1

责任编辑　黄国新
封面设计　赵文奎

概率论及数理统计

·第二版·

王福保　闵华玲　叶润修　编著

同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号)
新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32　印张 15.125　字数 387 千字
1988 年 6 月第 2 版　1988年 6 月第 1 次印刷
印数 1-10,000

ISBN 7-5608-0047-5/o.26　　定价 3.05 元

目　录

第一部分　概　率　论

第二部分　数 理 统 计

第三部分 特征函数与随机变数序列的收敛及极限

第一部分 概 率 论

概率论是数学的一个分支，它着重研究随机现象规律性的基本理论．随着科学技术的不断发展，在各门学科中，随机现象的研究已经日益感到必要．因此，今天，概率论几乎已经成为科技工作者所必需具备的一种工具．在这部分内，将阐明概率论中的一些最基本的内容．为了便于学习，将先介绍一些排列、组合及集合的知识．

第一章 预备知识

第一节 排列与组合

先介绍一条乘法原理：如果一个过程可以分成两个阶段进行，第一个阶段有 m 种不同的做法，第二个阶段有 n 种不同的做法，且第一个阶段的任一种做法都可以与第二个阶段的任一种做法配成整个过程的一种做法，那么，整个过程应该有 $m\times n$ 种不同的做法．在排列组合问题中将反复使用这条乘法原理．

一、排 列

从 n 个不同的元素中，任意取出 r 个不同的元素 $(0\leqslant r\leqslant n)$，按照任意的顺序排成一列，把这样一列叫做从 n 个不同元素中取 r 个不同元素组成的一种排列．现在来考虑所有这样的排列的种数．通常用 P_n^r 来表示这个种数．

先设 $0<r<n$. 每一种排列由在 r 个有次序的位置上各放上这 n 个元素中的一个元素所组成，并且要求各个位置上放的元素不重复. 放在第一个位置上的元素有 n 种不同的取法; 在它取定后，由于不准重复，因此放在第二个位置上的元素只有 $n-1$ 种不同的取法; 前两个位置上的元素取定后，由于不准重复，因此放在第三个位置上的元素，只有 $n-2$ 种不同的取法; 依次类推，前 $r-1$ 个位置上的元素取定后，由于不准重复，因此放在第 r 个位置上的元素，只有 $n-r+1$ 种不同的取法. 按照上面讲过的乘法原理，所求的排列总数为

$$P_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

如果使用惯用的记号 $p!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot p$(读作"$p$ 阶乘")，那么，上式可以改写成

$$P_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

当 $r=n$ 时，所求的排列总数为 $n!$. 如果规定 $0!=1$，那么，上述表达式对于 $r=n$ 仍旧成立. 又，如果规定从 n 个不同元素中任取 0 个不同元素进行排列时的排列种数为 1，那么，上述表达式对于 $r=0$ 也成立. 因此，当 $0\leqslant r\leqslant n$ 时，上述排列问题的答案总可以表达成 $\frac{n!}{(n-r)!}$.

[例 1] 计算从八个不同的元素中任取三个的排列种数.

解：所求的排列种数为

$$P_8^3=8\cdot7\cdot6=336.$$

[例 2] 从 1、2、3、4、5、6、7 这七个数中任取三个不同的数组成的三位数中有几个是偶数?

解：所得的三位数是偶数，即它的个位上应该是 2、4、6 中的一个. 因此，放在个位上的数有三种不同的取法. 放在个位上的数取定后，放在十位上的数有六种取法. 放在个位、十位上的数取定后，放在百位上的数有五种取法. 从而，所求的个数为

$$3\cdot6\cdot5=90.$$

注意，在上述排列问题中，参加排列的元素是不允许重复的．但是，有时候需要考虑允许重复的情况．例如，电话号码中就允许各位上的数字重复．通常称这种情况下的排列为**重复排列**．下面来求出从 n 个不同元素中（允许重复地）取 r 个组成的重复排列的种数．从这 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，然后把这个元素放回去，再从这 n 个元素中任取一个放在第二个位置上，然后再把这个元素放回去，按这种做法进行 r 次．按乘法原理，得到从 n 个不同的元素中（允许重复地）取 r 个组成的重复排列的种数为

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{r\text{个}}=n^r.$$

［例 3］ 用 0、1、2、…、9 这十个数字可以组成多少个不同的三位数？（在组成的三位数中各个位置上的数字可以重复．）

解 注意到百位上不能放 0，又，各个位置上的数字可以重复，便得到所求的个数为

$$9\cdot10\cdot10=900.$$

［例 4］ 上例内的这些三位数中，

(1) 没有重复数字的有几个？

(2) 三个数字都相同的有几个？

(3) 恰好有两个数字相同的有几个？

解：(1) 百位上的数字有九种不同的取法．在百位上的数字取定后，由于不准重复，但 0 可以添入供选用，所以，十位上的数字有九种不同的取法．在百位、十位上的数字取定后，由于不准重复（如果在十位上没有用到 0 的话，0 当然仍可以选用），所以，个位上的数字有八种不同的取法，因此，所要的个数为

$$9\cdot9\cdot8=648.$$

(2) 由于百位上的数字有九种不同的取法，且按三个数字都相同的要求，百位上的数字取定后，十位、个位上的数字随之而定，因此，所要的个数为 9.

(3) 只有百位上的数字与十位上的数字相同的三位数的个数为 $9\cdot9$；只有十位上的数字与个位上的数字相同的三位数的个数为

$9\cdot 9$; 只有百位上的数字与个位上的数字相同的三位数的个数为 $9\cdot 9$. 因此,恰好有两个数字相同的三位数的个数为

$$9\cdot 9+9\cdot 9+9\cdot 9=243.$$

二、组　合

从 n 个不同的元素中任取 r 个$(0<r\leqslant n)$构成一组. 这里,不考虑这 r 个元素的次序,问有多少种取法?这就是组合问题. 称每个这样的组为一个组合.

组合问题与排列问题的不同之处在于: 在排列问题中要考虑取得的元素的前后次序,而组合问题中不考虑这种次序.

第一目中已经算得: 从 n 个不同元素中任取 r 个不同的元素组成的排列种数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$. 按组合问题中的要求,由取定的 r 个不同元素组成的各种排列只能算是同一个组合,又,把 r 个不同元素进行排列的种数为 $r!$. 因此,上述

$$n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

种排列中每 $r!$ 种只是一种组合. 从而,上述组合问题的答案为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

如果规定从 n 个不同的元素中任取 0 个的组合种数为 1,那么,上述表达式对于 $r=0$ 也成立. 这里,注意到,已经规定过 $0!=1$. 上述组合问题的答案是一个自然数,通常把它记作 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$. 即:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

按 $\binom{n}{r}$ 的这个表达式立即看出

$$\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}.$$

当 r 接近 n 时,可以利用这个等式把 $\binom{n}{r}$ 化成 $\binom{n}{n-r}$ 来计算.

[例5] 有五本不同的数学书、八本不同的物理书．从中任取两本数学书、四本物理书．问有多少种不同的取法？

解：从五本数学书中任取两本，有

$$\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$

种不同的取法．从八本物理书中任取四本，有

$$\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}=70$$

种不同的取法．因此，按乘法原理，所求的取法的种数为

$$\binom{5}{2}\binom{8}{4}=10\times70=700.$$

第二节　集　　合

数学中经常会用到由某些特定的事物组成的集体．称这种集体为**集合**，简称**集**．本书中，常用大写拉丁字母来表示集合．称组成集合的各个事物为这集合的**元素**．如果集合 A 是由元素 e_1, e_2, …等组成的，那么，记作

$$A=\{e_1,\ e_2,\ \cdots\}.$$

如果 e 是集合 A 的一个元素，那么，记作

$$e\in A,$$

读作"e 属于 A"．如果 e 不是集合 A 的元素，那么，记作

$$e\notin A,$$

读作"e 不属于 A"．有的书上也将"$e\notin A$"记作"$e\overline{\in} A$"．

在讨论集合时，除非另有声明，重复的元素只算一次．例如，把 $\{1, 2, 2, 3\}$ 与 $\{1, 2, 3\}$ 看作是同一个集合．

如果一个集合内只有有限多个元素，那么，称这集合为**有限集**．如果一个集合内有无限多个元素，那么，称这集合为**无限集**．特殊地，如果一个无限集内的元素能与全体自然数构成一对一的对应，那么，称这个无限集为**可数集**．

例如，$\{2, 3, 4\}$是以三个数字 2、3、4 为元素的有限集；

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$$

是以数字 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、…为元素的可数集；全体实数组成一个无限集；区间 (a, b) 就是由所有大于 a 且小于 b 的全体实数组成的无限集．后两个集都不是可数集．

如果属于集合 A 的任一个元素都属于集合 B，那么，称 A 是 B 的子集，或者说，B 含有 A，或者说 A 包含在 B 内，记作

$$A\subset B(\text{或 } B\supset A),$$

(图 1-1)．例如，全体偶数组成的集合是全体整数组成的集合的子集；区间$(1, 2)$是区间$(1, 4)$的子集．显然，当 $A\subset B$ 且 $B\subset C$ 时，$A\subset C$．

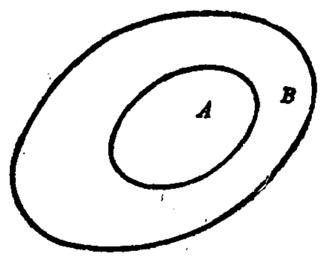

图 1-1

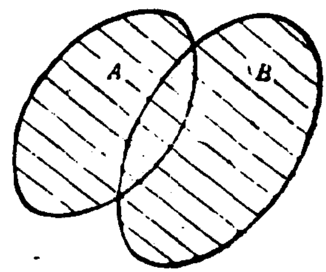

图 1-2

为了以后讨论问题时方便，把不含任何元素的“集体”也作为一个集合．称它为空集．本书上把空集记作 V，(有的书上把空集记作 $\varnothing$)．又，把空集作为任一个集合 A 的子集，即，对于任一个集 A，$V\subset A$．

如果对于两个集合 A、B，$A\subset B$ 及 $B\subset A$ 都成立，那么，称 A、B 相等，记作 $A=B$．

由至少属于集合 A、集合 B 中的一个的元素的全体所组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作

$$A\cup B.$$

图 1-2 中阴影部分表示 $A\cup B$．例如，集合$\{1, 2, 3, 4\}$与集合$\{2,$

4, 6}的并集为集合{1. 2, 3, 4, 6}；区间(1, 3)与区间(2, 4)的并集为区间(1, 4)；区间$(-\infty, 3)$与区间$(-\infty, 1)$的并集为区间$(-\infty, 3)$；区间$(-1, 0)$与区间(2, 3)的并集为“大于 -1 且小于 0”或“大于 2 且小于 3”的全体实数组成的集；xOy 面上坐标满足 $1<x<2$ 的点的全体组成的集合与坐标满足 $1<y<3$ 的点的全体组成的集合的并集为图 1-3 中阴影部分表示的集合(边界不在内).

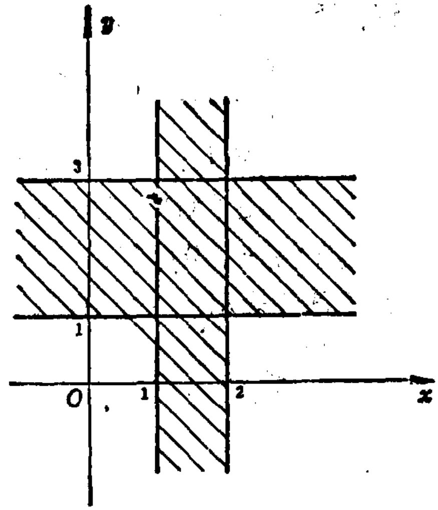

图 1-3

由同时属于集合 A 与集合 B 的元素的全体组成的集合称为 A、B 的**交集**，记作

$$A\cap B \quad (\text{或 } AB).$$

图 1-4 中的阴影部分表示

$$A\cap B.$$

例如，区间$(-\infty, 3)$与区间$(1, +\infty)$的交集为区间(1, 3)；平面上，圆 $x^2+y^2=1$ 内部的点的全体组成的集合与横坐标 x 大于零的点的全体组成的集合的交集为图 1-5 中阴影部分表示的半圆形区域(边界不在内).

如果 $A\cap B=V$，即，A、B 无公共元素，那么，称 A、B **互不相交**.

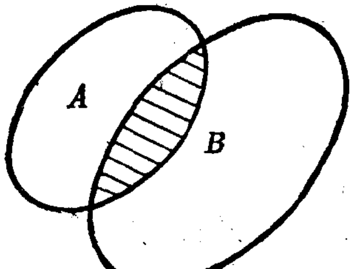

图 1-4

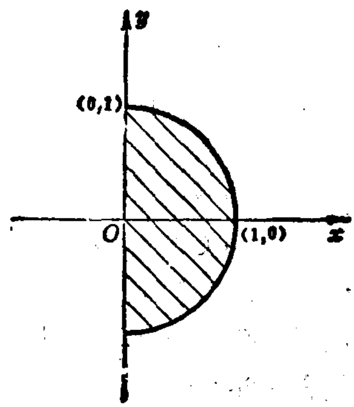

图 1-5

例如，全体正数组成的集合与全体负数组成的集合互不相交；区间$(1, 2)$与区间$(2, 3)$互不相交.

集合的并及交满足下列两个分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

证：下列诸关系式是相互等价的：

$e\in(A\cup B)\cap C$,

$e\in A\cup B$ 且 $e\in C$,

$e\in A\cap C$、$e\in B\cap C$ 中至少有一个成立,

$e\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

这就证实了第一个分配律. 图 1-6 表明了这个分配律的直观含义. 图中阴影部分表示$(A\cup B)\cap C$.

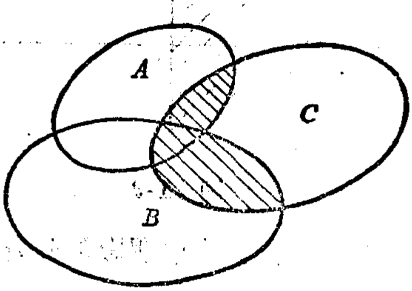

图 1-6

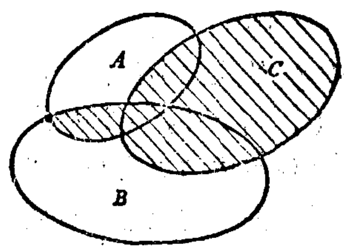

图 1-7

下列诸关系式是相互等价的：

$e\in(A\cap B)\cup C$,

$e\in A\cap B$、$e\in C$ 中至少有一个成立,

"$e\in A$ 或 $e\in C$" 且 "$e\in B$ 或 $e\in C$",

$e\in A\cup C$ 且 $e\in B\cup C$,

$e\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

这就证实了第二个分配律. 图 1-7 表明了这个分配律的直观含义. 图中阴影部分表示$(A\cap B)\cup C$. 证毕

集合的并及交可以从对于两个集合推广到对于有限多个集合或对于无限多个集合. 例如，一序列集合 $A_1, A_2, \cdots$的并集

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

就是由至少属于 A_1、A_2、…中的一个的元素的全体组成的集合；一序列集合 A_1, A_2, …的交集

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots (\text{或 } A_1 A_2 \cdots)$$

就是由同时属于 A_1、A_2、…的元素的全体组成的集合. 相应的分配律也成立. 例如,

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \cap C = (A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap C) \cup \cdots$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots) \cup C = (A_1 \cup C) \cap (A_2 \cup C) \cap \cdots.$$

设 A、B 为任意两个集合. 由属于 A 但不属于 B 的元素的全体组成的集合称为从 A 中去掉 B 后的差集, 记作

$$A - B.$$

图 1-8 中, 阴影部分表示差集 $A-B$. 例如, 从区间$(1, 4)$中去掉区间$(0, 2)$后的差集为区间$[2, 4)$.

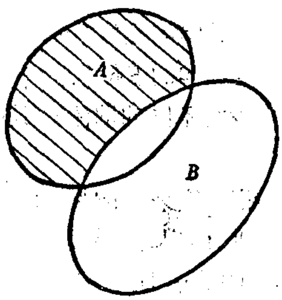

图 1-8

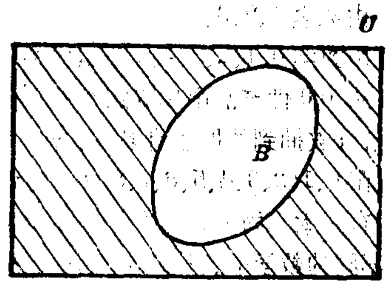

图 1-9

设 $B \subset U$. 称 $U-B$ 为 B 在 U 内的余集, 记作

$$\overline{B}_U.$$

图 1-9 中, 阴影部分表示 $\overline{B}_U$. 例如, 当 U 为整个实轴时, 区间$(-\infty, a)$在 U 内的余集为$[a, +\infty)$.

下面提出几条关于“对于同一个 U 求余集”这一运算的性质. 设 A、B、…都是 U 的子集. 为了简便起见, 略去了表达求余集时的下标 U.

(1) $\overline{\overline{A}} = A$;

(2) 如果 $A \subset B$, 那么, $\overline{A} \supset \overline{B}$;

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

下面来给出性质 (3) 中第一个等式的证明．下列诸关系是相互等价的：

$$e\in\overline{A\cup B},$$
$$e\notin A\cup B,$$
$$e\notin A \quad 且 \quad e\notin B,$$
$$e\in\overline{A} \quad 且 \quad e\in\overline{B},$$
$$e\in\overline{A}\cap\overline{B}.$$

从而，
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

其余几条性质可以类似地进行证明．性质 (3) 对于多于两个集合也成立。

习 题 1

1．由数字 1、2、3、4、5、6 能组成多少个没有重复数字的五位数？

2．由数字 0、1、2、3、4、5 能组成多少个没有重复数字的五位数？

3．从 100 件产品中抽取四件进行检查．有多少种不同的取法？其中某一件产品恰好被抽到的取法有多少种？

4．在 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中任取四个，能组成多少个是偶数的四位数．

5．有三本不同的数学书、五本不同的物理书、四本不同的英语书．从中任取两本不同的数学书、三本不同的物理书、三本不同的英语书．有多少种取法？

6．区间$[-3,\ 3]$与$(-\infty,\ -1)\cup[3,\ +\infty)$的交集是怎样一个集合？

7．xOy 面上由 $x^2+y^2\leqslant4$ 确定的集合与由 $x^2+y^2>1$ 确定的集合的交集是怎样一个集合？

8．证明：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

9．A、B 之间有怎样的关系才会有 $B-A=B$.

10．证明 $\overline{(A\cup B)\cap C}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{C}$.

11．设 A、B 为任意两个集合．把 $A\cup B$ 表达成 A 及另一个与 A 不相交且为 B 的子集的集合的并集．

12．设 A、B、C 为三个集合．从 AC 及 BC 不相交能不能推出 A、B 不相交？作图表明你的结论．

13．指出下列各等式或陈述是否成立，并说明理由．

(1) $A\cup B=(A\overline{B})\cup B$.

(2) $\overline{A}B=A\cup B$.

(3) $\overline{A\cup B}\cap C=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(4) $(AB)(A\overline{B})=V$.

(5) 如果 $A\subset B$，那么 $A=AB$.

(6) 如果 $AB=V$ 且 $C\subset A$，那么，$BC=V$.

(7) 如果 $A\subset B$，那么 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

(8) 如果 $B\subset A$，那么，$A\cup B=A$.