概率论与数理统计

主　编　杜忠复　靳曼莉　雷　鸣
副主编　徐长玲　张丽春　李廷彬
主　审　李　辉

科学出版社

概率论与数理统计

主　编　杜忠复　靳曼莉　雷　鸣
副主编　徐长玲　张丽春　李廷彬
主　审　李　辉

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，按照教育部对高校理工类本科“概率论与数理统计”课程的基本要求及考研大纲编写而成的. 本书注重概念的实际应用和统计思想方法的渗透，并配备了数学实验来增强学生的实践能力.

本书共十章，主要包括随机事件与概率、一维随机变量、多维随机变量、数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析，以及数学实验.

本书可供高等理工类院校各相关专业使用，也可供相关领域科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/杜忠复，靳曼莉，雷鸣主编—北京：科学出版社，2017

ISBN 978-7-03-051631-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杜… ②靳… ③雷… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 009074 号

责任编辑：石 悦 李 萍／责任校对：张怡君

责任印制：赵 博／封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2017 年 1 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：271 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门学科．随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用．一方面，它为现代科学技术、工农业生产等作出了理论依据；另一方面，广泛的应用也促进了概率论与数理统计的迅速发展．

本书是按照高等院校理工类本科教学基本要求编写的．概率论与数理统计是理工类各相关专业教学计划中的一门处理随机现象的必修课程．我们总结了多年来的教学经验，致力于讲清其最基本的概念和方法，并用大量的例题来说明其应用的广泛性．内容由浅入深，例题由简入难，在满足教学基本要求的基础上因材施教，兼顾了部分考研学生的要求．

本书的编写过程力求逻辑的严密性和理论体系的完整性，同时理论联系实际，着重介绍概念、原理和例题的背景与现实意义．概念的引出与例题的设计由简到难逐步展开，通俗易懂，难点分散，从而有利于与其他课程及学生自身专业的衔接．

本书可划分为三个层次：

第一层次为概率论部分，包括第 1～5 章．本部分从简单的试验入手引出随机事件等基本概念．将随机事件和实数之间建立联系，引入随机变量，从而更深入地讨论随机现象的统计规律性．第二层次为数理统计部分，包括第 6～9 章．本部分主要讲述数理统计的基础知识、参数估计、假设检验与方差分析、回归分析，主要是对随机现象统计规律归纳的研究．这两个层次虽然在方法上有明显的不同，但作为一门学科，它们相互渗透，相互联系．第三层次为数学实验部分，即第 10 章．我们利用 MATLAB 软件引入数学模型与数学试验，反映了现代信息技术对本学科的影响，而且这些内容能够使学生更好地了解本学科的广泛应用．

本书具有以下特点：

（1）从简单的实际问题入手引出概念，使得概念的理解简单易懂，教学内容不会过于抽象，而且增加学生的学习兴趣，尽量使学生“学会了，还会用”．

（2）例题与习题的调整．在例题与习题的难度梯度上进行了调整，由简入难，循序渐进．一方面，加强学生对基本概念及基本计算的理解与掌握；另一方面，在满足教学基本要求的前提下，注重加强学生对概率论与数理统计深层的了解、

认识与提升；同时通过一些问题突出该课程在实际生活中的应用.

（3）MATLAB 软件的介绍. 在计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术为数学教育提供了更广阔的天地. 第 10 章介绍了 MATLAB 软件的简单应用，列举了能体现数学建模精神，且学生以后可能接触到的应用范例与数学建模问题. 学生在学有所用的同时，其数学兴趣也受到了培养.

本书由北华大学数学与统计学院杜忠复、靳曼莉、雷鸣担任主编，徐长玲、张丽春、李廷彬担任副主编. 全书由杜忠复、靳曼莉统稿和定稿. 北华大学数学与统计学院李辉教授担任本书的主审.

本书的编写过程得到了许多同行的鼓励、支持与帮助，他们提出了许多中肯和宝贵的意见，在此谨表感谢. 由于编者的水平有限，书中一定存在许多疏漏与不当之处，希望读者能惠予批评指正.

编　者

2016 年 10 月于吉林

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论是从数量上研究随机现象统计规律性的一门学科．它在自然科学、社会科学及管理科学中都有重要应用．本章主要介绍概率论中的一些基本概念及重要结论．

1.1　随机事件与样本空间

在生产实践、科学试验与日常生活中，人们观察到的现象大致分为两类：

一类是确定性现象，即在一定条件下，必然会发生某一结果或必然不发生某一结果的现象．例如，向上抛掷一枚硬币必然会下落；从 10 件产品（2 件合格品，8 件次品）中任意抽取 3 件必然会有次品等都是确定性现象．它们的共同点：事先就可以确定其结果．

另一类是随机现象，即在一定条件下具有多种可能发生的结果的现象．例如，抛掷一枚硬币一次，可能出现正面也可能出现反面．从 10 件产品（2 件合格品，8 件次品）中任意抽取 1 件，结果可能是次品也可能是合格品．随机现象的共同点：事先确定不了多个可能结果中会出现哪个．随机现象是偶然性与必然性的辩证统一，其偶然性表现在每一次试验前无法确定发生哪个结果，必然性表现在相同条件下多次重复某一个试验时，各种结果表现出一定的量的规律性，我们称之为随机现象的统计规律性．概率论就是一门研究随机现象统计规律性的数学分支．它从偶然现象中揭示出潜在的必然性．

1.1.1　随机事件

为研究随机现象的统计规律性而进行的各种科学实验或对事物某种特征进行的观测都称为随机试验，简称为试验，一般用字母 E 表示．例如，

E_1：抛掷一枚均匀硬币一次，观察正反面出现的情况．

E_2：在相同的条件下，连续不断地向同一个目标射击，直到击中为止，记录射击次数．

E_3：在一批同型号的灯泡中，任意抽取一只，测试它的使用寿命．

试验 E_1 只有两种可能的结果：出现正面和出现反面，但是在抛之前确定不了

出现哪一面．对于试验 E_2，射击次数可以是 $1,2,\cdots$，因而试验的所有可能结果是全体正整数，但在击中目标前不知道需要射击多少次．对于试验 E_3，灯泡的寿命是一个非负实数，但在测试结束前确定不了灯泡的寿命是多长．可见上面这些试验都具有下列三个特性：

（1）在相同的条件下，试验可以或原则上可以重复进行，即重复性；

（2）每次试验的结果具有多种可能性，且在试验之前可以确定一切可能出现的基本结果，即明确性；

（3）每次试验之前不能确定多种可能结果中出现哪一个，但可以确定每次试验一定会出现多种可能结果中的某一个，即随机性．

随机试验的每一个可能的结果称为**随机事件**，简称事件，用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，必要时可以加上下标．例如，$A=$“正面向上”，$B=$“射击次数为 3 次”，$C=$“灯泡的使用寿命低于 1000 小时”等都是随机事件．在一定的研究范围内，不能再分解的最简单的随机事件称为**基本事件**．基本事件的全体构成的集合称为**样本空间**，记为 Ω，样本空间 Ω 中的每个元素即基本事件称为**样本点**，记为 ω，即有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$．可见随机事件是样本空间的子集．每次试验中事件 A 发生当且仅当 A 中有一个样本点出现．

在一定条件下，必然发生的事件称为**必然事件**，用 Ω 表示．例如，“掷一颗骰子一次，出现的点数大于零”就是必然事件．样本空间作为一个事件即为必然事件．在一定条件下，必然不发生的事件称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示．例如，“掷一颗骰子一次，出现的点数大于六”就是不可能事件．需要指出的是，必然事件与不可能事件是每次试验之前就可以确定的，因此它们不是随机事件，但为了讨论问题方便，把它们都看成特殊的随机事件，即作为随机现象的两个极端情况．

例 1.1.1　试验 E：掷一颗骰子一次，观察出现的点数．

显然对于试验 E，样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A_i=$“出现 i 点”$(i=1,2,3,4,5,6)$ 为基本事件．$B=$“出现偶数点”为随机事件．

运用点集的概念研究事件的关系和运算，将使问题变得更加直观．

1.1.2　事件的关系和运算

1. 事件的包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $B\supset A$，或 $A\subset B$．对任

意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$．

我们用维恩（Venn）图对这种关系给出直观的说明．图 1.1 中的长方形表示样本空间 Ω，长方形内的每一点表示样本点，椭圆 A 和椭圆 B 分别表示事件 A 和 B．如图 1.1 所示，椭圆 A 在椭圆 B 的里面表示事件 B 包含事件 A．

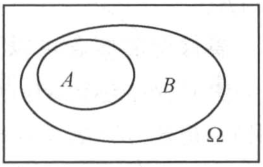

图 1.1

在例 1.1.1 中，$A_2=$“出现 2 点”，$B=$“出现偶数点”，则 $A_2 \subset B$．

2. 事件的相等关系

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，即事件 A 和 B 包含的样本点相同，记作 $A=B$.

3. 事件的并（和）

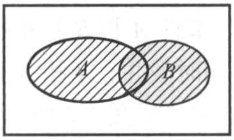

图 1.2

设 A 和 B 为两个事件，我们把属于 A 或 B 的样本点的全体构成的集合称为事件 A 与 B 的并（和），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$．也就是说，事件 $A\cup B$ 表示在一次试验中，事件 A 与 B 至少有一个发生. 图 1.2 中的阴影部分表示事件 $A\cup B$．

事件并的概念可以推广到有限个或可列无穷多个事件.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件 A 称为这 n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的并（和），记作

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i \quad \left(\text{或}A=\sum_{i=1}^{n}A_i\right).$$

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生的事件 A 称为事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的并（和），记作

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \quad \left(\text{或}A=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right).$$

4. 事件的交（积）

设 A 和 B 为两个事件，我们把同时属于 A 和 B 的样本点的全体构成的集合称为事件 A 与 B 的交（积），记作 $A\cap B$ 或 AB．也就是说，事件 $A\cap B$ 表示在一次试验中，事件 A 与 B 同时发生．图 1.3 中的阴影部分表示事件

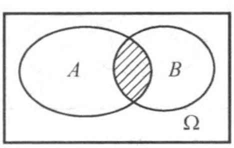

图 1.3

$A\cap B$.

事件交的概念可以推广到有限个或可列无穷多个事件.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件 A 称为这 n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的交（积），记作

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \quad \left(\text{或}A=\prod_{i=1}^{n}A_i\right).$$

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件 A 称为事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的交（积），记作

$$A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i \quad \left(\text{或}A=\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right).$$

5. 事件的互不相容（互斥）

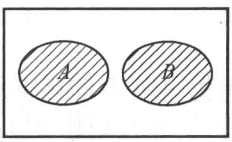

图 1.4

设 A 和 B 为两个事件，如果 $AB=\varnothing$，那么称事件 A 和 B 互不相容（或互斥）. 也就是说，事件 A 和 B 互不相容表示在一次试验中，事件 A 与 B 不同时发生. A 和 B 互不相容的直观意义为区域 A 和 B 不相交. 如图 1.4 所示.

互不相容的概念可以推广到两个以上的事件：若 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥. 显然任一随机试验中的基本事件都是互不相容的.

6. 事件的逆

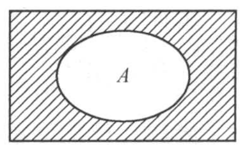

图 1.5

对于事件 A，我们将不属于 A 的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆（或 A 的对立事件），记为 $\overline{A}$. 这就是说，事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 图 1.5 的阴影部分即表示事件 $\overline{A}$.

由事件的逆的概念知 A 与 $\overline{A}$ 是互为对立事件的，且满足

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega.$$

显然两个对立事件一定是互斥的，但互斥事件却不一定是对立的.

7. 事件的差

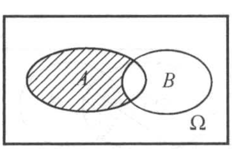

图 1.6

设 A 和 B 为两个事件，我们将由属于 A 但不属于 B 的样本点的全体构成的集合称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$. 也就是说，事件 $A-B$ 表示在一次试验中事件 A 发生但事件 B 不发生. 图 1.6 的阴影部分即表示事件 $A-B$. 可见 $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

8. 完备事件组

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件为必然事件，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组. 它的实际意义是每次试验中必然发生且仅能发生 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个事件. 当 $n=2$ 时，A_1,A_2 是对立事件. 显然任一随机试验的全部基本事件构成一个完备事件组.

结合集合论的知识会发现，事件间的关系和运算与集合间的关系和运算之间可以相互类比. 下面给出这种类比的对应关系：

概率论	集合论
样本空间	$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$
事件	子集
事件 A 发生	$\omega\in A$
事件 A 不发生	$\omega\notin A$
必然事件	Ω
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生必然导致事件 B 发生	$A\subset B$
事件 A 与 B 至少有一个发生	$A\cup B$
事件 A 与 B 同时发生	$A\cap B$
事件 A 与 B 不同时发生	$A\cap B=\varnothing$
事件 A 不发生	$\overline{A}$
事件 A 发生但事件 B 不发生	$A-B$

例 1.1.2

事件“A,B,C 中至少发生一个”可以表示为 $A\cup B\cup C$ 或 $\Omega-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

事件“A,B,C 中恰好发生一个”可以表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

事件“A,B 发生，C 不发生”可以表示为 $AB\overline{C}$.

事件的运算满足下面运算规律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些规律不难证明，这里我们用集合论的语言证明（4）对偶律作为范例.

$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$ 的证明:

任取$\omega \in \overline{A \cup B}$，则$\omega \notin A \cup B$.这表明

$$\omega \notin A, \quad \omega \notin B,$$

即有

$$\omega \in \overline{A}, \quad \omega \in \overline{B},$$

从而$\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

任取$\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$，则$\omega \in \overline{A}, \ \omega \in \overline{B}$，即

$$\omega \notin A, \quad \omega \notin B,$$

故

$$\omega \notin A \cup B,$$

从而

$$\omega \in \overline{A \cup B}.$$

综上有$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$.

例 1.1.3 掷一颗骰子，观察出现的点数．设$A=$“出现奇数”，$B=$“出现的点数小于 5”，$C=$“出现小于 5 的偶数”.

（1）写出样本空间Ω及事件$A+B, A-B, A+\overline{C}, \overline{A+B}, AB$；

（2）分析事件$A+\overline{C}, A-B, B, C$之间的包含、互斥及对立关系.

解 （1）样本空间为$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,事件$A=\{1,3,5\}, B=\{1,2,3,4\}, C=\{2,4\}$，则

$$\begin{aligned}
&A+B=\{1,2,3,4,5\}, \\
&A-B=\{5\}, \\
&A+\overline{C}=\{1,3,5,6\}, \\
&\overline{A+B}=\{6\}, \\
&AB=\{1,3\}.
\end{aligned}$$

（2）由（1）有$A-B \subset A+\overline{C}, C \subset B$．$A-B$与$B$互斥，$C$与$A+\overline{C}$对立.

1.2　事件的频率与概率

对于一般的随机事件来说，虽然在一次试验中是否发生我们不能预先知道，

但如果独立重复地进行这一试验多次就会发现不同的事件发生的可能性是有大小之分的. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，是客观存在的. 就好比一根木棒有长度，一块土地有面积一样. 一个根本问题是，对于一个随机事件，它发生的可能性究竟有多大. 例如，掷一颗质地均匀的骰子一次，出现奇数点与出现偶数点的可能性大小相同，出现点数为 3 比出现奇数点的可能性小. 为了定量地描述随机事件的这种属性，我们先来介绍频率的概念.

定义 1.2.1 在一组不变的条件 S 下，独立地重复 n 次试验 E. 如果事件 A 在 n 次试验中出现了 μ 次，则称比值 $\frac{\mu}{n}$ 为在 n 次试验中事件 A 出现的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{\mu}{n}, \tag{1.1}$$

其中 μ 称为频数.

易证频率具有以下性质：

（1）非负性：$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

（2）规范性：$f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

（3）有限可加性：若事件 A,B 互斥，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

例如，在抛掷一枚硬币时我们规定条件：硬币是均匀的，垂直上抛后硬币落在一个有弹性的平面上. 当这些条件大量重复实现时，事件 $A=$“出现正面”发生的次数 μ 能够体现出一定的规律性. 历史上，不少统计学家作过成千上万次抛掷硬币的试验，其试验结果如表 1.1 所示.

表 1.1 历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	试验次数 n	频数 μ	频率 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
费 勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维 尼	30 000	14 994	0.499 8

可见，频率在一定程度上反映了事件发生可能性的大小. 尽管每作一串（n 次）试验，所得到的频率可以各不相同，但是只要 n 相当大，频率的波动性就会越来越小，且呈现出一种稳定状态，即频率在 0.5 这个定值附近摆动.