数　学

—它的内容、方法和意义—

第一卷

〔苏〕A. Д. 亚历山大洛夫 等 著

孙小礼　赵孟养　裘光明　严士健 译

关肇直　秦元勋 校

科 学 出 版 社

1984

内 容 简 介

本书是苏联数学界普及数学知识的一部名著．全书共二十章，分三卷出版．书中不仅综述了现代数学的各分支学科，还综述了数学的哲学、历史发展及其在物理和工程技术方面的应用．本书每章都由苏联第一流学者撰写，有很高的学术水平．同时，本书写得深入浅出，只要具备高中的数学知识，就可以理解．在努力实现四个现代化的今天，这部书必将帮助我国广大读者扩大眼界，找到解决问题的数学工具．本卷包括四章，内容是数学概观、数学分析、解析几何、代数．

本书可供大学数学系师生、中学教师、具有高中以上文化程度的学生、有关方面的科技人员及数学爱好者阅读．

А. Д. Александров

МАТЕМАТИКА, ЕЁ СОДЕРЖАНИЕ, МЕТОДЫ И ЗНАЧЕНИЕ/ТОМ 1/

Издательство Академии Наук СССР, 1956

数 学

——它的内容、方法和意义——

第 一 卷

〔苏〕A. Д. 亚历山大洛夫 等 著

孙小礼 赵孟养 裘光明 严士健 译

关肇直 秦元勋 校

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1958年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1984年2月第五次印刷 印张：10 1/4

印数：59,121—85,220 字数：269,000

统一书号：13031·2479

本社书号：3405·13—1

定价：1.60元

重印说明

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，它在自然科学和技术的各个部门有着广泛的应用，对人类认识自然和改造自然起着重要的作用．近年来，随着科学技术的迅速发展，数学的研究范围不断地扩大，内容日益丰富，已发展成为分支众多的庞大系统．由于数学的理论具有高度抽象的形式，它的许多较新的分支不易为非专业的人员所理解．为使读者能在较短的时间内用较少的精力获得关于数学的起源、现状及发展的基本知识，苏联的数学家们编写了这部著作．

本书包括数学的二十个分支，分别由苏联第一流数学家撰写，对于数学的各个分支、内容及方法，它们赖以建立的基础以及它们的发展过程作了简明而系统的论述．书中并阐述了数学的哲学，数学的发展对科学文化的影响，以及数学在物理和工程技术方面的应用．各个学科的科学家及工程技术人员都会在本书中找到有用的内容，而对于一些年青的数学家来说，本书也可开扩其眼界，使他们了解数学的全貌．

本书叙述由浅入深，内容融汇贯通，而其所要求的预备知识并不很多，只要具备高中的数学知识就可理解本书的大部分内容．

本书中译本于五十年代末出版，受到广泛的欢迎，至今仍有许多读者要求重印．因纸型已毁，现据原译本做了一些必要的修改，重新排印．

当然，本书问世已有二十余年．在这期间，数学发展突飞猛进，有许多新的内容，新的概念，本书未能包括．但是，对于了解数学的基本内容和历史发展，本书仍不失为一部优秀的参考读物．至于想要了解数学最新发展的读者，可参阅其他有关著述．

科学出版社

第 二 卷

第 三 卷

原　　序

数学，由于实际的需要在古代便已经产生了，现在发展成为分支众多的庞大系统．数学正如其他科学一样，反映了物质实际的规律，并成为理解自然和征服自然的有力武器．但由于数学本身的高度抽象性，致使它的新的部门比较难为非专业的人所理解．正因为数学的这种抽象特征，所以还在古代便产生了认为数学与物质实际无关的唯心概念．

在编写这本书时，作者们是从这样的共同愿望出发，即要向苏联知识界的相当广大的阶层介绍每个数学分支的内容与方法，它的物质基础及发展道路．

读者只要具备中等学校数学课程的知识就能阅读本书；但三卷中每卷材料的难易程度是不一致的．要想初步认识高等数学的原理，可读前面几章；但要全部理解以后各章，则需要参考相应的教科书．对全书而言，则基本上只有那些在运用数学分析方法（微分法与积分法）已有某些经验的读者才容易理解．对于这类读者——自然科学与工程专业界人士及数学教师——引导他们熟悉更新的数学分支的那些章节是特别重要的．

自然，要在一部书里概括数学研究的丰富内容（即使是它几个主要方向的），是不可能的，因此在选材方面就必须有某些自由．但总的说来，这部书应当能使读者对近代数学的情况及其发生与整个发展的前景大致有一个概念．因此在一定程度上也考虑到那些已知道书中所用的事实材料的基本部分的人．这本书当能帮助我们的某些青年数学工作者消除他们有时常有的某些眼界的狭隘性．

本书各章由不同的作者写成，作者的姓名分载于目录中．但作为一部完整的著作来说，则是一个集体劳动的产物．它的总的

计划、材料的选择、各章文稿的内容，都经过集体讨论，并在热烈地交换意见的基础上加以改善. 苏联很多城市的数学家在有关的讨论会上对本书的初稿发表了宝贵的意见，这些意见和建议，作者们都曾加以考虑.

一部分作者也直接参加了其他各章的最后定稿工作：第二章的绪论部分基本上是 Б. Н. 杰龙涅写的；Д. К. 法捷耶夫积极地参加了第四章及第二十章的编写工作.

除了各章的作者外，还有以下同志参加了工作：Л. В. 康托罗维奇写了第十四章第四节，О. А. 拉得任斯卡雅写了第六章第六节，А. Г. 波斯特尼可夫写了第十章第五节，О. А. 俄列尼克参加了第五章文稿的编写工作，Ю. В. 普罗霍罗夫参加了第十一章文稿的最后校订工作.

В. А. 扎尔加列尔写了第一、二、七及十七等章的若干节. 文稿的最后校订是由 В. А. 扎尔加列尔及 В. С. 维金斯基在 Т. В. 洛果兹金娜及 А. П. 列奥诺娃的参与下完成的.

插图的主要部分是由 Е. П. 谢金绘制的.

编辑委员会

秦元勋 译

目 录

第 一 卷

第一章　数学概观

对于任何一门科学的正确概念，都不能从有关这门科学的片断知识中形成，尽管这些片断知识足够广泛．还需要对这门科学的整体有正确的观点，需要了解这门科学的本质．本章的目的就是给出关于数学的本质的一般概念．为了这个目的，没有很大必要去详细考察新的数学理论，因为这门科学的历史和初等数学就已经提供了足够的根据来作出一般的结论．

§1. 数学的特点

1．甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地察觉到数学的这些特征：第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是它的应用的极端广泛．

抽象性在简单的计算中就已经表现出来．我们运用抽象的数字，却并不打算每次都把它们同具体的对象联系起来．我们在学校中学的是抽象的乘法表——总是数字的乘法表，而不是男孩的数目乘上苹果的数目，或者苹果的数目乘上苹果的价钱等等．

同样地在几何中研究的，例如，是直线，而不是拉紧了的绳子，并且在几何线的概念中舍弃了所有性质，只留下在一定方向上的伸长．总之，关于几何图形的概念是舍弃了现实对象的所有性质只留下其空间形式和大小的结果．

全部数学都具有这种抽象的特征．关于整数的概念和关于几何图形的概念——这只是一些最原始的数学概念．之后才是其他许多达到象复数、函数、积分、微分、泛函、n 维甚至无限维空间等等这样抽象程度的概念．这些概念的抽象化好象是一个高于一个，一直高到这样的抽象程度，以致看上去已经失去了同生活的一切

联系，以致“凡夫俗子”除了感到“莫名其妙”以外什么也不能理解.

事实上情形当然不是这样. 虽说 n 维空间的概念的确非常抽象，但它却有完全现实的内容，要了解这内容并不那么困难. 在这本书里将要特别强调和解释上面列举的那些抽象概念的现实意义，并且使读者相信这些概念全都是既从它们自身的起源方面也从实际应用方面同生活联系着的.

不过，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性. 因此，单是数学概念的抽象性还不能说尽数学的特点.

数学在它的抽象方面的特点还在于：第一，在数学的抽象中首先保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切. 第二，数学的抽象是经过一系列阶段而产生的；它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象. 我们将以数学的基本概念：数与形为例来详细解释这两点. 最后——这也是惹人注意的——数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中. 如果自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验，那末数学家证明定理只需用推理和计算.

当然，数学家们为了发现自己的定理和方法也常常利用模型，物理的类比，注意许多单个的十分具体的实例等等. 所有这些都是理论的现实来源，有助于发现理论的定理，但是每个定理最终地在数学中成立只有当它已从逻辑的推论上严格地被证明了的时候. 如果一个几何学家报告一条他所发现的新定理时，只限于在模型上把它表示出来，那么任何一个数学家都不会承认这条定理是被证明了. 对于证明一个定理的要求从中学的几何课程中就可以很好地了解到了，这种要求贯穿在全部数学中. 我们可以极精确地测量成千个等腰三角形的底角，但这并不能给我们以关于等腰三角形两底角相等的定理的数学证明. 数学要求从几何的基本概念推导出这个结果(现在在几何的严格叙述中基本概念的性质是精确地表述在公理中)，并且总是这样的：证明一个定理对于数

学家来说就是要从这个定理中引用的那些概念所固有的原始性质出发，用推理的方法导出这个定理．这样看来，不仅数学的概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的．

数学结论本身的特点具有很大的逻辑严格性．数学推理的进行具有这样的精密性，这种推理对于每个只要懂得它的人来说，都是无可争辩和确定无疑的．数学证明的这种精密性和确定性人们从中等学校的课程中就已很好地懂得了．数学真理本身也是完全不容争辩的．难怪人们常说："像二乘二等于四那样的证明"．这里，数学关系式 $2\times2=4$ 正是取作不可反驳、无可争辩的范例．

但是数学的严格性不是绝对的，它在发展着；数学的原则不是一劳永逸地僵立不动了，而是变化着的并且也可能成为甚至已经成为科学争论的对象．

归根到底，数学的生命力的源泉在于它的概念和结论尽管极为抽象，但却如我们所坚信的那样，它们是从现实中来的，并且在其他科学中，在技术中，在全部生活实践中都有广泛的应用；这一点，对于了解数学是最主要的．

数学应用得非常广泛也是它的特点之一．

第一，我们经常地、几乎每时每刻地在生产中、在日常生活中、在社会生活中运用着最普通的数学概念和结论，甚至并不意识到这一点．例如，我们计算日子或开支时就应用了算术，而计算住宅的面积时就运用了几何学的结论．当然，这些结论都是十分简单的，不过，记起这一点是有益的：在古代某个时候，这些结论曾经是当时正在萌芽中的数学的一些很高的成就．

第二，如果没有数学，全部现代技术都是不可能的．离开或多或少复杂的计算，也许任何一点技术的改进都不能有；在新的技术部门的发展上数学起着十分重要的作用．

最后，几乎所有科学部门都多多少少很实质地利用着数学．"精确科学"——力学、天文学、物理学、以及在很大的程度上的化学——通常都是以一些公式来表述自己的定律(这是每个从中学

毕业的人都早已懂得的)，都在发展自己的理论时广泛地运用了数学工具. 没有数学，这些科学的进步简直是不可能的. 因此，力学、天文学和物理学对数学的需要恰好也总是在数学的发展上起了直接的、决定性的作用.

在其他科学中数学起着较小的作用. 但是就在这些领域中，它也有重要的应用. 当然，在研究像生物现象和社会现象那样复杂的现象时，数学方法本质上不能起像在物理学中所能起的那样的作用. 数学的应用总是只有与具体现象的深刻理论相结合才有意义，在这些现象的研究中尤其如此. 记住这一点是很重要的，这样才不致迷惑于毫无实在内容的公式游戏. 但是无论如何，数学几乎在所有科学中，从力学到政治经济学，都有着这样那样的应用.

我们来回忆几个在精确科学和技术中特别出色的数学应用的例子.

太阳系最远的行星之一的海王星是在1846年在数学计算的基础上被发现的. 天文学家阿达姆斯和勒未累分析了天王星的运动的不规律性，得出结论说：这种不规律性是由其他行星的引力而发生的. 勒未累根据力学法则和引力法则计算出这颗行星应该位于何处，他把这结果告诉了观察员，而观察员果然从望远镜中在勒未累所指出的位置上看到了这颗星. 这个发现不仅是力学和天文学特别是哥白尼体系的胜利，而且也是数学计算的胜利.

另一个同样令人信服的例子是电磁波的发现. 英国物理学家马克斯威尔概括了由实验建立起来的电磁现象规律，把这些规律表述为方程的形式. 他用纯粹数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波并且这种电磁波应该以光速传播着. 根据这一点，他提出了光的电磁理论，这理论以后被全面地发展和论证了. 但是，除此以外，马克斯威尔的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波，例如，由振动放电所发射的电磁波. 这样的电磁波果然被赫芝所发现. 而不久之后，波波夫就找到了电磁振荡的激发、发送和接收的办法，并把这些办法带到许多应用部门，从而为全部无线

电技术奠下基础. 在已成为公共财富的无线电的发现中，纯粹数学推论的结果也起了巨大的作用.

科学就是这样从观察，比如观察到由电流而引起磁针偏转，进入概括，进入现象的理论，进入规律的提出以及它们的数学表达式. 新的结论从这些规律中产生，而最后，理论又体现在实践中，实践也给予理论以向前发展的新的强有力的动力.

特别值得注意的是，没有从自然科学或技术方面来的直接推动，而仅从数学本身内部产生的最抽象的数学体系，甚至也有极有价值的应用. 例如，虚数在代数中出现了，在很长一段时间中它们的实在意义却没有被理解，这一情况可以从它们的名称中看出. 但是以后，就在上世纪初对它们给予了几何的解释（见第四章§2)，从而虚数在数学中完全站住了，并且建立了复变数（就是$x+y\sqrt{-1}$形式的变数）函数的广泛理论. 这种所谓“虚”变数的“虚”函数的理论完全不是虚假的，而是解决许多技术问题的很现实的工具. 比如，茹可夫斯基关于机翼上升力的基本定理正好就是以这个理论作为工具来证明的. 又如，就是这个理论在解决堤坝渗水问题时也显示了它的用处，至于这个问题的意义在巨大的水电站建设时代是很显然的.

非欧几里得几何是另一个同样光辉的例子[1]. 它是从欧几里得时代起的几千年来人们想要证明平行公理的企图中，也就是说，从一个只有纯粹数学趣味的问题中产生的. 罗巴切夫斯基创立了这门新的几何学，他自己谨慎地称之为“想象的”，因为还不能指出它的现实意义，虽然他相信是会找到这种现实意义的. 他的几何学的许多结论对大多数人来说非但不是“想象的”，而且简直是不可想象和荒诞的. 可是无论如何罗巴切夫斯基的思想为几何学的新发展以及各种不同的非欧几里得空间的理论的建立打下了基础；后来这些思想成为广义相对论的基础之一，并且四维空间非欧几里得几何的一种形式成了广义相对论的数学工具. 于是，至少

1) 我们只在这里指出这个例子，不进行解释，读者可以在第三卷第十七章找到这个例子的解释.

看来是不可理解的抽象数学体系成了一个最重要的物理理论发展的有力工具. 同样地, 在原子现象的近代理论中, 在所谓量子力学中, 实际上都运用着许多高度抽象的数学概念和理论, 比如, 无限维空间的概念等等.

不必陷于例子的列举; 我们已经足够地强调了数学在日常生活实践中, 在技术中, 在科学中都有最广泛的应用, 并且只从数学本身内部生长起来的理论在精确科学和许多技术问题中也有其应用. 除了数学的抽象性、严格性和它的结论的确定性以外, 数学的另一个特征便是如此.

2. 注意了所有这些数学的特点, 我们当然还没有阐明数学的本质, 毋宁说只是指出了数学的外表特征. 问题在于要解释这些特点. 为此至少应该回答下列问题:

抽象的数学概念反映什么东西? 换句话说, 数学的现实对象是怎样的?

为什么抽象的数学结论如此令人确信无疑, 而原始的概念又如此显然? 换句话说, 数学方法的基础是什么?

为什么数学尽管如此抽象, 却有最广泛的应用, 而不是空洞的抽象把戏? 换句话说, 数学的意义从何而来?

最后, 什么样的力量推动数学发展, 使它把抽象性和应用的广泛统一起来? 换句话说, 数学发展过程的内容是什么?

回答了这些问题, 我们就可以得到关于数学的对象, 关于它的方法的根据, 关于它的意义和发展的一般概念, 也就是说抓住了它的本质.

唯心主义者和形而上学者们不但在解决这些问题方面陷于混乱, 而且简直是把数学翻转过来完全加以歪曲. 例如, 看到数学结论的高度抽象性和明确性, 唯心主义者们就想象说, 数学是从纯粹思维中产生的.

事实上数学没有给唯心主义和形而上学以任何根据; 恰好相反, 客观地考察一下全部数学的关系和发展, 它正可以给辩证唯物主义提供又一个光辉明证, 并且每一步都反驳了唯心主义和形而

上学. 我们只要试图从最一般的特点上来回答前面所提出的关于数学本质的问题，就会相信这一点的. 我们也相信对于这些问题的答案已经包含在由马克思主义经典作家所建立的关于数学以及关于科学和认识一般的本质的原理中了. 为了预先解释这些问题，考察一下算术和初等几何的基础就够了. 我们就要开始讨论它们. 进一步深入到数学中去，当然可以加深和发展已经得到的结论，但无论如何不会改变这些结论.

§2. 算 术

1. 关于数的概念(我们现在说的只是正整数)——这个我们如此习惯的概念，形成却很慢. 我们根据不久以前还处于原始公社制度各个不同阶段的那些民族进行计算的情况就可以判定这一点. 有些民族甚至还没有大于二或三的那些数的名称，有些民族虽然还可以往下多数几个数，但无论如何还是很快就完结了，他们把较大的数简单地称作"许多"或"无数地". 由此可见明显地划分开来了的各个数是人们逐渐地积累起来的.

起初，人们没有数的概念，即使他们能够用自己的方式判断出在实践中遇到的这一物体集合或那一物体集合的大小. 应该认为，数已被他们直接了解为物体集合的不可缺的性质，但是他们还没有明显地把数分离出来. 我们已经这样地习惯于计算，以至不见得能表明它，却可以理解它[1].

在更高的发展阶段上，数已被指明为物体集合的性质，但是还没有把它当作"抽象的数"，当作同具体物体无关的一般的数而与物体集合分离开来. 这可以从有些民族给予数的名称中看出来，例如："手"就是五，"整个人"就是二十等等. 这里五不是抽象地被理

1) 因为，任一物体集合，比如有一群绵羊或者一堆木柴，可以从其全部具体性及复杂性中直接地被感觉出来，而从其中分离出个别性质和关系则是经过一定分析的结果. 原始的思维还不能作出这样的分析，而只是整体地看待客体. 正如一个不懂音乐的人欣赏音乐作品，分不出其中细致的旋律、曲调等等，但一个音乐家甚至能够很容易地分析复杂的交响乐.

解，而是简单地理解为"就是象手上的指头那样多"，而二十被理解为"就是象一个人身上所有的手指和脚指那样多"等等．这和有些民族还没有比如"黑色的"、"坚硬的"、"圆的"等等概念的情形完全一样．为了说明一个物体是黑色的，他们把它，例如与老鸦比较；而为了说明有五个东西，他们就把这些东西直接地与手比较．常常是这样，即数有不同的名称，用于不同种类的物体，一些是用来计算人的，另一些是用来计算船只的等等，共达数十种不同的数．这里不是抽象的数，这些"有名数"好象是分别属于一定种类的物体的．有一些民族根本没有数的独立名称，例如没有"三"字，但是他们能够说"三个人"，在"三处地方"等等．

正如我们常常说这个或那个物体是黑色的，但是很少说"黑"本身，因为这个概念比较抽象[1]．

物体的数目是物体的某个集合的性质，数本身，换句话说即"抽象的数"，是一种脱离了具体物体集合的象"黑"、"坚硬性"等那样本身已经可以设想的性质．就象黑是具有煤的颜色的各种物体的公有性质一样，数"五"是所有包含象手上的指头那样多个物体的集合的公有性质．于是等数性由简单的比较建立起来了，取出集合的一个物体，我们就弯一个手指头，就这样地用手指头一个个数出它们．完全不利用数，就用把两个集合的物体逐一比较的办法一般地即可以断定它们的物体数是否相等．例如，客人入座了，没有作任何计算，可是如果女主人少摆了一付餐具，她却能很容易地查出来，因为一个客人还没有餐具．

这样一来，可以提出数的下述定义：**每一个单个的数，象"二"、"五"等等，是物体集合的一种性质．这种性质对于所有那些物体集合之间可以将其物体逐一对比的集合来说是共同的，对于那些不能将其物体逐一对比的集合来说是不同的．**

1）关于物体性质的概念，比如物体的颜色或数目，其形成过程，可以分成三个阶段，当然这些阶段的划分也不能太严格．在第一阶段，性质是由物体的直接比较确定的：就是象老鸦这个样子；就是象手上的指头那样多．在第二阶段，出现了形容词：黑色的石头，同样地出现了数词：五株树等等．在第三阶段，性质脱离了物体，可以变成为性质"本身"，象"黑"，象抽象的数"五"等等．

为了要发现这种共同性质，并且把它明显地分出来，也就是为了建立这个数或那个数的概念并给于它名称象“六”、“十”等等，就必须在不少物体集合之间进行比较、人们世世代代地进行计算，千百万次地重复这同一种运算，于是在实践中发现了数及数之间的关系.

2. 对于数进行计算、运算，也正是对具体物体作实在计算的反映. 这也可以从数的名称中明显地看出. 例如，有些印第安人把数“二十六”说成“我们在两个十上面加上六”. 显然，这里反映出计算物体的具体方法. 尤其明显的是数的加法相当于把两个或多个物体集合堆放在一起成为一个总合. 同样地容易看出减法、乘法和除法的具体意义(特别是乘法，可以看出它的产生无非是由于把两个或三个或更多的相同的集合加起来).

在计算过程中，人们不仅发现和掌握了单个的数之间的关系，比如，二加三等于五，并且还逐渐地建立起一般规律. 在实践中发现：和数与几个被加数的顺序无关，也就是对一定物体计算的结果与这计算按怎样的顺序进行无关(后面这种情形具体表现在“序”数与“量”数相一致：第一、第二等等与一、二等等相一致). 因此数不是一个个无关的而是处在相互关联之中.

一个数在其名称及写法上甚至可通过其他数表示出来. 例如，“二十”表示“二个十”，按照法文，80——“四-二十”(quatrevingt)，90——“四-二十-十”，又如，罗马数字 VIII, IX 表示 $8=5+3$, $9=10-1$.

总之，不单是产生了一些单个的数，而且产生了具有一定关系和规律的数的**系统**.

算术的对象正是具有一定关系和规律的数的系统[1]. 单个的抽象数本身不具有那种包含很多内容的性质，关于它，一般地没有多少可说的. 如果我们问，比如，数 6 的性质，那末可以指出 $6=5+1$, $6=3\cdot 2$ 以及 6 是 30 的因子等等. 但是这里数 6 处处与

1) “算术”(Арифметика)这个字起源于希腊字“计算的艺术”(“Арифмое”——数，“Техне”——艺术).