微积分和数学分析引论

第一卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰 著

科学出版社

微积分和数学分析引论

第一卷　第二分册

R. 柯朗　F. 约翰 著

刘嘉善　戴中维 等 译

冷生明　张顺燕　　校

科　学　出　版　社

1 9 8 2

内 容 简 介

柯朗与约翰合著的《微积分和数学分析引论》一书系统地阐述了微积分学的基本理论及其应用．在叙述上作者尽量作到既严谨又通俗易懂，并指出概念之间的内在联系和直观背景．原书分两卷，第一卷为单变量情形，第二卷为多变量情形．

第一卷中译本分两册出版，本书为第一卷第二分册，从第四章开始．第四章介绍微积分在物理和几何中的应用；第五章讲述泰勒展开式；第六章讲述数值方法；第七章介绍无穷和与无穷乘积的概念；第八章为三角级数；第九章是与振动有关的最简单类型的微分方程．各章后面有附录、大量的例题和习题．它们有助于深入理解本书的内容．

读者对象为理工科大学师生、数学工作者和工程技术人员．

译者（按分章顺序）：刘嘉善（四），张文岭（五），冯泰（六），王文娟（七），戴中维（八），于秀林（九）．参加部分校阅的有林建祥、韩厚德和应龙安．

R. Courant F. John

INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS

Volume 1

John Wiley and Sons, Inc.

微积分和数学分析引论

第一卷 第二分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

刘嘉善 戴中维 等译

冷生明 张顺燕 校

责任编辑 黄 南

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 1 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1982 年 1 月第一次印刷 印张：10 7/8

印数：0001—11,800 字数：285,000

统一书号：13031·1781

本社书号：2422·13—1

定价：1.65 元

目　　录

第四章　在物理和几何中的应用 ……………………………… (349)

4.1　平面曲线理论……………………………………………… (349)

a. 参数表示 (349)　b. 参数变换(351)　c. 沿曲线的运动. 时间作为参量. 摆线的例子(352).　d. 曲线的分类. 定向(357).　e. 导数. 切线和法线的参数表示 (367)　f. 曲线的长度 (371)　g. 弧长作为参数(376)　h. 曲率(378)　i. 坐标轴变换. 不变量(384)　j. 狭义相对论中的匀速运动(386)　k. 表示闭曲线内部面积的积分 (389)　l. 质量中心和曲线的矩 (397)　m. 旋转曲面的面积和体积(398)　n. 惯性矩(399)

4.2　例…………………………………………………………… (400)

a. 普通摆线(400)　b. 悬链线(402)　c. 椭圆和双纽线(402)

4.3　二维向量……………………………………………………… (403)

a. 用平移定义向量.　记号(404)　b. 向量的加法和乘法 (408)　c. 变向量及其导数和积分 (416)　d. 对平面曲线的应用. 方向，速度和加速度(417)

4.4　在给定力作用下质点的运动……………………………… (420)

a. 牛顿运动定律(421)　b. 落体运动(422)　c. 约束在给定曲线上的质点的运动(423)

4.5　受到空气阻力的自由落体运动…………………………… (426)

4.6　最简单的一类弹性振动——弹簧的运动……………… (428)

4.7　在给定曲线上的运动……………………………………… (429)

a. 微分方程和它的解(429)　b. 沿一曲线下滑的质点 (431)　c. 运动的讨论(433)　d. 普通摆(434)　e. 圆滚摆(435)

4.8　引力场中的运动…………………………………………… (437)

a. 牛顿万有引力定律(437)　b. 绕引力中心的圆周运动 (438)　c. 径向运动——逃逸速度(440)

4.9　功和能……………………………………………………… (442)

a. 力在运动中所作的功（442） b. 功和动能．能量守恒（444）
c. 两个质点间的相互引力（445） d. 弹簧的拉伸（447） e. 电容器充电（447）
附录 ……………………………………………………（447）
A.1 法包线的性质 ……………………………………（447）
A.2 闭曲线包围的面积．指数 ………………………（454）
问题 ……………………………………………………（458）

第五章 泰勒展开式 ……………………………………（463）

5.1 引言：幂级数……………………………………（463）
5.2 对数和反正切的展开式…………………………（465）
a. 对数函数(465) b. 反正切函数(467)
5.3 泰勒定理…………………………………………（468）
a. 多项式的泰勒表示(469) b. 非多项式函数的泰勒公式(469)
5.4 余项的表示式及其估计…………………………（470）
a. 柯西和拉格朗日余项(470) b.泰勒公式的另一种推导法(474)
5.5 初等函数的展开式………………………………（477）
a. 指数函数（477） b. $\sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ 的展开式(478)
c. 二项式级数(479)
5.6 几何应用…………………………………………（482）
a. 曲线的接触(482) b. 关于相对极大值和相对极小值的理论(485)
附录 I ……………………………………………………（486）
A.I.1 不能展成泰勒级数的函数的例…………………（486）
A.I.2 函数的零点和无限点……………………………（487）
a. n 阶零点(487) b. ν 阶无限(488)
A.I.3 不定式……………………………………………（488）
A.I.4 各阶导数都不为负的函数的泰勒级数的收敛性……（491）
附录 II 插值法 …………………………………………（495）
A.II.1 插值问题．唯一性 ………………………………（495）
A.II.2 解的构造．牛顿插值公式 ………………………（496）

A.II.3　余项的估计 …………………………………………… (499)
A.II.4　拉格朗日插值公式 ………………………………… (502)
问题 ……………………………………………………………… (503)

第六章　数值方法 ………………………………………………… (506)

6.1　积分的计算……………………………………………… (506)
a. 矩形近似公式(507)　b. 改进的近似式——辛卜生法则(508)
6.2　数值方法的另一些例………………………………… (515)
a. “误差计算”(515)　b. π 的计算(518)　c. 对数的计算(519)
6.3　方程的数值解法……………………………………… (520)
a. 牛顿法(521)　b. 假位法(524)　c. 迭代法(525)　d. 迭代与牛顿程序(528)
附录 ……………………………………………………………… (530)
A.1　斯特林公式 ……………………………………………… (530)
问题 ……………………………………………………………… (534)

第七章　无穷和与无穷乘积 ………………………………… (536)

7.1　收敛与发散的概念…………………………………… (537)
a. 基本概念(537)　b. 绝对收敛与条件收敛(539)　c. 项的重新排列(543)　d. 无穷级数的运算(546)
7.2　绝对收敛和发散的判别法…………………………… (546)
a. 比较判别法．控制级数(547)　b. 与几何级数相比较的收敛判别法(547)　c. 与积分相比较(550)
7.3　函数序列………………………………………………… (553)
a. 函数与曲线序列的极限过程(553)
7.4　一致收敛与不一致收敛……………………………… (555)
a. 一般说明和定义 (555)　b. 一致收敛的一个判别法 (561)　c. 连续函数的一致收敛级数之和的连续性(562)　d. 一致收敛级数的积分(563)　e. 无穷级数的微分法(565)
7.5　幂级数…………………………………………………… (566)
a. 幂级数的收敛性质——收敛区间(567)　b. 幂级数的积分法和微分法(569)　c.幂级数的运算(570)　d. 展开式的唯一性(571)

e. 解析函数(572)

7.6 给定函数的幂级数展开式．待定系数法．例…………(573)

a. 指数函数（573） b. 二项式级数（574） c. $\arcsin x$ 的级数（576） d. $\operatorname{ar}\sinh x=\log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$的级数(576) e. 级数乘法的例(577) f. 逐项积分的例(椭圆积分)(577)

7.7 复数项幂级数……………………………………(578)

a. 在幂级数中引进复数项．三角函数的复数表示式(578) b. 复变函数一般理论一瞥(580)

附录……………………………………………………(582)

A.1 级数的乘法和除法 ……………………………(582)

a. 绝对收敛级数的乘法(582) b. 幂级数的乘法和除法(583)

A.2 无穷级数与广义积分 …………………………(584)

A.3 无穷乘积 ………………………………………(586)

A.4 含有伯努利数的级数 …………………………(589)

问题……………………………………………………(591)

第八章 三角级数 ……………………………………(600)

8.1 周期函数……………………………………………(601)

a. 一般说明．函数的周期开拓（601） b. 一个周期上的积分（602） c. 谐振(603)

8.2 谐振的迭加…………………………………………(605)

a. 谐波．三角多项式(605) b. 拍(610)

8.3 复数表示法…………………………………………(611)

a. 一般说明(611) b. 交流电上的应用(612) c. 三角多项式的复数表示法(614) d. 一个三角公式(615)

8.4 傅立叶级数…………………………………………(616)

a. 傅立叶系数(616) b. 基本引理(618) c. $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$的证明(619) d. 函数 $\phi(x)=x$ 的傅立叶展式(621) e. 关于傅立叶展开的主要定理(624)

8.5 傅立叶级数的例……………………………………(629)

a. 预先说明(629) b. 函数 $\phi(x)=x^2$ 的展开式(629) c. $x\cos x$

的展开式(630) d. 函数 $f(x)=|x|$(631) e. 一个分段常数函数(632) f. 函数 $|\sin x|$(633) g. $\cos\mu x$ 的展开式. 余切分解为部分分式. 正弦的无穷乘积(633) h. 进一步的例(635)

8.6 收敛性的进一步讨论……(636)

a. 结果(636) b. 贝塞耳不等式(636) c. 推论(a),(b)和(c)的证明(637) d. 傅立叶系数的量阶.傅立叶级数的微分法(640)

8.7 三角多项式和有理多项式的近似法……(641)

a. 关于函数表示法的一般说明(641) b. 外尔斯特拉斯逼近定理(641) c. 按算术平均值的傅立叶多项式的费叶尔三角近似式(643) d. 在平均意义下的逼近和巴色瓦关系式(645)

附录 I ……(648)

A.I.1 周期区间的伸缩变换. 傅立叶积分定理……(648)

A.I.2 非连续点上的吉布斯现象……(650)

A.I.3 傅立叶级数的积分……(652)

附录 II ……(654)

A.II.1 伯努利多项式及其应用 ……(654)

a. 定义及傅立叶展式(654) b. 生成函数;三角余切和双曲余切的泰勒级数(657) c. 欧拉-马克劳林求和公式(660) d. 应用. 渐近表达式(662) e. 幂级数的和; 伯努利数的递推公式(664) f. 欧拉常数和斯特林级数(665)

问题……(668)

第九章 关于振动的最简单类型的微分方程 ……(671)

9.1 力学和物理学的振动问题……(671)

a. 简单的机械振动(671) b. 电的振荡(672)

9.2 齐次方程的解法. 自由振动……(673)

a. 形式解(673) b. 解的诠释(676) c. 满足给定的初始条件. 解的唯一性(676)

9.3 非齐次方程. 强迫振动……(678)

a. 一般说明. 叠加法(678) b. 非齐次方程的解法(679) c. 共振曲线(681) d. 振动的进一步讨论(683) e. 关于记录仪器构造的说明(685)

第四章　在物理和几何中的应用

4.1　平面曲线理论

a. 参数表示

定义　用方程 $y=f(x)$ 来表示曲线在几何上有很大的限制：这样表示的曲线与平行于 y 轴的任意直线相交不能多于一点．通常，把曲线分成可以表为 $y=f(x)$ 的若干部分来克服这个限制．因此，一个以原点为中心，以 a 为半径的圆，可由定义于 $-a\leqslant x\leqslant a$ 的两个函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 给出．但是，对于像平行于 y 轴的直线，这个办法却不行．

表示曲线的更灵活的方法是利用方程 $\varphi(x,y)=0$ 这样一种隐示表示法，在这个方程里包含一个含有两个自变量的函数 φ．例如，以原点为中心，以 a 为半径的圆可由 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$ 完全描述．平面上任意直线都有一个形如 $ax+by+c=0$ 的隐示方程，其中 a,b,c 是常数，且 a 和 b 不都是零．在 $b=0$ 时，我们得到 y 轴的一条平行线．

曲线的这种隐示描述法有一个缺点，即欲求曲线上的点 (x,y)，就必须对于一给定的 x，求解方程 $\phi(x,y)=0$．这个问题我们将在第二卷详细讨论．

曲线最直接和最灵活的描述法是参数表示．我们不把直角坐标 x 或 y 中的一个看成另一个的函数，而把两个坐标 x 和 y 都看成为第三个自变量 t 的函数，t 是所谓参数或参量 (parameter)[1)]；当 t 在一个相应的区间内变化时，坐标为 x 和 y 的点就描绘出一条曲线，这样的参数表示我们已经遇到过了；例如，圆 $x^2+y^2=a^2$ 有参数表示 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$．这里，t 表示圆的中心角．

---

1) 这个词表示辅助变量而不是主要变量．

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，我们有类似的参数表示 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，其中 t 是所谓偏心角，即由椭圆上的点 $P=(a\cos t, b\sin t)$ 向上或向下引垂线与外接圆相交的交点的圆心角. 这里，我们假定 $b<a$（见图 4.1). 在上述两例中，当 t 在区间 $0\leqslant t<2\pi$ 内变化时，坐标为 x，y 的点描绘了整个的圆或椭圆.

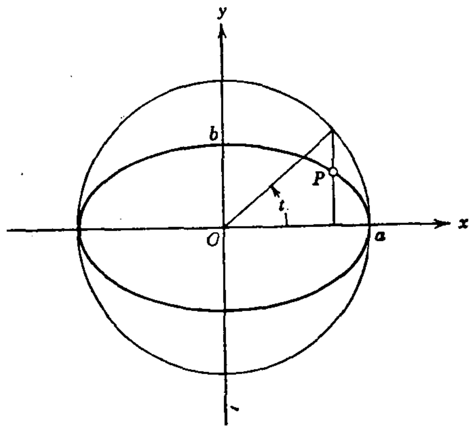

图 4.1

一般地，曲线 C 表示为参数 t 的两个函数，

$$x=\phi(t)=x(t),$$
$$y=\psi(t)=y(t);$$

在不会发生混淆的时候，我们将使用符号 $x(t)$ 和 $y(t)$.[1]

除非特别指明，我们总是假定 ϕ 和 ψ 有连续导数.

参数区间到曲线上的映射；方向的指向

对于给定的曲线，必须这样确定两个函数 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$，使得对应于 t 的某个区间，一对函数值 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的集合定义了曲线上的全部的点，而且没有其他点.这样，在曲线上的点和 t 轴的一个区间上的 t 值之间就有了一个对应关系. 参数表示定义了 **t 轴到曲线的一个映射**，即由 t 轴上的原象点 t 映射到 C 的点 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$.

因为假定 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是连续的，所以 t 轴上的相邻点对应到曲线上的相邻点. 因为 t 轴的点是有序的，所以我们可以用明显的方式把 C 的点规定一个次序或“指向”，即如果 $t_1<t_2$，那么由 t_1

1) 符号 $x=\phi(t)$ 等，侧重于表示自变量和因变量之间的特殊函数关系；而符号 $x(t)$ 等，是指，把 t 看成自变量，x 是它的函数.

映射的点在由 t_2 映射的点的前面(见358页). 因此，对于曲线这个含糊的直观概念，参数表示给出了明确的意义，把它作为点的集合，其中的点象按直线上的顺序一样排列起来了.

b. 参数变换

参数 t 的值可用来区别曲线 C 上的不同的点；它们对曲线上的每个点起了"命名"的作用.

同一曲线 C 可以有许多不同的参数表示. 沿着曲线连续变化并且在曲线不同的点上取不同值的任何一个量都可以当作参数.

例如，如果曲线原来由方程 $y=f(t)$ 给出，那么我们可以选择变量 x 作为参数 t. 而用函数 $x=t$, $y=f(t)$ 描述曲线. 类似地，对于给定 x 作为 y 的函数所描述的曲线，比如说 $x=g(y)$，我们可以用 y 作为参数 t，记作 $x=g(t)$，$y=t$.

在极坐标 r，θ 中，用方程 $r=h(\theta)$ 给定的曲线（见第一章，第108页)我们可以选择 θ 作为参数 t 而得到参数表示

$$x=r\cos\theta=h(t)\cos t=\phi(t),$$

$$y=r\sin\theta=h(t)\sin t=\psi(t).$$

从一给定的曲线 C 的参数表示 $x=\phi(t)$，$y=\psi(t)$，我们总可以推导出很多其他的参数表示. 为此目的，我们取任意一个函数 $\tau=\chi(t)$，它在相应于曲线 C 的点的 t 区间上单调并且连续；那么在相应的 τ 区间上，函数 χ 存在一个单调和连续的反函数 $t=\sigma(\tau)$. 这时 C 的点 (x, y) 的坐标可表为

$$x=\phi[\sigma(\tau)]=\alpha(\tau),\quad y=\psi[\sigma(\tau)]=\beta(\tau).$$

函数 $\alpha(\tau)$ 和 $\beta(\tau)$ 也是连续的；并且 C 的不同点对应于 t 的不同值，因此，由于函数 σ 的单调性也就对应于不同的 τ 值. 参数由 t 到 τ 的变换的全部效果就在于把 C 上的点"再命名".

例如，直线 $y=x$ 有参数表示 $x=t$，$y=t$，其中 $-\infty<t<\infty$. 作替换 $\tau=t^3$ 便对这同一条直线给出参数表示 $x=\tau^{1/3}$, $y=\tau^{1/3}$.

类似地，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可以有参数表示 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，其中 $0\leqslant t<2\pi$. 定义 $t=c\zeta+d$，c 与 d 为实数 $(c\neq 0)$，同一个椭圆就得到另一个表示 $x(\zeta)=a\cos(c\zeta+d)$，$y(\zeta)=b\sin(c\zeta+d)$；在 $c>0$ 时，ζ 在区间 $-\frac{d}{c}\leqslant\zeta<\frac{2\pi-d}{c}$ 上变化；在 $c<0$ 时，ζ 在区间 $\frac{(2\pi-d)}{c}<\zeta\leqslant-\frac{d}{c}$ 上变化. 作替换 $\tau=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ 可以导出椭圆的"有理"参数表示（见第 314 页）

$$x=\frac{a(1-\tau^2)}{1+\tau^2},\quad y=\frac{2b\tau}{1+\tau^2};$$

当 τ 取遍全部实数值时，我们就得到了这一椭圆所有的点，只缺少点 $S=(-a,0)$.

如果使用适当的参数，可使通常表示式的奇异性消失. 例如，我们可用光滑的函数 $x=t^3$，$y=t^2$ 表示曲线 $y=\sqrt[3]{x^2}$. 当 t 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，坐标为 x，y 的点就描绘出整个曲线（半立方抛物线）.

这种参数选择的灵活性常常使我们能够简化几何性质的研究，当然，几何性质并不依赖于特殊的表示法.

特殊地，有时我们发现使用 $y=f(x)$ 表示 C 或 C 的一部分是方便的. 如果对于曲线的一部分 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$，函数 ϕ，ψ 中的一个，譬如说 $x=\phi(t)$ 是单调的，这样的表示法总是可能的. 事实上，对于这部分有唯一的反函数 $t=\gamma(x)$，因此 $y=\psi[\gamma(x)]$.[1)]

c. 沿曲线的运动. 时间作为参量. 摆线的例子

沿曲线的运动.

参量 t 常常有自然的物理意义，即时间. 在平面上一个点的

1) 当然，这只是关于曲线在"小范围"性质的一个说法. 就是说，这个说法仅仅对适当小的一部分成立. 通常(例如，在圆的情况下)，变量 x 不能在整个曲线上，而只能在一部分曲线上用作参量.

任何运动都可以把它的坐标 x 和 y 表示为时间的函数，在时刻 t，点 (x, y) 在 $(x(t), y(t))$. 这两个函数以参数形式确定了沿路径(即轨道) C 的运动. 它们构成了时间标度到轨道的一个映射.[1)]

摆线和次摆线

以摆线为例，当一个圆沿着一条直线或另一个圆匀速而无滑动地滚动时，动圆上一点的路径叫做摆线. 最简单的情况是一个半径为 a 的圆沿 x 轴滚动；圆周上点 P 的路径就是"普通"摆线. 我们这样选择坐标系的原点和初始时间，使得在时刻 $t = 0$，点 P 位于原点，在时刻 t 时，圆从它的初始位置转了一个角 t. 这就是说，圆以角速度 1 按顺时针转动. 已经假定圆沿 x 轴作没有滑动地匀速滚动，因此在时刻 t，切点和原点的距离刚好等于由切点到 P 点的弧长. 因此，在时刻 t，滚动圆的中心 M 必定在点 (at, a) 上；圆心以常速 a 向右运动(见图 4.2). 对于在时刻 t 时 P 的坐标，我们得到参数表示

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \tag{1}$$

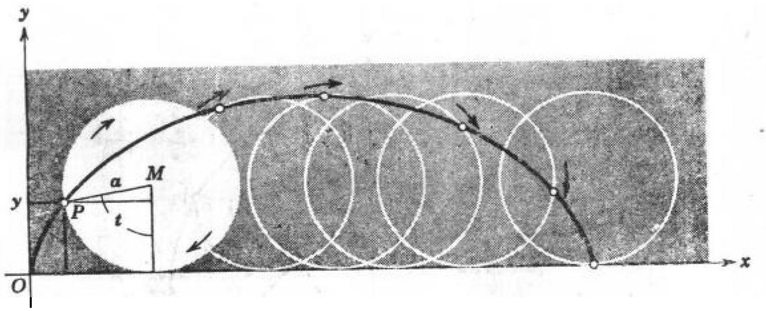

图 4.2 摆线

消去参数 t，我们能得到非参数形式的曲线方程，然而却失去了表达的简洁性，我们有

$$\cos t = \frac{a - y}{a}, \quad t = \arccos\frac{a - y}{a}, \quad \sin t = \pm\sqrt{1 - \frac{(a-y)^2}{a^2}},$$

1) 参数 t 的变换对应于时间标度的变换，根据它，曲线 C 用动点描述.

因此

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} \mp \sqrt{y(2a-y)}, \tag{1a}$$

这就得到 x 作为 y 的函数.

外摆线

我们的下一个例子是外摆线，它定义为一个半径为 c 的圆沿着第二个半径为 a 的圆的圆周外边匀速滚动时，固定在动圆圆周上的点 P 的路径. 设固定的圆以 x，y 平面的原点为中心. 假定动圆沿着固定的圆以这样的方式滚动，即在时刻 t，动圆的中心绕原点转了大小为 t 的角（图 4.3）. 那么，对于在时刻 t，点 $P=(x(t), y(t))$ 的位置（它在时刻 $t=0$ 是切点 $(a, 0)$），我们得到参数方程

$$\begin{aligned} x(t) &= (a+c)\cos t - c\cos\left(\frac{a+c}{c}t\right), \\ y(t) &= (a+c)\sin t - c\sin\left(\frac{a+c}{c}t\right). \end{aligned} \tag{2}$$

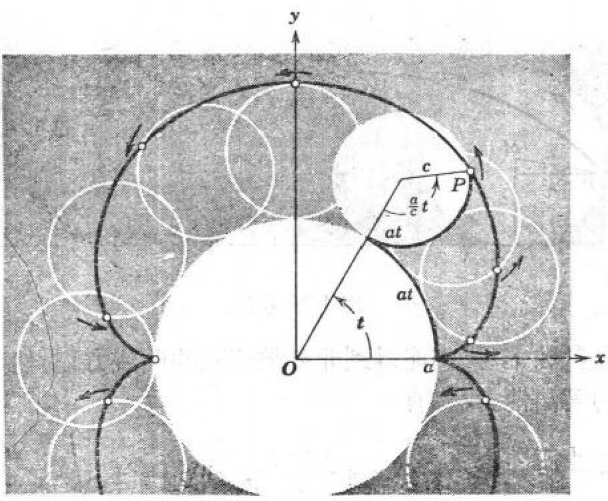

图 4.3　外摆线

当 $a=c$ 时，形成的曲线叫做心脏线（图 4.4），参数方程为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2a\cos t - a\cos(2t), \\
y(t) &= 2a\sin t - a\sin(2t).
\end{aligned} \tag{3}
$$

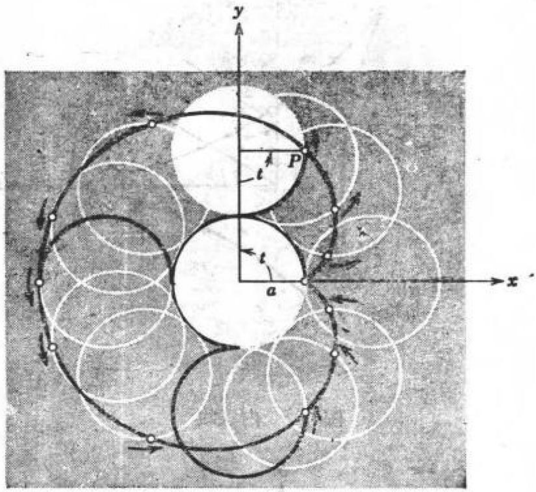

图 4.4 心脏线

第三种摆线是当一个圆沿着另一个固定圆的圆周在内部滚动时，动圆圆周上一点的轨迹．为了得到这个“内摆线”的参数方程，设固定圆的半径为 a，滚动圆的半径为 c．设动圆的圆周上点 P 在时刻 $t=0$ 位于 $(a, 0)$．再假定滚动的圆沿着固定的圆以这样的方式滚动，即在时刻 t，该圆的中心绕原点转了大小为 t 的角度（图 4.5）．这样，我们得到内摆线的参数方程为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (a-c)\cos t + c\cos\left(\frac{a-c}{c}t\right), \\
y(t) &= (a-c)\sin t - c\sin\left(\frac{a-c}{c}t\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

在特殊情况下，当固定圆的半径为动圆半径的 2 倍时，即 $c=\frac{a}{2}$，我们有

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a\cos t, \\
y(t) &= 0,
\end{aligned}
$$

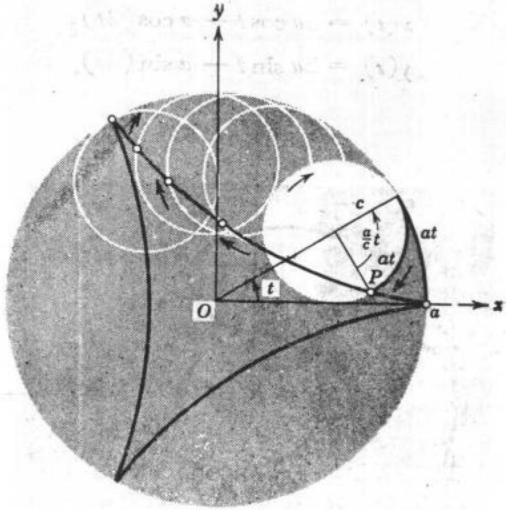

图 4.5　内摆线

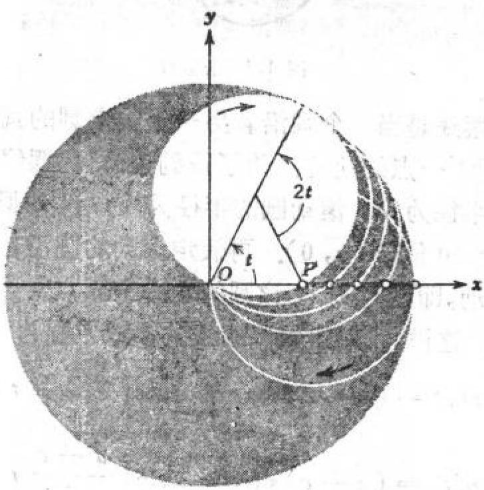

图 4.6　在 2 倍半径的圆内滚动的圆的
边缘上一点 P 描绘了一条直线段

内摆线蜕化成为固定圆的直径，它不断地往复描绘．这个例子有趣的性质是，它提供了只用圆周运动画直线问题的机械方法（图 4.6）．

如果固定圆的半径为动圆半径的 3 倍，那么 $c=\frac{a}{3}$，因而

$$x(t)=\frac{2}{3}a\cos t+\frac{1}{3}a\cos(2t),$$

$$y(t)=\frac{2}{3}a\sin t+\frac{1}{3}a\sin(2t).$$

经过初等计算，我们有

$$x^2+y^2=\frac{5}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2\cos(3t),$$

因此，内摆线与固定的圆刚好交于三个点，曲线如图 4.5 所示.

次摆线

如果我们考虑当一个圆沿一条直线或沿另一个圆的外边或里边滚动时，附着在该圆上的一点 P（不一定在圆的边缘上）的运动，就得到更一般的曲线，叫做次摆线（长短辐圆外旋轮线，长短辐圆内旋轮线）（见图 4.7）. 当一个圆的中心本身沿着一条直线或圆匀速地移动时，在这个圆上一个匀速运动着的点的路径产生同样类型的曲线. 这些曲线在行星视运动的托勒密描述中起着中心的作用.

摆线的某些重要性质将在本章后面讨论（第 451 页）.

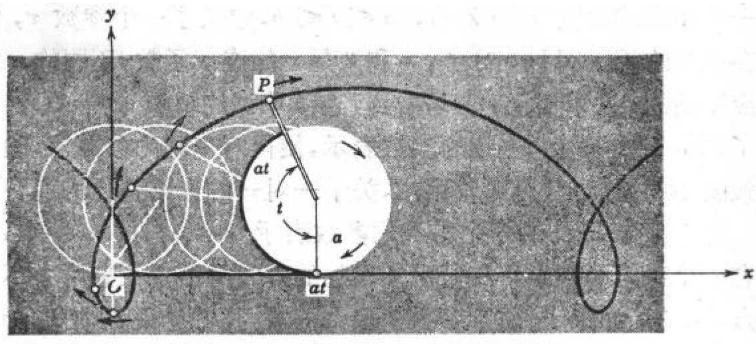

图 4.7　次摆线

d. 曲线的分类. 定向

定义

曲线最明显的特性是曲线所具有的分段（即分枝）的数目