

魏遲荪 编著

# 图论基础

陕西师范大学出版社



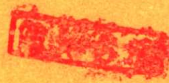
4+2+2

51.427  
C8  
51.427  
C8

861669 - 73

5

# 图论基础



魏 暹 荪 编著



陕西师范大学出版社

# 图 论 基 础

魏 暹 荪 编 著

\*

陕西师范大学出版社 出版

(西安市陕西师大 120 信箱)

陕西省新华书店发行 西安电子科技大学印刷厂印刷

\*

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 插页 2 字数 136 千

1991 年 4 月第 1 版 1991 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-5613-0361-0

O·14 定价：1.77 元

## 前 言

图论是一门应用十分广泛而又极其有趣的新兴数学分支。近 30 年来, 由于电子计算机的广泛应用, 离散数学问题处于越来越重要的地位, 图论作为一门提供一种离散数学模型的应用数学学科而得到了迅速的发展。应用图论来解决运筹学、物理、化学、生物学、计算机科学、网络理论、信息论、控制论、社会科学以及经济管理等方面的问题已显示出极大的优越性。与此同时, 图论本身的理论也取得了很大的进展, 它与其它数学学科联系紧密, 起到了互相促进的作用。从数学教育的角度看, 图论对于锻炼学生的组合思维能力, 提高运用数学工具描述和解决实际问题的能力也大有裨益。因此, 当前图论在全世界数学界、教育界、工程技术界受到了越来越广泛的重视。

近几年来, 我校连续开设了图论选修课, 同学们在学习中对这一学科表现出了极大的兴趣。本书就是在该课程讲义的基础上修改而成的。选择材料的着眼点是入门必备的基础知识、应用背景及这些材料在数学教育中的功能。考虑到中学数学教师指导数学奥林匹克活动的实际需要, 书后专列一个附录, 介绍了国内外数学竞赛中的一些图论问题。各章后面的习题也注意收入了一些这样的问题。这些内容稍加充实, 即可作为专题讲座的资料。因此, 本书既可作为高等师范院校选修课的教材, 又可以作为数学奥林匹克培训的参考资料。

DAA 7/1/2

从事实际工作而对图论感兴趣的同志，也可以把它作为入门读物。

图论的内容十分丰富，涉及的面也很广。但由于学时所限，本书只能介绍图论中最基础的知识，难免挂一漏万，浅尝辄止。有兴趣深入学习图论的读者可以参看书后所列书目，作进一步的学习和研究。

由于本人水平所限，疏漏谬误在所难免，恳切期望大家在使用过程中不断提出批评建议。最后，我要感谢陕西师范大学出版社的同志、许进同志以及为本书精心绘制了插图的任平同志，他们为本书的出版付出了辛勤的劳动。

编 者

1990年10月于西安

# 目 录

## 第一章 图和子图

§ 1.1 基本概念	1
§ 1.2 子图及其运算	7
§ 1.3 通路和回路	10
§ 1.4 最短通路问题	13
§ 1.5 子图集合的代数结构	17
§ 1.6 关联矩阵与邻接矩阵	20
§ 1.7 服务点设置问题	23
习题	28

## 第二章 树

§ 2.1 定义和例子	34
§ 2.2 树的基本特征	37
§ 2.3 生成树	40
§ 2.4 连接问题	44
习题	49

## 第三章 连通性

§ 3.1 (点)连通度和边连通度	53
§ 3.2 块	57
§ 3.3 Menger定理	61
§ 3.4 极小 $k$ -连通图	63
习题	65

## 第四章 边无关集和点独立集

§ 4.1 边无关集(匹配) .....	67
§ 4.2 二分图的边无关集 .....	70
§ 4.3 独立集和覆盖 .....	72
§ 4.4 Ramsey 数 .....	77
习题 .....	84

## 第五章 E 图和 H 图

§ 5.1 七桥问题与 Euler 图 .....	88
§ 5.2 Hamilton 图 .....	91
§ 5.3 中国邮递员问题 .....	100
§ 5.4 旅行售货员问题 .....	103
习题 .....	106

## 第六章 图的染色

§ 6.1 边染色 .....	110
§ 6.2 点染色 .....	116
§ 6.3 色多项式 .....	122
习题 .....	127

## 第七章 平面图

§ 7.1 平面图和可平面图 .....	129
§ 7.2 Euler 公式 .....	132
§ 7.3 Kuratowski 定理 .....	137
§ 7.4 四色问题与五色定理 .....	141
习题 .....	144

## 第八章 有向图

§ 8.1 有向图的概念 .....	146
§ 8.2 单向通路 .....	148

§ 8.3	单向回路	152
§ 8.4	有向树与有序树	156
	习题	162
<b>第九章</b>	<b>网络最大流</b>	
§ 9.1	网络的流与割	165
§ 9.2	最大流最小割定理	170
§ 9.3	标记法	173
	习题	177
[附录]	数学竞赛中的图论问题	180
	参考书目	201



# 第一章 图和子图

## § 1.1 基本概念

现实世界的许多现象可以用一类图形来描述，这种图形由一个点集和连接这个点集中某些点对的线所构成。例如，用点表示车站，线表示连接车站与车站的道路；或者用点表示人，连线表示一对朋友。在这种图形中，人们主要感兴趣的是：两点是否被一条线所连接，而连线的长短曲直则无关紧要。大量的这类事实的数学抽象，产生了图的概念。

有序三元组  $G = [V(G), E(G), \Psi_G]$  称为一个图，其中：

- i)  $V(G)$  称为顶点集合；
- ii)  $E(G) \cap V(G) = \phi$ ， $E(G)$  称为边集合；
- iii)  $\Psi_G$  是  $E(G)$  到  $\{(a, b) \mid a, b \in V(G)\}$  的映射，称为关联函数。

$V(G)$  中的元素称为顶点， $E(G)$  中的元素称为边。 $V(G)$  所含元素的个数即顶点个数称为图的阶，用  $|V(G)|$  表示。 $E(G)$  所含元素的个数称为  $G$  的边数，用  $|E(G)|$  表示。我们用  $G(p, q)$  表示一个阶为  $p$ 、边数为  $q$  的图  $G$ ，这时也说  $G$  是一个  $(p, q)$  图。

**例**  $G = [V(G), E(G), \Psi_G]$

其中： $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

$\Psi_G$  定义为：

$$\Psi_G(e_1) = v_2v_3, \quad \Psi_G(e_2) = v_3v_4$$

$$\Psi_G(e_3) = v_4v_4, \quad \Psi_G(e_4) = v_2v_4$$

$$\Psi_G(e_5) = v_2v_3, \quad \Psi_G(e_6) = v_1v_3$$

一个图可以用平面上的一个图形来表示，这时，用平面上的点代表图的顶点，用平面上连接相应顶点而不经其它顶点且不自交的曲线代表图的边。图 1.1 就是上例中图的图形。

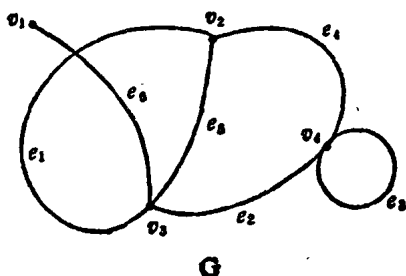


图 1.1

由于顶点的选取和边的形状的任意性，一个图可以有多种在外形上看起来差别很大的图形，例如图 G 的另一个图形可由图 1.2 给出。

我们经常将图的某一个图形就看作是图，并且把它的点称为“顶点”，线称为“边”，图形有助于我们了解和说明图的许多性质。

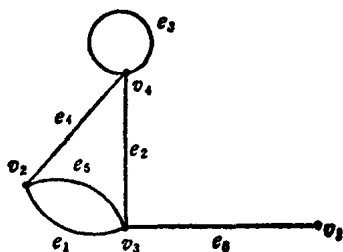


图 1.2

在一个图  $G = [V(G), E(G), \Psi_G]$  中，若  $e \in E(G)$ ， $u, v \in V(G)$ ，而  $\Psi_G(e) = (u, v)$ ，则说  $u$  和  $v$  是  $e$  的端点，也说  $e$

和  $u, v$  关联, 此时, 称  $u$  和  $v$  是邻接的. 若两条不同的边  $e_i$  和  $e_j$  有一个公共的端点, 则称  $e_i$  和  $e_j$  是邻接的, 不与任何边邻接的边称为孤立边, 不与任何边关联的顶点称为孤立点. 两端重合的边称为环, 端点不同的边称为杆.

若  $V(G)$  和  $E(G)$  都是有限集, 则称  $G$  为有限图, 本课程仅讨论有限图.  $G(0,0)$  称为空图.  $E(G) = \phi$  即  $G$  由孤立点所组成, 称为零图. 特别的  $G(1,0)$  称为平凡图. 图中若连接两个相同顶点的边的条数大于 1, 则说这对顶点间有重边相连. 同一对顶点间边的条数称为边的重数, 既没有环, 也没有重边的图称为简单图, 否则称为伪图, 没有环的伪图称为多重图. 图 1.1 的图就不是简单图.

每对不同的顶点均有边相连的简单图称为完全图.  $n$  阶完全图记为  $K_n$ .

图 1.3 所示的图是一个 5 阶完全图.

$K_3$  常称为三角形.

显然有:

**定理 1.1**  $K_n$  有  $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$  条边.

图  $G$  的顶点集  $V(G)$  若能分成两个子集  $V_1$  和  $V_2$ , 使得  $G$  的每条边有一个端点在  $V_1$ , 另一个端点在  $V_2$  中, 则  $G$  称为二分图或偶图. 这样一个把  $V(G)$  分成两个集合  $V_1, V_2$  的分划  $(V_1, V_2)$  称为  $G$  的一个二分划.

设简单二分图  $G$  的二分划为  $(V_1, V_2)$ , 如果  $V_1$  的每一个顶点与  $V_2$  的每一个顶点都邻接, 则  $G$  称为完全二分图.

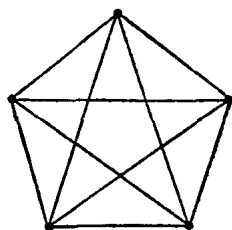


图 1.3

若  $|V_1| = m, |V_2| = n$ , 则这样的图记为  $K_{m,n}$ .

**定理 1.2**  $K_{m,n}$  有  $mn$  条边.

$G$  是简单图, 如果简单图  $G^c$  满足:

i)  $V(G^c) = V(G)$ ,

ii)  $V(G^c)$  中两点当且仅当它们在  $G$  中不邻接时在  $G^c$  中邻接.

那么  $G^c$  称为  $G$  的补图.

在保持图的顶点和边的关联关系不变的情况下, 一个图可以作出许多图形. 如果一个图具有这样的图形, 它的边仅在顶点处相交, 则称它为平面图. 图 1.4(a) 是一个平面图, 因为它具有图形(b)

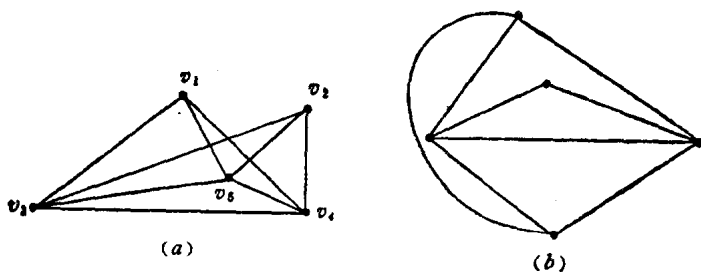


图 1.4

两个图  $H$  和  $G$ , 如果  $V(H) = V(G), E(H) = E(G)$  且  $\Psi_H = \Psi_G$ , 那么  $H$  和  $G$  就称为是恒同的, 恒同的图当然可以用一个图形来表示. 但不恒同的图, 可能具有实质上完全相同的图形. 如图 1.5 的两个 4 阶图  $G_1$  和  $G_2$ , 表面看来是两个不同的图. 但仔细观察一下就会发现, 这两个图不仅顶点个数, 边的个数都相同, 而且顶点和边的关联关系也相同, 这

样的两个图就称为是同构的。

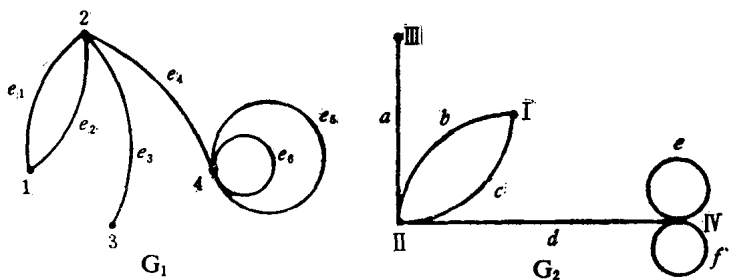


图 1.5 图的同构

设  $G = [V(G), E(G), \Psi_G]$  和  $H = [V(H), E(H), \Phi_H]$  是两个图, 若存在 1-1 对应偶  $(\theta, \phi), \theta: V(G) \rightarrow V(H); \phi: E(G) \rightarrow E(H)$ , 使得当且仅当  $\Psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$  时,  $\Psi_G(e) = uv$ , 则说这两个图同构, 记为  $G \cong H$ .

**例** 图 1.5 的两个图  $G_1, G_2$ , 存在 1-1 对应偶  $(\theta, \phi)$ ,  
 $\theta(1) = I, \theta(2) = II, \theta(3) = III, \theta(4) = IV$ .  
 $\phi(e_1) = b, \phi(e_2) = c, \phi(e_3) = a, \phi(e_4) = d$   
 $\phi(e_5) = e, \phi(e_6) = f$ .

不难验证,  $(\theta, \phi)$  满足定义条件, 因此  $G_1 \cong G_2$ .

同构的图有相同的结构, 差异只是顶点和边的标记不同, 图的同构关系显然具备反身性、对称性和传递性, 因而是一个等价关系. 一个无标记图可以认为是等价的一类图的代表. 当有必要区别于无标记图时, 前面所述的图称为标记图. 一个无标记图可以用属于这个等价类的任何一个标记图的图形来给出, 只是不必给顶点和边赋以标记.

设  $v \in V(G)$ ,  $G$  中与顶点  $v$  关联的边的数目称为  $v$  在  $G$  中的度(次), 记为  $d_G(v)$  或  $d(v)$ .

在度的计数中, 一个环的端点的度数计为 2.

如果  $d(v)$  是奇数, 就说  $v$  是奇顶点; 如果  $d(v)$  是偶数, 就说  $v$  是偶顶点.

如果一个图的每一个顶点都具有相同的度, 则称这个图是正则图. 每个顶点的度均为  $k$  的正则图, 称为  $k$ —正则图.

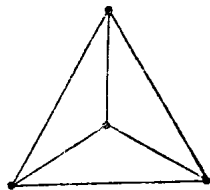


图 1.6

图 1.6 就是一个 3—正则图, 显然  $n$  阶完全图是  $(n-1)$ —正则图.

由于图中每移去一条边就使它的两个端点的度各减少 1, 从而图的总度数减少 2, 故有下列明显的定理.

**定理 1.3** 图  $G$  中各顶点度数之和等于边数的 2 倍, 即

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2q$$

**推论 1.4** 任意一个图奇顶点的个数是偶数.

**证** 设  $V_1, V_2$  分别是  $G$  的奇顶点集和偶顶点集. 则由定理:

$$2q = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

由于  $\sum_{v \in V_2} d(v)$  是偶数, 所以  $\sum_{v \in V_1} d(v)$  也是偶数, 因而

$|V_1|$  是偶数.

**推论 1.5** 正则图的阶与各顶点度数不全为奇数.

## § 1.2 子图及其运算

设  $H$  和  $G$  是两个图. 如果  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$ , 并且  $\Psi_H$  是  $\Psi_G$  在  $E(H)$  内的导出函数, 那么  $H$  称为  $G$  的子图. 此时  $G$  称为  $H$  的母图, 记为  $H \subseteq G$ .

如果  $H \subseteq G$  而  $H \neq G$ , 则说  $H$  是  $G$  的真子图, 记为  $H \subset G$ .

设  $H$  是  $G$  的子图, 如果  $V(H) = V(G)$ , 则  $H$  称为  $G$  的生成子图.

设  $V'$  是  $V(G)$  的非空子集,  $H$  是  $G$  的一个子图, 如果:

- i)  $V(H) = V'$ ;
- ii)  $E(H) = \{e \mid e \in E(G), \Psi_G(e) = uv, u, v \in V'\}$ ;
- iii)  $\Psi_H$  是  $\Psi_G$  在  $E(H)$  上的导出函数.

那么,  $H$  称为由  $V'$  导出的  $G$  的子图, 记为  $G[V']$ .

导出子图  $G[V-V']$  记为  $G-V'$ , 它是从  $G$  中删除  $V'$  中的顶点及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若  $V' = \{v\}$ , 则把  $G - \{v\}$  简记为  $G-v$ , 称为  $G$  的删点子图.

与上述导出子图类似, 设  $E'$  是  $E(G)$  的非空子集, 以  $E'$  作为边集, 以  $E'$  中边的端点的全体为顶点集所组成的子图称为由  $E'$  导出的  $G$  的子图, 记为  $G[E']$ . 它是  $G$  的边导出子图.

从  $G$  中删去边集合  $E'$  中的边之后所得到的导出子图记为  $G-E'$ , 类似地在  $G$  上增加边集合  $E'$  的边所得到的图记为  $G+E'$ . 如果  $E' = \{e\}$ , 则用  $G-e$  和  $G+e$  来分别代替  $G - \{e\}$  和  $G + \{e\}$ .

图 1.7 画出了这些不同类型的子图。

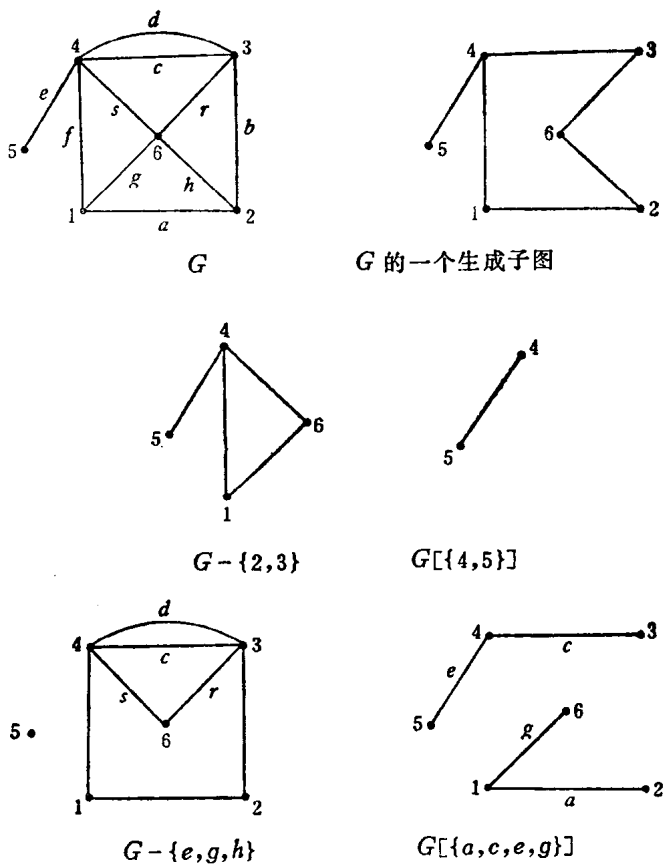


图 1.7

$G_1$  和  $G_2$  是图 1.7 所示  $G$  的两个没有孤立点的子图，它们的顶点被边完全确定，于是  $G_1$  与  $G_2$  间可定义以下几种运算(图 1.8)。



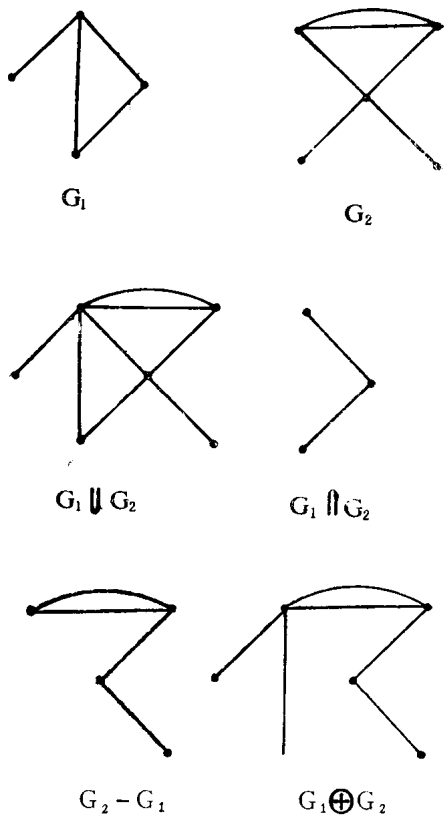


图 1.8 子图的运算

(1)  $G_1$  与  $G_2$  的并, 记为  $G_1 \cup G_2$ . 它是由  $G_1$  和  $G_2$  中的所有边组成的图. 即  $G[E(G_1) \cup E(G_2)]$ . 如果  $G_1$  与  $G_2$  无公共边, 则称  $G_1 \cup G_2$  为  $G_1$  和  $G_2$  的直和, 即  $G_1$  与  $G_2$  的边不重合. 以后凡是提到直和运算时, 参加运算的诸子图之