的坐标表示 …… 8
7.2.1 空间直角坐标系 …… 8
7.2.2 空间两点间的距离 …… 8
7.2.3 向量的坐标表示 …… 9
7.2.4 向量的模及其方向余弦 …… 10
7.2.5 向量线性运算的坐标表示 …… 11
7.2.6 数量积的坐标表达式 …… 12
7.2.7 向量积的坐标表达式 …… 12
*7.2.8 混合积的坐标表达式 …… 14
习题7.2 …… 14
7.3 平面与直线 …… 15
7.3.1 平面及其方程 …… 15
7.3.2 直线及其方程 …… 19
7.3.3 直线与平面的夹角 …… 21
7.3.4 平面束 …… 22
习题7.3 …… 24
7.4 空间曲面与曲线 …… 25
7.4.1 空间曲面 …… 25
7.4.2 空间曲线及其方程 …… 28
7.4.3 空间曲线在坐标面上的投影 …… 30
习题7.4 …… 31
7.5 二次曲面 …… 32
7.5.1 椭球面 …… 32
7.5.2 双曲面 …… 33
7.5.3 抛物面 …… 34

习题 7.5 …… 35
总习题 7 …… 35
第 8 章 多元函数微分学及其应用 …… 37
8.1 多元函数的基本概念 …… 37
8.1.1 平面点集 …… 37
8.1.2 n 维空间 …… 39
8.1.3 二元函数的概念 …… 39
8.1.4 二元函数的图形 …… 40
8.1.5 二元函数的极限 …… 41
8.1.6 二元函数的连续性 …… 42
8.1.7 二元连续函数在有界闭区域上的性质 …… 43
习题 8.1 …… 44
8.2 偏导数 …… 45
8.2.1 偏导数的定义及其计算法 …… 45
8.2.2 偏导数的几何意义 …… 47
8.2.3 偏导数在经济分析中的应用举例 …… 48
8.2.4 高阶偏导数 …… 49
习题 8.2 …… 50
8.3 全微分 …… 51
8.3.1 全微分的概念 …… 51
8.3.2 全微分的应用 …… 54
习题 8.3 …… 56
8.4 复合函数的求导法则 …… 57
8.4.1 复合函数的偏导数法则 …… 57
8.4.2 全微分形式不变性 …… 61
习题 8.4 …… 62
8.5 隐函数的微分法 …… 63
8.5.1 一个方程确定的隐函数 …… 63
8.5.2 方程组确定的隐函数 …… 66
习题 8.5 …… 70
8.6 多元函数微分法在几何中的应用 …… 71
8.6.1 空间曲线的切线及法平面 …… 71
8.6.2 曲面的切平面及法线 …… 73
习题 8.6 …… 75
8.7 方向导数与梯度 …… 76
8.7.1 方向导数 …… 76
8.7.2 梯度 …… 78
8.7.3 二元函数的等值线 …… 80

习题 8.7 …………………………………………………………… 80
8.8　多元函数的极值…………………………………………………… 81
8.8.1　多元函数的极值 ………………………………………… 81
8.8.2　拉格朗日条件极值 ……………………………………… 84
8.8.3　多元函数的最大值与最小值 …………………………… 86
习题 8.8 ……………………………………………………………… 87
总习题 8 ……………………………………………………………… 88

第 9 章　重积分 ……………………………………………………… 90

9.1　二重积分…………………………………………………………… 90
9.1.1　二重积分的背景 ………………………………………… 90
9.1.2　二重积分的定义 ………………………………………… 91
9.1.3　二重积分的性质 ………………………………………… 93
9.1.4　二重积分的计算 ………………………………………… 96
习题 9.1 ……………………………………………………………… 106
9.2　三重积分 ………………………………………………………… 108
9.2.1　背景实例…………………………………………………… 109
9.2.2　三重积分的概念…………………………………………… 109
9.2.3　三重积分的性质…………………………………………… 109
9.2.4　三重积分的计算…………………………………………… 110
习题 9.2 ……………………………………………………………… 121
9.3　重积分的应用 …………………………………………………… 122
9.3.1　曲面的面积………………………………………………… 122
9.3.2　质心………………………………………………………… 125
9.3.3　转动惯量…………………………………………………… 127
9.3.4　引力………………………………………………………… 129
习题 9.3 ……………………………………………………………… 130
总习题 9 ……………………………………………………………… 130

第 10 章　级数 ……………………………………………………… 132

10.1　数项级数 ……………………………………………………… 132
10.1.1　数项级数的基本概念 ………………………………… 132
10.1.2　级数的基本性质 ……………………………………… 133
习题 10.1 …………………………………………………………… 135
10.2　正项级数 ……………………………………………………… 136
习题 10.2 …………………………………………………………… 143
10.3　一般项级数 …………………………………………………… 144
10.3.1　交错级数 ……………………………………………… 145
10.3.2　级数的绝对收敛与条件收敛 ………………………… 146

*10.3.3 绝对收敛级数的性质 …… 147
习题 10.3 …… 150
10.4 幂级数 …… 151
10.4.1 函数项级数的一些基本概念 …… 151
10.4.2 幂级数的基本概念 …… 152
10.4.3 幂级数的运算 …… 155
10.4.4 幂级数的性质 …… 156
习题 10.4 …… 158
10.5 函数展开成幂级数 …… 159
10.5.1 泰勒级数 …… 159
10.5.2 函数展开成幂级数 …… 161
习题 10.5 …… 164
10.6 级数在经济中的应用 …… 165
10.6.1 银行通过存款和放款“创造”货币问题 …… 165
10.6.2 投资费用 …… 165
10.6.3 储蓄问题 …… 166
习题 10.6 …… 167
10.7 函数幂级数展开式的应用 …… 167
10.7.1 近似计算 …… 167
10.7.2 欧拉公式 …… 168
习题 10.7 …… 169
10.8 傅里叶级数 …… 170
10.8.1 三角级数 …… 170
10.8.2 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数 …… 171
10.8.3 奇偶函数的傅里叶级数 …… 175
10.8.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 …… 177
习题 10.8 …… 179
总习题 10 …… 179

第 11 章 微分方程 …… 182

11.1 微分方程的基本概念 …… 182
习题 11.1 …… 184
11.2 可分离变量方程 …… 184
习题 11.2 …… 186
11.3 齐次方程 …… 187
11.3.1 齐次方程的定义及求解 …… 187
*11.3.2 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$型微分方程的解法 …… 189
习题 11.3 …… 190

11.4　一阶线性微分方程 ………………………………………………… 191
11.4.1　一阶线性方程 ………………………………………………… 191
11.4.2　伯努利方程 ………………………………………………… 193
习题 11.4 ………………………………………………………………… 194
11.5　一阶微分方程应用和举例 ………………………………………… 195
11.5.1　放射性物质的衰减问题 …………………………………… 195
11.5.2　抛物线的光学性质 ………………………………………… 195
11.5.3　流体混合问题 ……………………………………………… 196
11.5.4　经济应用问题 ……………………………………………… 197
12.5.5　在动力学中的运用 ………………………………………… 198
习题 11.5 ………………………………………………………………… 199
*11.6　全微分方程 ……………………………………………………… 199
11.6.1　全微分方程的概念 ………………………………………… 199
11.6.2　全微分方程的解法 ………………………………………… 199
11.6.3　积分因子的概念 …………………………………………… 200
习题 11.6 ………………………………………………………………… 201
11.7　可降阶的二阶微分方程 …………………………………………… 201
11.7.1　$y''(x)=f(x)$型的微分方程 ……………………………… 201
11.7.2　$F(x,y',y'')=0$ 型的微分方程 ………………………… 202
11.7.3　$F(y,y',y'')=0$ 型的微分方程 ………………………… 204
11.7.4　恰当导数方程 ……………………………………………… 206
习题 11.7 ………………………………………………………………… 207
11.8　二阶线性微分方程 ………………………………………………… 207
11.8.1　二阶线性微分方程的概念 ………………………………… 208
11.8.2　二阶线性齐次微分方程解的结构 ………………………… 208
11.8.3　二阶线性非齐次微分方程解的结构 ……………………… 211
习题 11.8 ………………………………………………………………… 213
11.9　二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …………………………… 213
习题 11.9 ………………………………………………………………… 215
11.10　二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 ………………………… 215
11.10.1　二阶常系数非齐次线性微分方程的概念 ………………… 215
11.10.2　$f(x)=p_m(x)e^{\alpha x}$型 ……………………………… 216
11.10.3　$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$型 …… 218
习题 11.10 ……………………………………………………………… 220
11.11　欧拉方程 ………………………………………………………… 220
习题 11.11 ……………………………………………………………… 221
*11.12　微分方程的幂级数解法 ………………………………………… 222
习题 11.12 ……………………………………………………………… 223
*11.13　线性微分方程组 ………………………………………………… 223

习题 11.13 …… 227
总习题 11 …… 227
第 12 章 差分方程 …… 230
12.1 差分及差分方程的概念 …… 230
12.1.1 差分的定义 …… 230
12.1.2 差分方程的概念 …… 231
12.1.3 常系数线性差分方程解的结构 …… 231
习题 12.1 …… 232
12.2 一阶常系数线性差分方程 …… 232
12.2.1 一阶常系数齐次线性差分方程通解的求法 …… 233
12.2.2 一阶常系数非齐次线性差分方程的求解方法 …… 233
12.2.3 差分方程在经济学中的应用 …… 236
习题 12.2 …… 237
12.3 二阶常系数线性差分方程 …… 238
12.3.1 二阶常系数线性齐次差分方程的通解 …… 238
12.3.2 二阶常系数非齐次线性差分方程的特解 …… 239
习题 12.3 …… 240
总习题 12 …… 241
附录 部分习题答案 …… 242
参考文献 …… 259

第 7 章 向量代数与空间解析几何

空间解析几何通过坐标法把空间中的点与有序数组对应起来，把空间中的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题. 平面解析几何知识对学习一元函数微积分是必不可少的，同样地，空间解析几何知识对学习多元函数微积分是不可缺少的.

本章首先介绍向量及其代数运算，然后以向量为工具研究空间的直线与平面，最后讨论一些特殊的空间曲线与曲面.

7.1 向量及其运算

7.1.1 向量的概念

在自然界中经常会遇到两种量，一种是只有大小的量，这种量称为数量，如年龄、身高、体温等；而另一种是既有大小又有方向的量，这种量称为**向量**，例如速度、力、位移等. 向量可以用黑斜体英文字母表示，如，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$，也可用白斜体字母上加箭头来表示，如$\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$.

向量的几何表示法 由于向量既有大小又有方向，因此在几何上向量常用一条带有方向的线段(称为有向线段)来表示，如图 7.1 所示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点 M_2 为终点的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为**向量的模**，记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\vec{a}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，方向可以看作是任意的.

如果两个向量的大小相等、方向相同，则称这**两个向量相等**. 与起点位置无关的向量称为自由向量. 在高等数学中，如无特别声明，今后所讨论的向量都是自由向量.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反的向量称为 **$\boldsymbol{a}$ 的负向量**，记为$-\boldsymbol{a}$，如图 7.2 所示. 如果两个非零向量的方向相同或相反，称这**两个向量平行**(或称这**两个向量共线**)，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

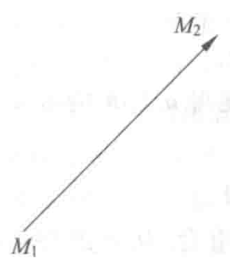


图 7.1

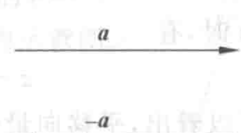


图 7.2

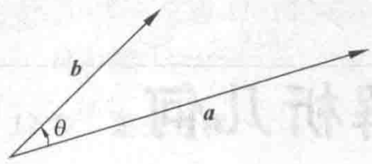


图　7.3

定义 7.1　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将它们平移使起点重合，此时两向量所在射线之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，如图 7.3 所示.

因为方向一致或相反的两向量平行，所以夹角为 0 或 π 的两个向量平行. 而夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 的两个向量称为**垂直向量**.

7.1.2　向量的运算

(1) 向量的加法

定义 7.2　设有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所构成的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

上述作出两向量之和的方法称为向量加法的**三角形法则**，如图 7.4(a)所示. 三角形法则的实际背景是：设一物体移动的位移为 $\boldsymbol{a}$，再移动位移 $\boldsymbol{b}$，其结果相当于直接移动位移 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因此，三角形法则的物理意义是位移的合成. 向量加法的三角形法则可推广到多个向量相加的情形.

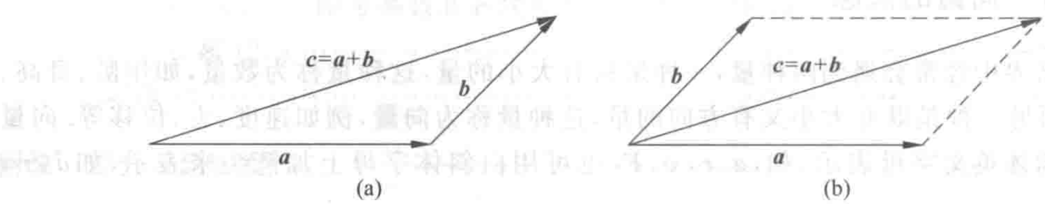


图　7.4

类似地也可以用平行四边形法则定义向量的加法.

定义 7.3　设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，从公共起点到对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7.4(b)所示.

若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在同一直线上(共线)，则它们的和规定为：

① 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的共同方向，其模为 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{b}$ 的模之和.

② 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较长的向量的方向，其模为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

平行四边形法则的实际背景可以看作力的合成或速度的合成.

(2) 向量的减法

定义 7.4　规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{c}$ 为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

上式表明，把向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上，便得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7.5(a)所示. 特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

从图 7.5(b)可以看出，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，从 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向 $\boldsymbol{a}$ 的终点构成的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

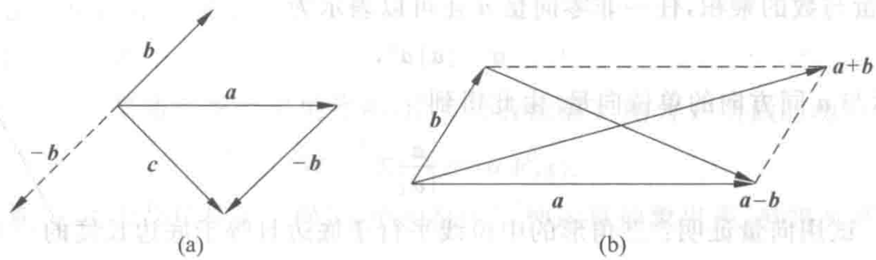


图 7.5

(3) 数与向量的乘法

定义 7.5 假设 λ 是一个实数，$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 模和方向规定如下：

① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$；

② 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

定理 7.1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是：存在唯一实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 必要性 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则 $|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，λ 取正，此时，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，λ 取负，此时，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$；当 $\lambda<0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\pi$.

再证实数 λ 的唯一性 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad 即\quad |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

注意 当 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量时，结论相应写成 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

(4) 向量的运算规律

① 向量的加法满足下列运算规律：

交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，根据向量加法的三角形法则：将前一向量的终点作为后一向量的起点相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，从第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量就是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和.

如图 7.6 是 5 个向量和 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$ 的示意图.

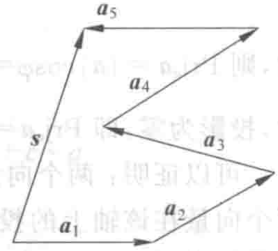


图 7.6

② 数与向量的乘法满足下列运算规律：

结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用向量与数的乘积，任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 还可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ},$$

其中 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 由此得到

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

例 7.1 试用向量证明：三角形的中位线平行于底边且等于底边长度的一半.

解 如图 7.7 所示，设 D 是 AB 的中点，E 是 AC 的中点，则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

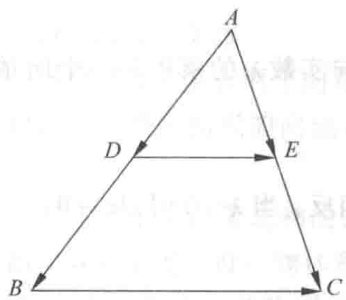


图 7.7

因为

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以

$$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}\text{且}|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

例 7.2 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求证：$A,B,D$ 三点共线.

证 由$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b})+8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$$=2\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AB},$$

故$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$同向，即$\angle ABD=\pi$，所以 A,B,D 三点共线.

例 7.3 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的平分线方向的向量 $\boldsymbol{d}$.

证 设 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，$\boldsymbol{b}^{\circ}$ 分别表示与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，则

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\quad \boldsymbol{b}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

而以 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，$\boldsymbol{b}^{\circ}$ 为邻边构成的平行四边形为菱形，其对角线平分对角，于是

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}^{\circ}+\boldsymbol{b}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

这就是与 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，$\boldsymbol{b}^{\circ}$ 夹角的平分线平行的向量.

(5) 向量的投影

定义 7.6 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和与向量 $\boldsymbol{u}$ 重合的轴(简称 $\boldsymbol{u}$ 轴)，用 φ 表示它们之间的夹角 $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，称数量 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的投影，记为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi.$$

图 7.8 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的投影，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB$.

投影可正可负：当 $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$ 时，则 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB>0$，投影为正；当 $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi$ 时，则 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=AB<0$，投影为负；当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，投影为零，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=0$(此时为一个点).

可以证明：两个向量的和在同一轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和. 此结论可推广到 n 个向量的情况.

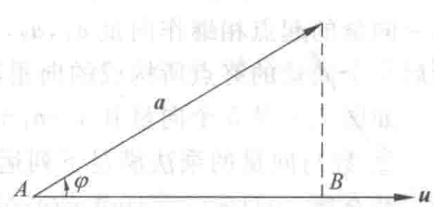


图 7.8

(6) 向量的数量积(点积)

① 数量积的定义

在物理学中,如果质点受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用,沿直线有位移 $\boldsymbol{s}$,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}}).$$

功是一个数量,它由力与位移唯一确定.把向量的这种运算抽象出来,就得到两个向量数量积的定义.

定义 7.7 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{7.1}$$

两个向量的数量积也称为向量的**点积**或**内积**.由数量积的定义,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

② 数量积的性质

性质 1 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量).

证 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,所以 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

性质 2 设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

性质 3 向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,结论显然成立.当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$.

必要性 因 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$.

充分性 因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,所以

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0,\quad 于是\quad (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}.$$

性质 4 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

根据一个向量在另一个向量上的投影及数量积的定义可得性质 4.

③ 数量积的运算规律

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

例 7.4 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=3$.

例 7.5 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=3$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{c}|^2=0,$$

代入$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$,并将三式相加,得

$$2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=-14,$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-7.$$

(7) 向量的向量积(叉积)

① 向量积的定义

定义 7.8 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,作向量 $\boldsymbol{c}$ 使得:

$\boldsymbol{c}$ 的大小为$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 顺序满足右手规则,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

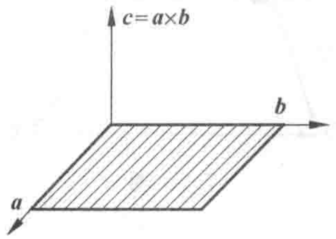


图 7.9

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积也称为向量的外积或叉积.

向量积的模的几何意义是:向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积,如图 7.9 所示.

② 向量积的性质

性质 1 设 $\boldsymbol{a}$ 是任意向量,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

性质 2 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时,结论显然成立;当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时,$|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$.

必要性 因 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$,于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0,\quad 故\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

充分性 因 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$. 由$|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$,得 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$,所以$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$.

③ 向量积的运算规律

负交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$;

结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

(8) 向量的混合积

① 混合积的定义

定义 7.9 设有三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,再作向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的数量积,得到的数$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,称为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积,记为$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$,即

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

混合积的几何意义 设 V 为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻棱的平行六面体的体积,如图 7.10 所示,可知

$$V=|[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}|,$$

即混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻棱的平行六面

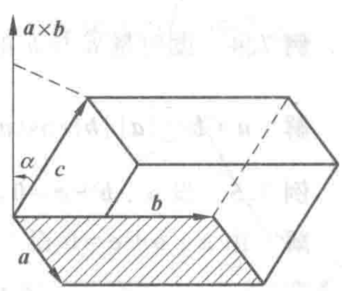


图 7.10