

目 录

绪论	1	一、金属的组织成分对变形抗力的影响	73
第一章 塑性力学基础	5	二、变形温度对变形抗力的影响	74
第一节 应力分析	5	三、变形程度对变形抗力的影响	75
一、应力状态及其表示方法	7	四、应变速率对变形抗力的影响	76
二、点应力状态的特征面	13	五、变形抗力的测定	78
三、静水应力、球应力和偏应力张量	19	六、变形抗力的选用	86
四、应力平衡微分方程	22	七、确定变形抗力的近似计算法	90
五、应力状态的特例	24	八、小结	92
六、应力莫尔圆	27	九、附录	96
第二节 应变分析	31	第三节 接触摩擦	100
一、点的应变状态及其与应力状态的相似	32	一、塑性变形时摩擦的特点及其对塑性	
二、应变分量与位移分量的关系	35	加工的影响	100
三、应变分量之间的关系	39	二、摩擦机构	101
四、应变增量和应变速率	40	三、塑性变形时摩擦剪应力的表达式	103
五、对数应变	42	四、影响接触摩擦的主要因素	104
六、应变莫尔圆	43	五、测定摩擦系数的方法	105
七、边界条件	45	第四节 锻件形状对变形力的影响	125
第三节 应力应变关系	47	一、锻件形状对变形力影响的原因	125
一、弹性变形时应力应变关系	47	二、表示锻件形状的参量	130
二、塑性变形应力应变关系的特点	48	三、锻件形状对变形力影响的表示方法	132
三、增量理论 (流动理论)	49	四、锻件形状对变形力影响的实验测定	136
四、应力应变速率关系式	52	五、关于锻件形状对模锻力影响的讨论	141
五、全量理论 (形变理论)	52	第五节 降低锻压变形力的途径	142
六、应变能概念	54	第三章 用主应力法计算锻压变形力	144
第四节 塑性条件 (屈服准则)	57	第一节 主应力法的基本原理	144
一、Tresca 塑性条件	57	一、概述	144
二、Mises 塑性条件	58	二、基本原理	144
三、塑性条件的几何表达	58	第二节 用主应力法计算锻压变形力	146
四、塑性条件的简化形式	63	一、镦粗	146
五、塑性条件的实验验证	65	二、拔长	153
六、变形硬化材料的塑性条件	66	三、冲孔	156
第二章 影响锻压变形力的因素	70	四、挤压	159
第一节 变形力和变形抗力的基本概念	70	五、弯曲	163
一、锻压变形力	70	六、拉深	171
二、计算变形力方法的分类	71	七、翻边	173
三、变形抗力概念	71	八、缩口	175
四、影响变形力的因素	72	第三节 工程计算法	177
第二节 材料的变形抗力	72	一、工程计算法对主应力法的发展	177

二、工程计算法的应用	179	二、冲孔	277
第四节 工程计算法的进一步简化	194	三、挤压	284
一、简化的工程计算法	194	四、理论计算公式的实验校准	289
二、逐次单元分析法	196	第三节 用上限法计算锻压变形力	292
第四章 用滑移线法计算锻压变形力	200	一、圆柱体镦粗	292
第一节 滑移线的基本概念	200	二、条料镦粗	296
一、平面变形问题的基本方程式	200	三、平面变形正挤压	302
二、平面应变状态的应力莫尔圆及 应力分量表达式	201	四、轴对称正挤压	306
三、滑移线的绘制	202	五、轴对称复合挤压	318
四、滑移线的微分方程及滑移 线族的分类	203	六、管坯复合挤压	320
第二节 滑移线的主要特性	203	第四节 上限法的进展	325
一、汉基方程	203	一、单位变形区(基元变形区)技术	325
二、汉基第一定理	205	二、对矩形断面长条料镦粗 上限解的分析	336
三、汉基第二定理	205	三、用坐标变换法求轴对称 问题的上限解	342
四、滑移线边界条件	207	第六章 模锻变形力的工程计算	352
第三节 绘制滑移线场的方法	209	第一节 开式模锻时的变形区	352
一、数学解析法	209	一、开式模锻的变形过程	352
二、数值积分法	209	二、开式模锻锻靠阶段的变形区 形状与尺寸	352
三、分析推理法	213	第二节 用主应力法计算开式模锻变形力	358
四、近似图解法	214	一、回转体锻件开式模锻力计算	358
第四节 用滑移线法计算锻压变形力	216	二、长轴类锻件开式模锻力计算	369
一、冲头压入半无限厚板坯时的压挤力	217	第三节 用滑移线法计算开式模锻变形力	372
二、镦粗变形力	220	一、简单长轴类锻件的模锻力	372
三、挤压变形力	232	二、简单回转体锻件的模锻力	376
四、板料拉深力	248	三、形状复杂锻件的模锻力	377
五、锥形圆环模锻力	249	第四节 用能量法计算开式模锻变形力	387
第五节 速度场问题	251	一、用变形功法计算回转体锻件模锻力	387
一、沿滑移线的速度方程	251	二、用上限法计算形状简单的长轴类锻件 模锻力	384
二、由滑移线场绘制速度图	252	三、用上限法计算形状复杂的长轴类锻件 模锻力	387
三、速度间断线(速度不连续线)	254	四、用上限法计算轴对称锻件模锻力	390
四、建立速端图举例	255	第五节 用工程计算法计算闭式模锻力	392
五、用速度图校核滑移线场	256	一、闭式模锻变形特点及变形区	392
第六节 滑移线理论应用例题	258	二、圆柱体闭式镦粗力的工程计算	396
第五章 用能量法计算锻压变形力	263	三、影响闭式模锻力的主要因素	399
第一节 能量法的基本原理	263	四、计算闭式模锻力的通用公式	402
一、基本概念	263	五、用分块法计算闭式模锻力	403
二、基本原理	264	第六节 用滑移线法计算闭式模锻力	405
三、解题方法与步骤	270		
第二节 用变形功法计算锻压变形力	275		
一、镦粗	275		

一、闭式模锻时的滑移线场	405	二、锻压设备吨位的经验换算	467
二、用近似函数法计算闭式模锻力	406	三、锻压设备的配套	469
第七节 闭式模锻力的其他解法	407	第九节 计算模锻力的回归方程	469
一、努拉伏列夫(А. З. Журавлев)法	407	第十节 选用模锻设备吨位举例	470
二、带筋板条的闭式模锻力	409	一、确定热模锻变形力与变形功	470
三、壁板类锻件变形力的计算	413	二、确定开式模锻力	472
第七章 锻压设备的选用	415	第八章 锻压变形力及变形功的	
第一节 锻压设备的力能特性	415	实验测定	476
一、基本概念	415	第一节 锻压力、能参数电测的基本原理	476
二、液压机的力能特性	417	一、电阻应变片	477
三、机械压力机的力能特性	417	二、传感器	481
四、螺旋压力机的力能特性	418	三、电阻应变仪	487
五、锻锤的力能特性	419	四、记录器	491
第二节 液压机的选用	421	第二节 机械压力机锻压变形力的测定	499
一、自由锻粗时液压机吨位的确定	421	一、测定机械压力机锻压力的主要方法	499
二、拔长时液压机吨位的确定	422	二、利用机身传感器测定锻压	
三、冲孔时液压机吨位的确定	425	变形力举例	506
四、模锻时液压机吨位的确定	425	第三节 摩擦压力机锻压变形力的测定	511
五、挤压模锻时液压机吨位的选用	427	一、利用机身弹性变形测力的可能性	511
第三节 锻造挤压用机械压力机的选用	427	二、确定真实模锻力的基本原理	513
一、热模锻压力机吨位的确定	428	三、位移传感器	514
二、平锻机吨位的确定	429	四、测定锻压变形力举例	517
三、挤压时压力机吨位的确定	430	第四节 锤上锻造时变形力和变形功	
四、精压机吨位的确定	431	的测定	520
五、切边压力机吨位的确定	434	一、用电子示波器测定锤上锻造变形力	520
第四节 板料冲压用机械压力机的选用	434	二、在落锤上测定打击力的装置	522
一、冲压力的经验计算	434	三、利用加速度传感器测定锤上锻造	
二、冲压用机械压力机的选用	441	变形力	523
第五节 摩擦压力机的选用	442	四、利用锤头或模具的弹性变形测定锻造	
第六节 锻锤的选用	444	变形力	523
一、确定锻锤吨位的基本原理	444	第五节 由实验测定接触面正应力确定	
二、自由锻锤的选用	446	变形力	526
三、模锻锤的选用	449	一、用多点式测力计测定接触面正应力	526
四、胎模锻用锻锤吨位的选用	457	二、用标定的测力板测定接触面正应力	527
五、选用锻锤吨位的能量系数法	457	第六节 由模型实验测定锻压变形力	529
第七节 专用设备的选用	458	第七节 锻压设备吨位的检测	531
一、辊锻变形力计算及辊锻机的选用	458	一、用圆柱均匀锻粗法检测锻压设备	
二、环形件辗压力计算及辗环机选用	462	吨位的原理	531
三、锻坯及大型板坯的弯曲力计算及弯曲		二、试样材料选用及试样制备方法	532
设备选用	463	三、测定方法与步骤	533
四、下料剪切力计算及剪切机选用	464	附录 锻压变形力计算公式索引	536
第八节 锻压设备吨位的换算与配套	465	参考文献	540
一、锻锤吨位与压力机吨位的理论换算	465		

绪 论

锻压过程是不断对坯料施加压力使其成为所要求形状的过程。没有力，坯料就不能变形，锻压过程就无法进行。力不足，坯料就锻压不到所要求的形状。因此，计算锻压变形力是拟订锻压工艺的重要内容。只有确定成形零件所需的力，才能选用吨位足够的、能生产出合格锻压件的锻压设备，才能设计出强度足够的能传递变形力并保证成形的模具，才能在设计新型锻压设备时保证受力零件的强度和刚度。

计算锻压变形力是金属塑性成形理论研究的内容之一。塑性成形理论的塑性力学部分，通过分析变形体的应力、应变分布，提供了计算塑性成形力的各种解法。塑性成形理论的金属学和物理化学部分，通过分析各种因素对塑性和变形抗力的影响，为计算塑性成形力提供了材料性能、摩擦条件等基本规律和数据。

图0-1用方框图表示了影响锻压变形力的因素、计算锻压变形力的目的、计算锻压变形力的方法及实验测定锻压变形力的方法。由图可知，为了准确计算锻压变形力，不仅需要掌握各种计算方法，还要了解各种因素对锻压变形力的影响。此外，还应掌握实验测定变形力的方法，以便校核计算公式的准确程度，以及在必要时直接测定变形力。

计算锻压变形力时，可以用一个参数， σ_s 或者 k ，来表示锻压件材料性能和变形条件对变形力的影响。 σ_s 表示金属材料在单轴向拉伸下的屈服应力或在给定变形条件（变形温度、变形速度和变形程度）下的变形抗力， σ_s 也称流动应力或真实应力。 k 表示金属在纯剪状态下开始塑性变形时的最大剪应力，或称塑性常数，其值为 $k = 0.5 \sigma_s$ （按 Tresca 塑性条件）或 $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ （按 Mises 塑性条件）。金属和模具接触面间的摩擦对变形力的影响，通常用摩擦系数 μ 或摩擦因素 m 及与其相应的摩擦规律（边界条件）来衡量。锻件形状对变形力的影响，可以用形状系数或计算公式中的锻压件尺寸表示，也可以与摩擦的影响结合起来考虑。

在计算锻压变形力的方法中，经验法是最原始、最简单的方法。它是把一个厂或若干个厂的经验数据，整理成单位变形力与流动应力之比（即经验系数）计算变形力的方法。有些经验法也用其它比值或经验图表来达到快速而简便地求出锻压变形力的目的。但是，经验法有以下缺点：（1）得不到锻压力学或关于应力分布、金属流动的详细情况，因而无助于锻压技术的提高和改善；（2）通用性不够。某一厂、某一种材料或某一种零件的经验公式和数据，不完全适用于

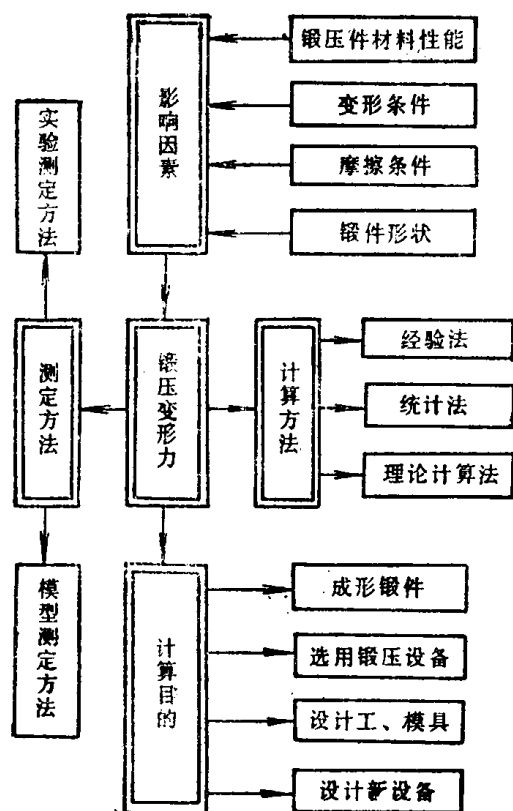


图0-1 与锻压变形力有关诸因素的方框图

其它厂、其它材料或其它零件。例如，用碳钢锻件试验数据导出的经验公式或图表，只能用于同样和类似材料的其它锻件，而不能用于高温合金锻件。

由于锻压过程是一个十分复杂的物理化学过程，大部分参量都是连续变化的，所以经验资料的积累和整理，不仅对于生产，而且对于理论研究也有重要意义。于是，在经验法的基础上就产生了计算变形力的统计法。这种方法实质上仍然是经验法，它是利用数理统计方法，如回归分析方法等等，把大量的观察数据（经验数据）进行处理，从而得出比较符合实际情况、具有一定精确程度的计算锻压变形力的数学表达式。

近年来，理论计算锻压变形力的方法有了较大发展，应用比较多的有：主应力法、滑移线法、变分法、变形功法、上限法、有限元法。

1. 主应力法

主应力法是出现最早的一种计算变形力的方法，它是由萨克斯 (G. Sachs) 和齐别尔 (E. Siebel) 在本世纪20年代末首先提出来的。以后经古布金 (С. И. Губкин) 等学者加以完善，到四十年代末就已经能够用它系统地计算锻粗、拔长、冲孔、挤压、拉深等金属压力加工工步。该法的最主要特点是：(1) 从变形区内切取一个包括接触面或已知边界条件的界面在内的、表面法线方向与主应变方向近似于重合的单元体，进而研究该单元体的静力学平衡条件；(2) 把整个变形区或变形区某些部分的变形简化为平面问题或轴对称问题，使第三个主应力成为已知值，即 σ_3 等于零（平面应力）或等于其它两主应力和的平均值（平面变形），或径向主应力等于切向主应力（完全塑性条件下的轴对称变形）。因此，主应力法的平衡方程是一个只含有两个未知值 (σ_1 和 σ_2) 的方程，将它与塑性条件联立求解，就能得到接触面正应力的分布。尽管主应力法是一种极其粗糙的解法，但是汤姆生 (E. G. Thomsen) 等人在著作^[106]中对主应力法和滑移线法作大量比较之后指出，这两种方法的计算结果是很接近的。

主应力法的进一步发展和完善是由翁克索夫 (Е. П. Унков) 完成的。Е. П. Унков 在著作^[24]中把主应力法发展为“近似平衡方程和近似塑性条件联立求解法”，或简称“工程计算法”，其特点是：(1) 根据变形体具体情况选用合适的坐标系（直角坐标、圆柱坐标、球坐标和极坐标）；(2) 由有实验根据的边界条件求出的近似塑性条件同由塑性力学的准确平衡方程导出的近似平衡方程联立求解。这样，就大大提高了解的数学严密性。用主应力法求解锻压变形力时必须满足平衡条件（虽然是近似的），所以属于下限法。其优点是简单，而且所得的公式能直观地表示出变形力与过程参数（锻压件尺寸）之间的关系。

2. 滑移线法

滑移线法是继主应力法之后，于1923年由汉基 (H. Hencky) 首先提出来的，以后经普朗特 (L. Prandtl)、格林盖尔 (H. Geiringer)、希尔 (R. Hill)、普拉格 (W. Prager)、汤姆生 (E. G. Thomsen)、托姆良诺夫 (А. Д. Томленов) 及肖夫曼 (Л. А. Цофман) 等学者加以完善，并用于求解塑性成形问题和成形力的方法。滑移线法是建立在平面问题的滑移线（即最大切应力迹线）与平衡方程和塑性条件方程系（即塑性微分方程）的特征线相重合的基础上。发展最快的是，接触摩擦剪应力为极值 $\tau = 0$ 和 $\tau = k$ 的条件下平面问题滑移线场的几何作图法，此时滑移线场各结点的正应力可以用最简单的三角学公式求解。建立复合边界条件的滑移线场，工作量很大，需要借助电子计算机来进行。在求解轴对称问题时，几何绘制滑移线法，只有在滑移线与原始微分方程的特征线重合情况下才适用。

滑移线法的主要优点是,几何的直观性及可用于确定变形区和刚性区。但是,为了绘制接触摩擦剪应力为极值的滑移线场,必须具有一定的经验和洞察力。另外,还应当用绘制应变速度场的方法校核所绘制出的滑移线场的准确性。同时,还需要满足变形力和变形功的最小值条件。

3. 变分法和变形功法

变分法和变形功法都是建立在能量守恒原理的基础上的。变分法是五十年代由苏联乌拉尔学派塔尔诺夫斯基(И. Я. Тарновский)、波兹捷也夫(А. А. Поздеев)、加纳各(О. А. Ганаго)等人提出来的。从本质上说,它是一种具有可变的金属流动运动学参数的变形功法,这些参数可以通过总变形能或者外力所作的总功的最小化使所提出的运动学模型接近于真实过程。

变分法仅适用解接触摩擦剪应力与正应力无关(通常认为 $\tau = mk$, $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$)的问题,如确定变形、变形力和变形功等。

变分法的优点是,既能研究金属压力加工的平面问题,也能求解轴对称问题。解的解析公式可用于评价各种因素对变形过程的影响。但是,这种方法所需的工作量很大,要借助电子计算机进行,而且所得的结果也是近似的。

变形功法又称均匀功法,是 E. Siebel 于20年代末首先提出来的。这种方法通过假设应变只是在最大剪应力或主应力作用下发生的,从而使求解过程简化。变形功法对于研究稳定流动问题特别有用。例如:斯德洛日夫(М. В. Сторожев)[22]和别尔林(И. Л. Перлин)[68]曾利用该法确定挤压力。而且文献[67]、[30]等也证明,由变形功法求出的计算变形力公式,与由主应力法所得的公式相同。变形功法的主要优点是,用于求解总变形力或单位变形力十分简便。因此,这种方法目前仍然得到广泛的应用,并和主应力法统称为初等解法。

4. 上限法

上限法只是一种估算应力和变形力上限值的方法。其基本原理是希尔(R. Hill)在1951年提出,随后经杜拉格(D. C. Drucker)、格林柏(H. J. Greenberg)和普拉格(W. Prager)等人加以发展的。以后,在1957~1958年间由约翰逊(W. Johnson)和库岛(H. Kudo)等人首次把上限原理用于解决工程技术问题,从此上限法得到了日益广泛的应用和发展。

上限法的基本假设是不需要满足平衡方程。当求解平面问题时,以变形速度不连续线的直线为边界的变形区被划分为一些刚性块,各刚性块沿不连续线作运动学许可的相互滑移。只要用刚性块的几何尺寸及其滑动速度求出相互滑动所需的总功,就可以确定总变形力和单位变形力。

上限法的最大优点是,可以很简易地用图解法得到结果,而不要求使用电子计算机手段。由上限法所确定的变形力和应力虽然比真实值大,但并不降低该法的优越性。因为,在生产条件下,为了保证锻压设备不超载,总是希望了解可能的最大变形力。

5. 有限元法

有限元法是近年来随着电子计算机的发展和研究塑性应力应变状态的需要而发展起来的。塑性有限元法分为弹塑性和刚塑性两类,弹塑性有限元较早应用于塑性加工的是1967年马伏卡尔(P. V. Mavcal)和金(I. P. King),刚塑性有限元法是1973年由李(C. H. Lee)和柯巴牙西(S. Kobayashi)首先提出来的。

用有限元法求解平面问题时,用等效的应力状态增量的可能位移原理表达式,替代平衡

方程、塑性条件和变形体表面边界条件所组成的方程系。最后以积分形式表达的公式把可能位移向量的分量同应变张量分量和柯西方程联系起来。

有限元法把金属的变形区分割为三角形（或四边形）单元。在每个单元内部，应变张量分量用坐标的线性函数加以近似，然后确定结点上的应变张量分量值。随后再用沿三角形单元积分的和代替应力状态增量的双重积分。由于计算考虑每个单元边界条件的双重积分之和甚至在接触摩擦剪应力为极值（ $\tau = 0$ 或 k ）的情况下，劳动量也很大，因此必须使用电子计算机进行。

有限元法的优点是，不仅可计算变形体内各点的应力应变分布和变形力，而且可用于分析塑性成形的全过程，找出塑性加工的最优方案等。例如，文献[45]利用弹塑性有限元法对静液挤压加载过程的应力、应变进行了计算，得到了不同工艺参数下的挤压力、塑性区扩展、应力应变分布，以及它们随摩擦、模具角度、挤压比等参数的变化而变化的规律，并把计算结果用于选择最佳挤压比、模具角度和预测挤压过程可能产生缺陷的部位等。

适于工程使用的锻压变形力计算方法，必需是简便的，不需借助电子计算技术就能进行的计算方法。因此，从以上对各种理论计算法的简要分析中可以看出，这些方法有：主应力法，绘制滑移线法、变形功法和上限法。为了便于读者理解和掌握，本书把它们归纳为应力法、滑移线法和能量法三类。除了阐明各类的基本原理外，还介绍了应用于计算镦粗、冲孔、挤压、模锻、弯曲、拉深、翻边、缩口等锻压工步变形力的方法和步骤，并给出了计算公式。

本书作为专门论述锻压变形力工程计算的著作，包含了计算锻压变形力所需要的塑性理论基础知识、变形力的理论计算方法、锻压设备的选用方法、锻压变形力的实验测定和模型（模拟）实验方法等方面的内容，书中除基本原理及总结作者在变形力计算方面的研究成果外，还编进了国内外成功的经验，读者可按具体情况和条件进行阅读、选用。

第一章 塑性力学基础

第一节 应力分析

锻压工艺是对金属坯料施加一定的外力使其成为具有预期外形和性能的制件的加工工艺。金属在外力作用下发生塑性流动时，就在金属与模具的接触面上产生阻止金属流动的摩擦力，在被变形金属内部产生抵抗塑性变形的内力。

外力分布情况与模具形状和接触面摩擦状态有关，如图1-1所示。当圆柱体金属坯料在平行模具间镦粗(图1-1 a)时，只有作用力 P 和摩擦力 τ 作用在上、下接触面上；当金属坯料在模具内镦粗时(图1-1 b和 c)，则在坯料的侧表面上还作用有模具的反力 N 和摩擦阻力 R 。

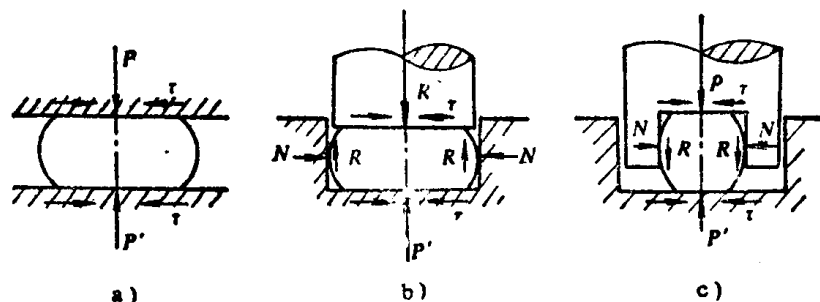


图1-1 圆柱体镦粗受力分析

a) 在平模具间镦粗 b) 在凹模内镦粗 c) 在凸模内镦粗

在锻压加工情况下，把外力分为作用力和反作用力，对于分析力的性质和作用效果来说也是有利的。作用力是由锤和压力机等锻压设备提供的，用以使金属坯料发生塑性变形。反作用力则是模具作用于金属的压力，用以制止金属的流动变形。例如，在图1-1中， τ 、 P' 、 N 、 R 都是反作用力。但是，接触面上的 τ 是自相平衡的，模具侧壁的反力 N 也是自相平衡的，只有与作用力平行的反作用力才与作用力组成平衡力系，即： $P' = P$ (图1-1 a)； $P' + R = P$ (图1-1 b)； $P' = P + R$ (图1-1 c)。显然，摩擦力 R 在图1-1 b中对金属底部的变形来说是反作用力，不利于底部金属的充满，而在图1-1 c中则是作用力，有利于底部金属的充满。

严格说来，以上所述外力只是作用于金属坯料的表面力。对于任何一个变形体来说，体内各个质点还受有与其质量成正比的力的作用，这类力称为体积力，包括重力和惯性力等。锻造时，坯料所受之重力，与表面力相比，小得很多，可以略而不计；惯性力的大小等于坯料质量与变形加速度的乘积，方向与加速度方向相反。当在液压机和曲柄压力机等速度较低($0.03 \sim 1.5 \text{ m/s}$)的锻压设备上锻压时，惯性力的影响可以忽略不计。而在锻锤及高速锤上锻造时，由于锤头运动速度高达 $5 \sim 25 \text{ m/s}$ ，所以拟订锻造工艺时需要考虑惯性力的影响。例如，锻造时惯性力向上，有利于模腔的成形，故锤上模锻通常将形状复杂的部位设置在上模。由于计算惯性力必须预知变形体内每一点的速度，而且数学上也很困难，所以计算总变形力

时通常也不予考虑。

在外力作用下变形体内所产生的内力，当不计体积力的影响时，其大小可用应力表示。

例如，若要知道图1-2中变形体内 M 点的应力，可以过 M 作一平面 A 将变形体切成两部分，移去上半部使作用于 A 面上的内力变成与下半部外力相平衡的外力，然后在 A 面上 M 点附近取一无限小的面积 ΔA ，设作用于其上的内力为 ΔP ，则称

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad (1-1)$$

为 M 点的全应力。该应力可分为两个分量，垂直于 A 面的分量叫正应力，通常以 σ 表示；平行于 A 面的分量叫剪应力，通常以 τ 表示。

内力的方向可由外力及变形的方向来判断。图1-3所示为冲孔时由外力及变形方向判断内力方向的方法。图1-3 a 中冲头下的 A 区，由于受到压力、摩擦力和 B 区的限制，内力的方向是三向受压； A 区周围的 B 区，轴向和径向均受压，切向因为受到 A 区的扩张变形而受拉。图1-3 b 中， B 区内力方向与 A 区相同，但轴向的内力比 A 区弱。

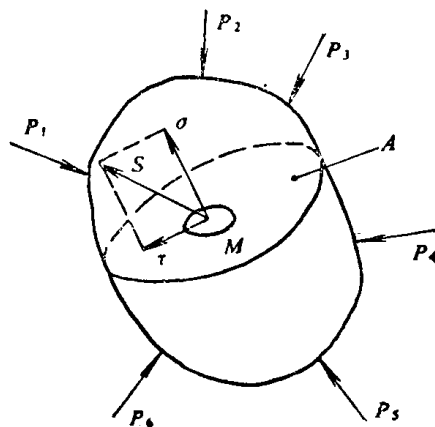


图1-2 变形体的内力

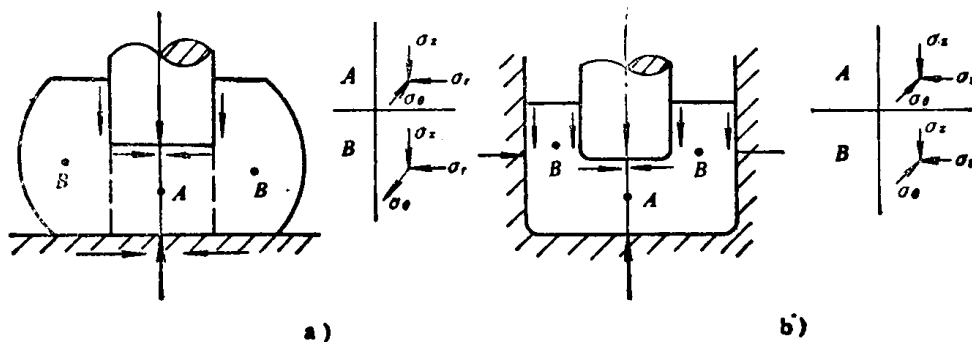


图1-3 冲孔时内力方向的判定

a) 开式冲孔 b) 闭式冲孔

锻压变形力的理论计算是通过分析、计算变形体的内力和接触面摩擦力进行的。因此，必须首先研究受力时变形体内的应力、应变分布情况，应力应变之间的关系，以及应力与变形材料性能之间的关系等塑性变形力学问题。

为了简化研究过程，塑性力学通常采用以下假设：

1. 变形体是连续的，整个体积内不留任何空隙。这样，应力、应变、位移等物理量也都是连续的，并可用坐标的连续函数来表示。
2. 变形体是均匀的，各向同性的。这样，从变形体上分割出的任意一个微元体，都能保持着原变形体所具有的物理性质。
3. 在变形任意瞬间（包括变形结束的瞬间），力的作用是平衡的。
4. 体积力很小，可略去不计。

在弹塑性理论和塑性理论中，分析问题需要从静力学、几何学和物理学方面来考虑。静

力学方面,就是根据静力学平衡条件导出应力分量(当不考虑体力时)之间的关系式,即平衡微分方程。几何学方面,就是根据变形体的连续性、均匀性,用几何的方法导出应变分量与位移分量之间的关系式,即几何方程或变形一致方程。物理学方面,就是根据实验与假设导出应变分量与应力分量之间的关系式,即物理方程或本构方程。

此外,在塑性理论中分析应力应变问题时,为了简化求解过程,通常将应力应变曲线理想化为图1-4所示的几种简化模型:

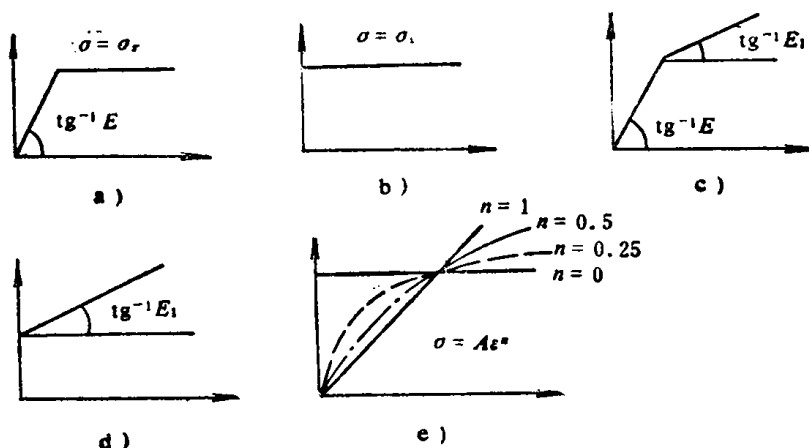


图1-4 应力-应变曲线的简化模型

a) 理想弹塑性体 b) 理想刚塑性体 c) 理想弹塑性硬化 d) 理想刚塑性硬化 e) 幂强化材料

(1) 理想弹塑性材料(图1-4 a)。在弹性变形阶段,应力应变成线性比(理想弹性),在塑性变形阶段不产生硬化(理想塑性)。

例如,高温低速下的小变形可近似为理想弹塑性。

(2) 理想刚塑性材料(图1-4 b)。如果弹性变形比塑性变形小得多,则可忽略弹性变形,而成为理想刚塑性体。例如,金属材料在高温低速下的大变形及低碳钢材料(应变超过弹性应变10~20倍时也不发生强化)在常温下的冷塑性变形就是属于这一类。

(3) 理想弹塑性线性硬化材料(图1-4 c)。在弹性变形阶段,应力应变成线性比,在塑性变形阶段发生硬化,但应力应变仍然成线性比。

(4) 理想刚塑性硬化材料(图1-4 d)。忽略弹性变形,并认为塑性变形时应力应变成线性比。

(5) 幂强化材料(图1-4 e)。采用理想弹塑性体和弹塑性硬化材料模型时,由于有明显的转折点会给计算带来麻烦,为此可采用幂强化材料“模型”。当 $n = 0$ 时,成为理想刚塑性材料。当 $n = 1$ 时,成为理想弹性材料。

在以后研究塑性条件、滑移线理论和上限原理等问题时,一般使用刚塑性材料“模型”。

一、应力状态及其表示方法

应力状态是表示应力的分布情况,即表示应力分布的方向及大小的一种概念。物体的应力状态表示原子被迫偏离其稳定平衡位置因而有使原子趋于恢复原位的状态,而点的应力状态则表示作用于该点任意方位极小面积上的应力的数值及方向。

在外力作用下,即使是在简单拉伸情况下,任意点不同方位上的应力都是不同的。例如图1-5所示的轴线上M点沿轴线方向的应力为

$$\sigma_0 = S_0 = \frac{P}{A_0} \quad (1-2)$$

式中 P ——轴向拉伸力;

A_0 ——垂直于轴线的横截面积。

而M点沿与中心轴成 α 角的方向上的应力为 A 面(与 A_0 成 α 角的面)上的全应力 S_1 在

该方向的投影，即

$$\sigma_1 = S \cdot \cos \alpha = \frac{P}{A_0 / \cos \alpha} \cos \alpha = S_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (1-3)$$

公式(1-3)表明， M 点任意方向上的应力随方向角 α 的变化而变化。但是，在简单拉伸条件下，只要确定出 σ_0 ，则 M 点任意方向上的应力也就可以确定。所以，只用一个应力 σ_0 就可以表示出单向拉伸时点的应力状态。

塑性成形时，变形体内任意点通常处于三向应力状态，这时可用以下三种方法表示该点的应力状态：

(一) 用坐标面上的应力表示

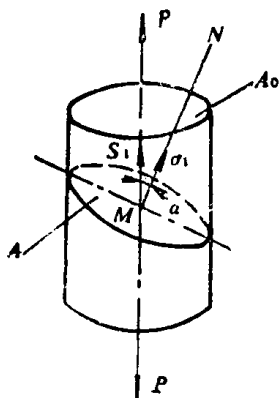


图1-5 单轴向拉伸时的应力

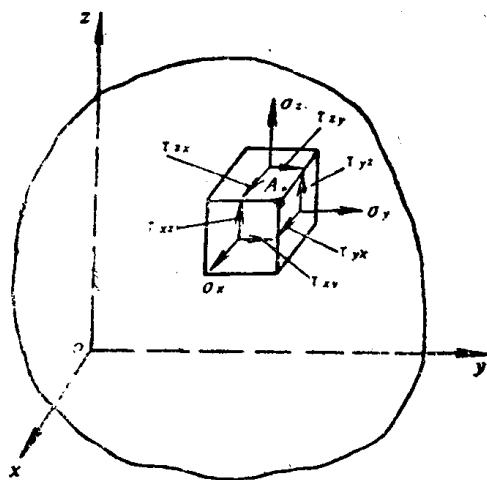


图1-6 正六面体上的应力

过变形体内所研究的点 A 分割出一个平行于坐标面的平行六面体，如图1-6所示，其棱边长 dx 、 dy 、 dz 为无限小，接近于 A 点，则 A 点的应力状态可用作用于微六面体上的应力分量表示。由于各面上的全应力均可分解为一个正应力和两个剪应力，所以表示 A 点应力状态的坐标面上的应力分量共有九个，可以写成下列矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{——作用面为 } x \text{ (即作用面的法线指向为 } x \text{ 轴)} \\ \text{——作用面为 } y \text{ (即作用面的法线指向为 } y \text{ 轴)} \\ \text{——作用面为 } z \text{ (即作用面的法线指向为 } z \text{ 轴)} \end{array}$$

作用方向为 x 为 y 为 z

应力符号下角标的第一字母表示应力所在坐标面的法线方向，第二字母表示应力所指坐标轴的方向。正应力下角标的两个字母相同，通常只需写一个字母。这些应力的正负值按习惯规定确定：正应力以拉应力为正，压应力为负；剪应力的正负由作用平面上的正应力方向决定，若正应力为正，指向坐标轴正方向的剪应力为正，若正应力为负，则指向坐标轴反方向的剪应力为正。

由于平行六面体处于平衡状态，不发生旋转，故具有相同字母角标的剪应力互等。即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

所以任意 A 点的应力状态只要用坐标面上的六个应力分量表示。

现在，通过求任意斜面上（即点的任意方向上）的应力来证明，当已知该六个应力分量

时, 点的应力状态就完全被确定。

设如图1-7所示, 已知作用于通过某点(O 点)的三个互相垂直坐标面上的6个应力分量, 则可在点的无限近作一与三个坐标轴倾斜成任意角度的平面 abc 。若该斜面的法线方向为 N , 它与 x 、 y 、 z 轴间的夹角分别为 α_x 、 α_y 、 α_z , 则斜面的方向余弦为

$$l = \cos \alpha_x = \cos(N, x)$$

$$m = \cos \alpha_y = \cos(N, y)$$

$$n = \cos \alpha_z = \cos(N, z)$$

斜面面积 ΔA 在三个坐标面上的投影面积分别为

$$\Delta A_x = \Delta A l; \quad \Delta A_y = \Delta A m; \quad \Delta A_z = \Delta A n$$

如果作用于斜面上的全应力为 S , 则由于四面体 $oabc$ 处于平衡状态, 故可按力学平衡条件求出以下三个方程:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= S_x \Delta A - \sigma_x \Delta A_x - \tau_{yx} \Delta A_y - \tau_{zx} \Delta A_z = 0 \\ \Sigma Y &= S_y \Delta A - \tau_{xy} \Delta A_x - \sigma_y \Delta A_y - \tau_{zy} \Delta A_z = 0 \\ \Sigma Z &= S_z \Delta A - \tau_{xz} \Delta A_x - \tau_{yz} \Delta A_y - \sigma_z \Delta A_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中 S_x 、 S_y 、 S_z ——分别为全应力 S 沿三个坐标轴方向的分量。

消去 ΔA , 移项后得:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

已知全应力的分量, 就可以由几何关系求出任意斜面上的全应力 S 、正应力 σ_n 和剪应力 τ :

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (1-6)$$

$$\sigma_n = S_x l + S_y m + S_z n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{zx} n l) \quad (1-7)$$

$$\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} \quad (1-8)$$

因此, 若通过某点三个互相垂直的坐标面上的6个应力分量为已知, 则可由公式(1-5)、公式(1-6)、公式(1-7)和公式(1-8)求出该点任意方向上的应力, 即该点的应力状态完全被确定。

(二) 用应力曲面(应力椭球面)表示

自坐标原点沿图1-7斜面的法线方向 N 取向量 R , 使 R 值与 σ_n 平方根成反比, 比例系数为 A , 则

$$R = \frac{A}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad \text{或} \quad \sigma_n = \frac{A^2}{R^2}$$

向量端点的坐标可写为

$$x = Rl, \quad y = Rm, \quad z = Rn$$

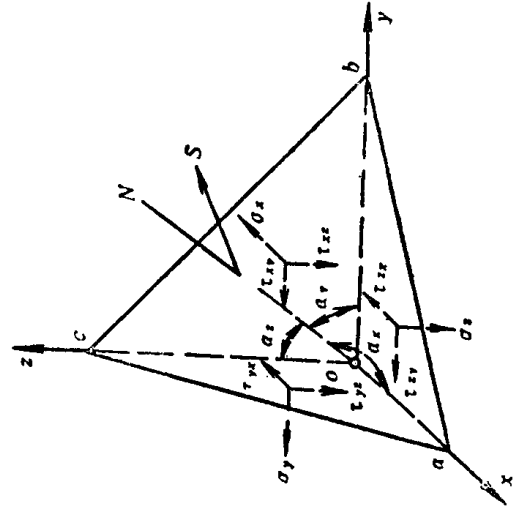


图1-7 任意斜面上的应力

因此

$$l = \frac{x}{R}, \quad m = \frac{y}{R}, \quad n = \frac{z}{R}$$

将 l 、 m 、 n 值代入公式(1-7)并消去 R 得二次曲面方程:

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx = A^2 \quad (1-9)$$

由解析几何可知, 该曲面是与原点对称(无 x 、 y 、 z 之一次项)的椭球面。当方向余弦改变时, 向量 R 及其端点的坐标也将改变, 但其端点仍然在上式所决定的表面上。因此, 此椭球面充分地决定了一点的应力状态, 即作用于某点任意方向上的应力变化情况可以用以该点为中心的应力椭球面表示。

(三) 用应力张量表示

张量是一个数学名词, 它不同于数量(仅有大小)和向量(有一定大小和方向), 而是由一组向量组成, 这些向量与所选择的坐标系有关, 当坐标系改变时, 它们将按一定的关系而变化。由公式(1-9)可知, 应力分量具有张量的特征, 所以是一个张量, 称为应力张量, 可用张量符号 σ_{ij} 表示。即

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

由于对称于矩阵对角线的剪应力互等, 故应力张量可简写为

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-11)$$

张量的缩写符号 σ_{ij} 代表应力状态的各个分量, 其中角标 i 和 j 可分别表示 x 、 y 、 z , 即 $i = x, y, z$; $j = x, y, z$ 。这样, σ_{ij} 就代表了 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} (此三项可简写为 σ_x 、 σ_y 和 σ_z)、 σ_{xy} 、 σ_{yx} 、 σ_{yz} 、 σ_{zy} 、 σ_{zx} 、 σ_{xz} 九个应力分量, 其中角标不重复的为剪应力, 通常写成 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{zx} 、 τ_{xz} 。另外, 在具有两个字母的张量缩写符号中(例如, $\sigma_{ji}l_j$ 或 σ_{ji}/l_j), 字母下方重复出现的角标(例如 j)称为哑标, 表示求和; 不重复出现的角标(例如 i)称为自由指标。因此, 用张量符号时, 公式(1-5)可简写成:

$$S_i = \sigma_{ji}l_j \quad (1-12)$$

当该式展开时, 每一个 i (例如 $i = x$) 都有三个 j (例如 $j = x, y, z$) 与其匹配并求和, 例如:

$$S_x = \sigma_{xx}l_x + \sigma_{yx}l_y + \sigma_{zx}l_z$$

利用张量符号还可以简便地表示应力张量的坐标变换公式。

由图1-7可知, 当坐标轴绕 O 点改变至坐标系 $Ox'y'z'$ 时, 九个应力分量变为 σ'_x 、 σ'_y 、 σ'_z 、 $\tau'_{x'y'}$ 、 $\tau'_{y'x'}$ 、 $\tau'_{x'z'}$ 、 $\tau'_{z'x'}$ 、 $\tau'_{y'z'}$ 、 $\tau'_{z'y'}$ 。令新坐标系 $Ox'y'z'$ 的 Ox' 轴与斜面的法线方向 N 重合, 则 l 、 m 、 n 成为新旧坐标轴间的方向余弦, 即

$$l = \cos(x, x') = l_{xx'}; \quad m = \cos(y, x') = l_{yx'}; \\ n = \cos(z, x') = l_{zx'}$$

因此, 由公式(1-7)可知:

$$\sigma'_{x'x'} = S_x l + S_y n + S_z n = \sigma_{xx}l_{xx'}/l_{xx'} + \sigma_{yx}l_{yx'}/l_{yx'} + \sigma_{zx}l_{zx'}/l_{zx'} + \sigma_{xy}l_{xx'}/l_{yx'} + \sigma_{yy}l_{yx'}/l_{yx'} \\ + \sigma_{zy}l_{zx'}/l_{yx'} + \sigma_{yx}l_{yx'}/l_{xx'} + \sigma_{yz}l_{yz'}/l_{yx'} + \sigma_{xz}l_{zx'}/l_{zx'}$$

同理, 由 S_x 、 S_y 、 S_z 在 y' 、 z' 方向上的投影, 可得用原坐标应力表示的新坐标应力 $\tau_{x'y'}$ 、 $\tau_{x'z'}$ 。按上述方法, 先后将 y' 与 z' 轴与 N 方向重合, 可求出 $\sigma_{y'}$ 、 $\tau_{y'x'}$ 、 $\tau_{y'z'}$ 及 $\sigma_{z'}$ 、 $\tau_{z'x'}$ 、 $\tau_{z'y'}$, 加起来一共有九个表达式。如果用应力张量符号表示, 则仅要一个坐标变换公式就够了, 即

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} l_{ji'} l_{ij'} \quad (1-13)$$

式中 i', j' ——自由指标, 分别等于 x' 、 y' 、 z' ;

i, j ——哑标, 分别等于 x, y, z (因为式右边 i, j 重复出现)。

【例】已知应力状态为 $\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} 900 & 200 & 100 \\ \cdot & 600 & 150 \\ \cdot & \cdot & 400 \end{Bmatrix}$, 求与 x 和 y 轴相交成 70° 和 50° 角的平面

上的全应力、正应力和剪应力 (单位: N/mm^2)。

【解】已知: $\sigma_x = 900$; $\sigma_y = 600$; $\sigma_z = 400$; $\tau_{xy} = 200$; $\tau_{yz} = 150$; $\tau_{zx} = 100$, $l = \cos 70^\circ = 0.342$, $m = \cos 50^\circ = 0.6428$ 。

由公式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 可得:

$$n^2 = 1 - (0.342)^2 - (0.643)^2 = 0.47; \quad n = \sqrt{0.47} = 0.686$$

由公式(1-5)、公式(1-6)求全应力:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \\ &= \sqrt{(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n)^2 + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n)^2 + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n)^2} \\ &= \sqrt{(900 \times 0.342 + 200 \times 0.643 + 100 \times 0.686)^2 + (200 \times 0.342 + 600 \\ &\quad \times 0.643 + 150 \times 0.686)^2 + (100 \times 0.342 + 150 \times 0.643 + 400 \times 0.686)^2} \\ &= 850 \quad \text{N/mm}^2 \end{aligned}$$

由公式(1-7)和公式(1-8)求正应力和剪应力:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= S_x l + S_y m + S_z n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} l m + \tau_{yz} m n + \tau_{zx} n l) \\ &= 900 \times 0.117 + 600 \times 0.413 + 400 \times 0.47 + 2(200 \times 0.342 \times 0.643 + 150 \\ &\quad \times 0.643 \times 0.686 + 100 \times 0.342 \times 0.686) = 808 \quad \text{N/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} \approx 274 \quad \text{N/mm}^2$$

全应力与斜面法线间的夹角(即全应力的方向):

$$\cos(S, N) = \frac{\sigma_n}{S} = \frac{808}{850} = 0.95; \quad \angle S, N \approx 18^\circ$$

【例】已知物体中某点的应力状态以直角坐标表示时应力分量为 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} , 试求以圆柱坐标表示时的应力分量表达式。

【解】设圆柱坐标系为 ρ 、 θ 、 z , 则可利用公式(1-13)求变换坐标后的应力分量表达式。因为 $x' = \rho$, $y' = \theta$, $z' = z$, 所以由图1-8可得:

$$l_{xx'} = \cos(x, x') = \cos(x, \rho) = \cos \theta$$

$$l_{xy'} = \cos(x, y') = \cos(x, \theta) = -\sin \theta$$

$$l_{xz'} = \cos(x, z') = \cos(x, z) = 0$$

$$l_{yx'} = \cos(y, x') = \cos(y, \rho) = \sin \theta$$

$$l_{yy'} = \cos(y, y') = \cos(y, \theta) = \cos \theta$$

$$l_{yz'} = \cos(y', z') = \cos(y, z) = 0$$

$$l_{zx'} = \cos(z, x') = \cos(z, \rho) = 0$$

$$l_{zy'} = \cos(z, y') = \cos(z, \theta) = 0$$

$$l_{zz'} = \cos(z, z') = \cos(z, z) = 1$$

将所得余弦代入公式(1-13)，化简后得变换后的正应力：

$$\sigma_p = \sigma_{x'x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{y'y'} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_z = \sigma_{z'z'} = \sigma_z$$

同理由公式(1-13)可得变换后的剪应力：

$$\tau_{p\theta} = \sigma_{x'y'} = \sigma_{xx} l_{xx'} l_{xy'} + \sigma_{yy} l_{yy'} l_{xy'} + \sigma_{zz} l_{zx'} l_{zy'} +$$

$$+ \sigma_{xy} l_{xx'} l_{yy'} + \sigma_{xz} l_{xx'} l_{zy'} + \sigma_{yz} l_{yy'} l_{zy'} +$$

$$+ \sigma_{yx} l_{yx'} l_{xy'} + \sigma_{zx} l_{zx'} l_{xy'} + \sigma_{zy} l_{zy'} l_{xy'}$$

$$= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\tau_{\theta z} = \sigma_{y'z'} = \tau_{yz} \cos \theta - \tau_{xz} \sin \theta$$

$$\tau_{zp} = \sigma_{z'x'} = \tau_{yz} \sin \theta + \tau_{xz} \cos \theta$$

利用三角公式可将上面式子改写为

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

$$\tau_{p\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{yz} \cos \theta - \tau_{xz} \sin \theta$$

$$\tau_{zp} = \tau_{yz} \sin \theta + \tau_{xz} \cos \theta$$

若全部用直角坐标表示，则需要用关系式 $\tan \theta = y/x$ ， $\sin \theta = y/\sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\cos \theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入上述表达式，最后得用圆柱坐标时的应力分量：

$$\sigma_p = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 \sigma_x + y^2 \sigma_y + 2xy \tau_{xy})$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{x^2 + y^2} (y^2 \sigma_x + x^2 \sigma_y - 2xy \tau_{xy})$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

$$\tau_{p\theta} = \frac{1}{x^2 + y^2} [-xy \sigma_x + xy \sigma_y + (x^2 - y^2) \tau_{xy}]$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz})$$

$$\tau_{zp} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (y \tau_{yz} + x \tau_{xz})$$

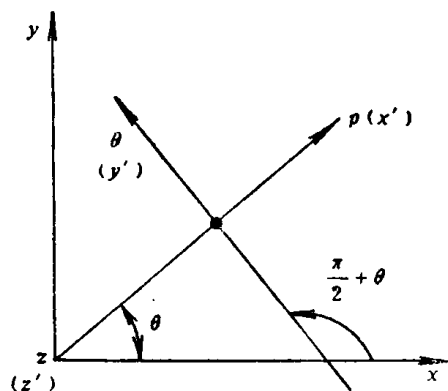


图1-8 直角坐标与圆柱坐标的变换

二、点应力状态的特征面

塑性体受力变形时, 通过其内任意点均可作出26个特征面(或26个特征方向), 这些面上的应力都具有如下特殊意义。

1. 可作6个相互垂直的平面, 在这些平面上仅有正应力, 而无剪应力, 此平面称为主平面, 其上作用的正应力称为主应力。

由解析几何可知, 利用绕原点旋转坐标系的方法, 可使公式(1-9)的二次曲面不仅对称于原点, 而且对称于新的坐标轴。这时, 式中的坐标积项系数应等于零, 即剪应力应等于零。这些坐标面就是主面, 坐标轴称为主轴, 通常用1、2、3表示, 相应的主应力用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示。

当已知点的六个应力分量 σ_{ij} 时, 主应力的大小及方向可以按以下方法进行计算。

设图1-9的斜面正好是主平面, 则该面上的全应力 S 就是主应力 σ , 该面上的剪应力 $\tau = 0$ 。由于斜面法线方向就是一个主轴的方向, 它与三个坐标轴的方向余弦为 l 、 m 、 n , 所以三个全应力的分量等于:

$$S_x = \sigma l, \quad S_y = \sigma m, \quad S_z = \sigma n$$

将所得的 S_x 、 S_y 、 S_z 值代入公式(1-5), 整理后得:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

或写成

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)l_j = 0 \quad (1-15)$$

此处 δ_{ij} 称为柯氏 δ (Kronecker- δ)符号, 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases}$$

上式是以 l 、 m 、 n 为未知数的齐次线性方程组, 只有在各系数组成的行列式等于零的条件下, 该方程组才有异于零的解。所以必有

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (1-16)$$

展开行列式(1-16), 经整理后可得求主应力 σ 的三次方程式:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1-17)$$

方程式(1-17)的三个实根就是主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。将所得的主应力值代入公式(1-14)中的任意两式, 并与几何关系 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 联解, 即可求出三个相互垂直的主方向。

利用主应力表示点的应力状态有以下优点:

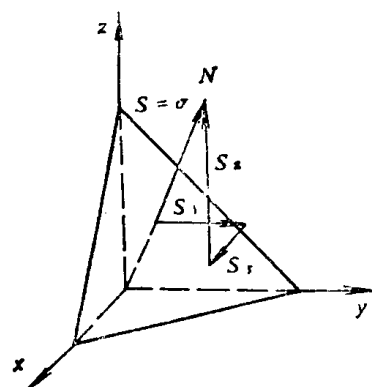


图1-9 由应力分量求主应力

(1) 使确定任意方向上的应力的公式(1-5)、公式(1-6)、公式(1-7)和公式(1-8)简化成

$$S_1 = \sigma_1 l; S_2 = \sigma_2 m; S_3 = \sigma_3 n \quad (1-18)$$

$$S = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} \quad (1-19)$$

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1-20)$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (1-21)$$

(2) 取主方向为坐标轴时, 应力曲面是一个同时对称于原点和坐标轴的椭圆体(图1-10)。

按公式(1-18)有:

$$l^2 = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}; m^2 = \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}; n^2 = \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} \quad (1-22)$$

将公式(1-22)代入几何关系 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 可得:

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (1-23)$$

该式即为图1-10所示典型椭圆体的方程。由于椭球面上各点的坐标为任意斜面上全应力 S 的投影, 所以它形象地表示了受力体内点的任意方向上的全应力变化范围。

(3) 因为对于确定的应力状态只有一组主应力, 所以三次方程式(1-17)中的系数应该是单值的, 不随坐标轴的改变而变化。由此得出应力状态的一个重要性质: 虽然在点的不同方位上的应力分量是不同的, 但是由这些应力分量所组成的方程式(1-17)的三个系数总是常数。通常称这些常数为应力状态或应力张量的第一、第二和第三不变量:

1) 第一不变量(线性不变量):

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const} \quad (1-24a)$$

2) 第二不变量(平方不变量):

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const} \quad (1-24b)$$

3) 第三不变量(立方不变量):

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \text{const} \quad (1-24c)$$

利用应力张量不变量可以判别应力状态的异同。如果两组应力分量的不变量之值相同, 那么它们就表示相同的应力状态。例如, 以下两个应力张量:

$$T_a = \begin{Bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

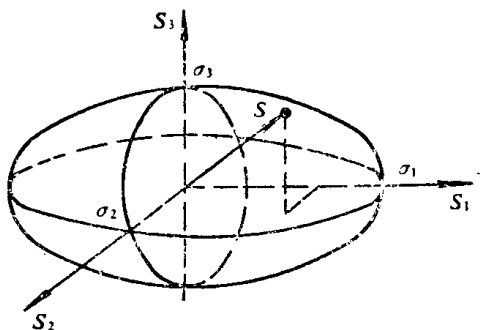


图1-10 用主应力表示的应力椭球面