# 中学数学手册

李忠映
张　森　编

上集

云南人民出版社

# 中学数学手册

上 册

李忠映 张 森 编

云南人民出版社

# 前　　言

本手册是根据全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）的要求选取材料编写的。内容包括：基本概念、定义、定理、中学数学常用的基本公式，并配备适当的例题。分上下册出版。可供中学生、上山下乡知识青年及中学数学教师参考使用。

本手册在编写过程中，得到了昆明师范学院数学系许多教师的支持和帮助，特别是朱德祥教授、吕锡麟副教授、冯棠轩副教授和宋文麟副教授对书稿的大部分内容进行了认真修改，在此深表谢意。由于编者水平有限和时间仓促，书中一定存在不少问题，诚恳希望读者批评指正。

编　　者

1979年7月

# 上册目录

**第一章 初等代数**
一 数的基本运算规律…………………（1）
二 乘法、除法和因式分解公式………（1）
三 因式分解………（5）
四 幂的运算………（7）
五 分式……………（8）
六 比例……………（14）
七 平均值…………（18）
八 不等式…………（18）
九 不等式方程的解…………………（21）
十 方程……………（24）
**第二章 行列式**
一 行列式的概念…（33）
二 一般行列式的展开…………………（36）
三 行列式的主要性质…………………（37）
**第三章 方程组**
一 二元一次方程组…………………（40）
二 三元一次方程组…………………（43）
三 用高斯法解方程组……………（46）
四 用克拉姆法则解n元一次方程组及齐次方程组…（47）
五 简单的二元二次方程组…………（49）
六 无理方程举例…（52）
**第四章 对数**…………………（57）
**第五章 数列**
一 概念……………（64）
二 等差数列和等比数列……………（65）
三 某些数列的前n项和…………………（66）
**第六章 复数**…………………（68）
**第七章 排列、组合与牛顿二项式定理**
一 排列……………（77）

二　全排列…………（77）
三　组合……………（79）
四　牛顿二项式……（80）

第八章　数学归纳法
……………………（83）

第九章　初等几何
第一部分　平面图形
一　基本概念………（89）
二　三角形…………（98）
三　四边形…………（105）
四　多边形…………（108）
五　圆………………（114）
六　作图问题………（121）
七　几何变换………（125）
第二部分　立体图形
一　空间直线和平面（133）
二　多面体…………（136）

第十章　三角
一　三角函数………（146）
二　三角形的解法…（156）
三　反三角函数……（160）
四　三角方程………（167）

第十一章　向量
一　定义……………（173）
二　向量的运算……（177）
三　向量的乘积……（178）

第十二章　解析几何
第一部分　平面解析几何
一　直角坐标系……（190）
二　曲线和方程之间
　　的关系…………（194）
三　直线方程………（194）
四　圆锥曲线………（208）
　　圆………………（208）
　　椭圆……………（211）
　　双曲线…………（214）
　　抛物线…………（216）
　　圆锥曲线的切线
　　和法线…………（218）
　　圆锥曲线的直径（221）
五　坐标轴的变换…（223）
六　一般二次曲线的
　　讨论……………（227）
七　极坐标…………（230）
八　参数方程………（233）
第二部分　立体解析几何
一　空间直角坐标系（239）
二　平面……………（242）
三　直线……………（246）
四　线、面间的相互关
　　系………………（247）
五　常见的二阶曲面
　　…………………（250）

# 第一章　初等代数

## 一　数的基本运算规律

**1.交换律**　　$a+b=b+a$；　$ab=ba$.

**2.结合律**　　$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(ab)c=a(bc)$.

**3.分配律**　　$(a+b)c=ac+bc$；

$$(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=a\div c+b\div c.$$

## 二　乘法、除法和因式分解公式

**1.多项式的乘法**

$$(a+b+c)x=ax+bx+cx.$$

$a$，$b$，$c$，$x$可表示多项式和单项式.若$x=m+n$，

则　$$(a+b+c)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)$$
$$=am+an+bm+bn+cm+cn.$$

**例**　$(3x^2-2x+5)(4x+2)=12x^3-8x^2+20x+6x^2-4x+10=12x^3-2x^2+16x+10.$

**2.多项式的除法**

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}\ (x\neq0).$$

$a$，$b$，$c$，$x$是任意的表示式．若$a$，$b$，$c$，$x$是单项式，那么上式左边表示单项式除多项式.

**例** $\dfrac{3a^2b+11ab^2}{ab}=\dfrac{3a^2b}{ab}+\dfrac{11ab^2}{ab}=3a+11b$.

若$a$，$b$，$c$是单项式，而$x$是多项式，那么$\dfrac{a+b+c}{x}$ ($x\neq 0$) 是多项式除多项式，其商不一定是多项式.

**例** $\dfrac{a^2+x^2}{a+x}$其商不可能表为多项式；但$\dfrac{a^2-x^2}{a+x}=a-x$其商就是多项式.

如多项式$f(x)$除以多项式$g(x)$，商为$q(x)$和余项$r(x)$，应满足两个要求：1）应该表为等式：$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$；2）$r(x)$的次数应小于$g(x)$的次数或$r(x)=0$.

**例** $\dfrac{8a^3+16a^2-2a+4}{4a^2-2a+1}=2a+5$　余项为$6a-1$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8a^3+16a^2-2a+4 & 4a^2-2a+1 \\ \cline{3-3}
-) & 8a^3-4a^2+2a & 2a+5\cdots\cdots\text{商} \\ \hline
 & 20a^2-4a+4 & \\
-) & \underline{20a^2-10a+5} & \\
 & 6a-1\cdots\cdots\text{余项.} &
\end{array}
$$

注：有时余项$r(x)$不包含主要的字母，只包含常数.

**例** $(x^3-3x^2+5x-1)+(x-2)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2+5x-1 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2 & x^2-x+3\cdots\cdots\text{商} \\ \hline
-x^2+5x & \\
-x^2+2x & \\ \hline
3x-1 & \\
3x-6 & \\ \hline
5\cdots\cdots\text{余项.} &
\end{array}
$$

如果以$x=2$代入$x^3-3x^2+5x-1$，那么余项为

$$2^3-3\cdot2^2+5\cdot2-1=5.$$

**例** 求$x^4+7$除以$x+2$的余项.

设 $x=-2$,

则余项为：$r(x)=(-2)^4+7=23$.

由上例得到定理：多项式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m \qquad (1)$$

除以$x-l$的余项为

$$r(x)=a_0l^m+a_1l^{m-1}+a_2l^{m-2}+\cdots+a_m.$$

**证明：** $\because$ $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=(x-l)q(x)+r(x)$.
以$x=l$代入上式，则 $(x-l)q(x)=0$,

$\therefore$ $a_0l^m+a_1l^{m-1}+\cdots+a_m=r(l)$.

当$r(l)=0$时，$l$叫做方程

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0 \quad (2)$$ 的根.

**例** 多项式$x^3+5x^2-18$除以$x+3$的余项为0．因此$(-3)$是此方程的根．事实上$(-3)^3+5(-3)^2-18=0$.

反之，若$l$是方程（2）的根，那么（2）式左边部分除以$x-l$余项为0．

**3.乘法公式**

$$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

**例1** $104^2=(100+4)^2=10000+800+16=10816$;

**例2** $98^2=(100-2)^2=10000-400+4=9604$;

**例 3** $71\times69=(70+1)(70-1)=70^2-1=4899$；

**例 4** $12^3=(10+2)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot2+3\cdot10\cdot2^2+2^3$

$=1728$；

**例 5** $99^3=(100-1)^3=1000000$

$-3\cdot10000\cdot1+3\cdot100\cdot1-1=970299$。

注意：$(a+b)^2\neq a^2+b^2$， $(a+b)^3\neq a^3+b^3$。

**4.二项式$x^m\pm a^m$除以$x\pm a$**

$$(x^m-a^m)\div(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots+a^{m-1}.$$

$x$是降幂排列，$a$是升幂排列，$a$的次数与$x$的次数之和等于$m-1$（$m$为正整数）.

**例** $(x^4-a^4)\div(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3$；

$(x^5-a^5)\div(x-a)=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$.

当$m$为偶数时

$$(x^m-a^m)\div(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots-a^{m-1}.$$

（正、负号相间）.

**例** $(x^4-a^4)\div(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3$；

$(x^6-a^6)\div(x+a)=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5$.

当$m$为偶数时，$x^m-a^m$能被$x-a$和$x+a$整除，也能被$x^2-a^2$整除.

**例** $(x^4-a^4)\div(x^2-a^2)=x^2+a^2$；

$(x^6-a^6)\div(x^2-a^2)=x^4+a^2x^2+a^4$；

$(x^8-a^8)\div(x^2-a^2)=x^6+a^2x^4+a^4x^2+a^6$.

但当$m$为奇数时，$x^m-a^m$不能被$x+a$整除.

**例** $x^3-a^3$或$x^5-a^5$不能被$x+a$整除.

$x^m+a^m$（$m$为正整数）不能被$x-a$整除.

$x^m+a^m$（$m$为奇数）能被$x+a$整除．

**例**　$(x^5+a^5)\div(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$．

一般地$(x^m+a^m)\div(x+a)=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\cdots$
$-xa^{m-2}+a^{m-1}$．

## 三　因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解．

**1．提取公因式法**

**例**　$7a^2xy-14a^5x^3=7a^2x(y-2a^3x^2)$；

$abc+abd+3ab=ab(c+d+3)$．

**2．分组提取公因式法**

**例**　$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)\cdot(x+y)$．

$$10a^3-6b^3+4ab^2-15a^2b=5a^2(2a-3b)+2b^2(2a-3b)$$
$$=(2a-3b)(5a^2+2b^2)．$$

$$6ax-2bx+9by-27ay=2x(3a-b)+9y(b-3a)$$
$$=(3a-b)(2x-9y)．$$

**3．利用公式进行因式分解**

**例1**　$4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$．

$(x-y)^2-z^2=(x-y+z)(x-y-z)$．

**例2**　$4x^2+20xy+25y^2=(2x)^2+2\times2\times5xy+(5y)^2$
$=(2x+5y)^2$．

**例3**　$x^{18}-3x^{12}y^6+3x^6y^{12}-y^{18}=(x^6)^3-3(x^6)^2(y^6)$
$+3(x^6)(y^6)^2-(y^6)^3=(x^6-y^6)^3$

$=[(x^3+y^3)(x^3-y^3)]^3$

$=[(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)]^3$

$=(x+y)^3(x-y)^3(x^2-xy+y^2)^3(x+xy+y^2)^3$。

**例 4** $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=[x\cdot(x+3)]\cdot[(x+1)(x+2)]+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=(x^2+3x)^2$

$+2(x^2+3x)+1=(x^2+3x+1)^2$.

**4.进行变换**

**例 1** $a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2$

$-a^2b^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

**例 2** $x^2+xy-2y^2=x^2+2xy-xy-2y^2=x(x+2y)$

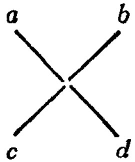
$-y(x+2y)=(x+2y)(x-y)$。

**5.二次三项式$px^2+qx+r$的因式分解**

设 $px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)=(ac)x^2+(ad+cb)x+(bd)$.比较$x$同次幂的系数,得

$p=ac$, $q=ad+cb$, $r=bd$。

表为




叫做"十字相乘法".

当 $p=1$时, $a=c=1$,

$\therefore$ $q=b+d$, $r=bd$.

**例** $x^2+6x+8=x^2+(2+4)x+2\times4$

$=x^2+2x+4x+2\times4=x(x+2)+4(x+2)$

$=(x+4)(x+2)$.

分解$2x^2+7x+6$的因式。

$$\begin{array}{ccc}2 & & 3\\ & \times & \\ 1 & & 2\end{array}$$

$\therefore\quad 2x^2+7x+6=(2x+3)(x+2)$.

## 四　幂的运算

**定义 1**　$a^n$（$n$为自然数）叫做$a$的$n$次幂

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$$

**定义 2**　一切实数$a(a\neq 0)$的零次幂约定等于1。

$a^0=1$，　$2^0=1$，　$(a-b)^0=1\ (a\neq b)$，

$-5^0=-1$，　$(-5)^0=1$.

**定义 3**　实数$a(a\neq 0)$的负整数幂约定为

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

**定义 4**　正数$a$的正的$n$（$n$为正整数）次方根，叫做$a$的算术根，记成$\sqrt[n]{a}$；零的$n$次算术根规定为零。

**法则：**

1.　$(+a)^n=+a^n$；

2.　$(-a)^n=\begin{cases}+a^n & n\text{为偶数,}\\ -a^n & n\text{为奇数;}\end{cases}$

3.　$a^n\cdot a^k=a^{n+k}$；

4.　$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$；

5. $\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}(a\neq 0)$;

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ (b\neq 0)$;

7. $(a^k)^n=a^{kn}$;

8. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}$;

9. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

10. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0)$;

11. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$;

12. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

## 五 分 式

**1.基本性质**

$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\ (b\neq 0,\ m\neq 0)$.

**2.分式运算**

**加、减法** $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$, $(b\neq 0,\ d\neq 0)$

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$;

**乘法** $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

**除法** $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$. $(b\neq 0,\ d\neq 0,\ c\neq 0)$

**3. 分数的比较**

| 分　　数 | 若 | 则 |
| --- | --- | --- |
| $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ | $b>c>0$ | $\frac{a}{b}<\frac{a}{c}$ |
| | $0<b<c$ | $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$ |
| $\frac{d}{f}$, $\frac{e}{f}$ | $d>e$, $f>0$ | $\frac{d}{f}>\frac{e}{f}$ |
| | $d<e$, $f>0$ | $\frac{d}{f}<\frac{e}{f}$ |

**4. 代数分式的运算**

在以下各式中$f_i(x)$，$q_i(x)$，$g_i(x)$，$r(x)$为多项式.

**加法和减法**

（1）同分母

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x)\mp f_2(x)}{g_1(x)}。$$

（2）异分母

1° 分母没有公因式

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)g_2(x)\mp f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)};$$

2° 分母有公因式$r(x)$

设 $g_1(x)=q_1(x)r(x)$，　$g_2=q_2(x)r(x)$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{1}{r(x)}\left(\frac{f_1(x)}{q_1(x)}\mp\frac{f_2(x)}{q_2(x)}\right)$$

$$=\frac{1}{r(x)}\left(\frac{f_1(x)q_2(x)\mp f_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}\right).$$

**乘法和除法**

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)};$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\div\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot g_2(x)}{g_1(x)\cdot f_2(x)}.$$

（3）分解为简单的分式

要把一个分式表示为比较简单的真分式的和，在实数范围内分母分解为一次式和二次式的因式（这些因式必是不能再分解）．常用的方法是待定系数法．下面分四种情况举例说明．

1° 将分母分解为一次式的因式，并且其中没有任一个重复的．

**例** $\dfrac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}$.

∵ $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$，

那么原式表为

$$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2},\qquad(1)$$

其中$A$，$B$，$C$，$D$是待定系数．

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2-x+2&=A(x-1)(x+2)(x-2)\\&+B(x+1)(x+2)(x-2)+C(x+1)(x-1)(x-2)\\&+D(x+1)(x-1)(x+2).\qquad(2)\end{aligned}$$

等式(2)对于任意的$x$值是正确的，因此我们仅仅选择

某几个$x$值使之能确定未知数$A$，$B$，$C$，$D$.

$$x=-1 \quad 4=A(-2)(+1)(-3)+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot 0, \quad \therefore \quad A=\frac{2}{3};$$

$$x=1 \quad 2=A\cdot 0+B\cdot 2\cdot 3\cdot(-1)+C\cdot 0+D\cdot 0, \quad \therefore \quad B=-\frac{1}{3};$$

$$x=-2 \quad 8=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-1)(-3)(-4)+D\cdot 0, \quad \therefore \quad C=-\frac{2}{3};$$

$$x=2 \quad 4=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot 3\cdot 1\cdot 4, \quad \therefore \quad D=\frac{1}{3}.$$

于是得到分解式：

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-2)}.$$

2° 分母分解为一次式和某些一次式的平方.

**例** $\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$.

原式表为：

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}, \qquad (3)$$

$\therefore \quad x^2=A(x+2)^2+B_1(x+1)(x+2)+B_2(x+1)$.

当 $x=-1$时， $1=A$,

$x=-2$ 时， $4=-B_2$， $\therefore \quad B_2=-4$；

$x=0$时，　　$0=4A+2B_1+B_2$，　∴　$B_1=0$。

$$\therefore\quad \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}.$$

3° 分母分解的因式中含有二次式的（不能再分解为一次式）因式及他们中的重复项．此时分母是一次式时，分子为常数，分母为二次式时分子为一次式．

**例** $\dfrac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}$.

原式表为：

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2},$$

$$\therefore\quad x^3+4x^2+6=A_1(x+1)(x^2+2)+A_2(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)^2.$$

去括弧比较等式两边同次幂的系数：

$x^3$　　$1=A_1+B$；

$x^2$　　$4=A_1+A_2+2B+C$；

$x^1$　　$0=2A_1+B+C$；

$x^0$　　$6=2A_1+2A_2+C$。

解这方程组得：

$$A_1=\frac{1}{3},\quad A_2=3,\quad B=\frac{2}{3},\quad C=\frac{-2}{3}.$$

所以

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

我们发现比较同次幂的系数比较方便。