

成人高等教育教材

高等数学

下 册

重庆大学成人教育学院 编

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

重庆大学出版社

成人高等教育教材

高等数学

下册

参编 谢树艺 王代先 余金诺
邓竞秀 曾繁蓉 万象明

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书分上、下册，下册内容包括：向量代数与空间解析几何；多元函数微分法及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；傅里叶级数等。

本书是按照工科本科专业要求编写的，下册计划教学时数为90学时，同时，专科班也可使用，专科班使用本科教材时，可根据教学时数和专业要求删减某些内容，如删去三重积分、曲面积分和傅里叶级数等。

与本书配套的《教学参考书》，可供教师 and 学员参考。

成人高等教育教材

高等数学

下册

王杰 主编

责任编辑 王季康

*

重庆大学出版社出版发行

重庆师范学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11 字数：247千

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数：1-6000

标准书号： ISBN7-5624-0518-2 定价：4.15元

O·71

(川)新登字020号

前 言

编写本书的指导思想是：既坚持国家教委颁发的全国高等学校工科各专业“高等数学课程教学基本要求”，又适合成人教育特点，做到易教易学。

本书经过1988—1991三个学年试用，所有编者及全体使用本教材的数学教师，都十分关心本书的完善，不断提出修改意见，反复进行讨论和改进。在试用阶段，不仅重庆大学成人教育学院所有本科、专科都使用本书，而且函授班也使用本书。实践说明，使用本书可以达到教学要求，完成教学任务。

与本书配套的《教学参考书》，不仅教师可用，函授生可用，本科、专科生也可在适当的时候用。它可以帮助学员学到更多的数学知识。

本书由王杰副教授任主编，谢树艺教授参加了编写工作，并对全书发表了宝贵意见，其他编者有：王代先副教授、邓竞秀副教授、万象明副教授、曾繁蓉副教授及退休老教师余金诺同志。

重庆大学系统工程及应用数学系杨万年教授、刘松教授、何良材副教授、谈骏渝副教授和已退休的罗国光老教授审阅了全套书，并提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢。

重庆大学成人教育学院副院长邹维勤副研究员对本书的编写和出版，给予了强有力的组织领导、支持和严格要求，我们表示衷心的感谢。

对关心本教材完善，提出改进意见的所有老师和同学，我们表示衷心感谢。

编者1991年7月于重庆大学系统工程及应用数学系

目 录

前言

第八章 向量代数与空间解析几何	(1)
第一节 向量及其线性运算	(1)
一、向量的概念	(1)
二、向量的线性运算	(2)
习题 8—1	(7)
第二节 向量在轴上的投影与投影定理	(8)
一、两向量的夹角	(8)
二、在轴上的有向线段的值	(8)
三、向量在轴上的投影与分量	(9)
四、投影定理	(9)
习题 8—2	(11)
第三节 向量与向量的乘法	(11)
一、两向量的数量积	(11)
二、两向量的向量积	(13)
习题 8—3	(17)
第四节 向量的坐标	(18)
一、空间直角坐标系	(19)
二、空间点的坐标	(20)
三、向径及其坐标	(20)
四、向量的坐标	(22)
习题 8—4	(24)
第五节 向量的代数运算	(24)
一、向量的模和方向余弦的坐标表示式	(24)
二、用坐标进行向量的线性运算	(27)
三、用坐标进行向量与向量的乘法运算	(28)
习题 8—5	(31)
第六节 平面与直线	(32)
一、平面	(33)
二、直线	(39)
三、直线与平面的关系	(43)
习题 8—6	(45)
第七节 几种常见曲面	(47)

一、球面 (48) 二、柱面 (48) 三、旋转
曲面 (51) 习题 8—7 (52)

第八节 空间曲线…………… (53)

一、空间曲线的一般方程 (53) 二、空间曲线的
参数方程 (54) 三、空间曲线在坐标面上的投影(55)
习题 8—8 (57)

第九节 二次曲面…………… (58)

一、椭球面 (58) 二、双曲面 (59) 三、
抛物面 (61) 习题 8—9 (61)

第九章 多元函数微分法及其应用…………… (63)

第一节 多元函数的基本概念…………… (63)

一、多元函数概念 (63) 二、二元函数的极限
(67) 三、二元函数的连续性 (70) 习题 9—1
(72)

第二节 多元函数的导数与微分…………… (73)

一、偏导数 (73) 习题 9—2 (1) (82)
二、全微分 (82) 习题 9—2 (2) (90)

第三节 复合函数与隐函数的微分法…………… (91)

一、复合函数的微分法 (91) 习题 9—3 (1)
(98) 二、隐函数的微分法 (99)
习题 9—3 (2) (103)

第四节 偏导数的几何应用…………… (103)

一、空间曲线的切线与法平面 (103) 二、曲面的
切平面与法线 (105) 习题 9—4 (109)

第五节 多元函数的极值…………… (110)

一、极值及其求法 (110) 二、函数的最大值与最
小值 (113) 三、条件极值 拉格朗日乘数法 (115)

习题9—5 (119)

第十章 重积分..... (121)

第一节 二重积分的概念与性质..... (121)

一、两个实例 (121) 二、二重积分的概念 (124)

三、二重积分的性质 (126) 习题10—1 (129)

第二节 二重积分的计算法..... (129)

一、利用直角坐标计算二重积分 (130) 二、利用极坐标计算二重积分 (142) 习题10—2 (151)

第三节 二重积分的应用..... (153)

一、曲面面积 (153) 二、密度非均匀的平面薄片的质量 (156) 三、密度非均匀的平面薄片的重心

(157) 四、密度非均匀的平面薄片的转动惯量 (159)

习题10—3 (160)

第四节 三重积分..... (161)

一、三重积分的概念及其算法 (161) 二、在柱面坐标系下计算三重积分 (166) 三、在球面坐标系下计算三重积分 (169) 四、三重积分的应用 (172)

习题10—4 (176)

第十一章 曲线积分与曲面积分..... (178)

第一节 对弧长的曲线积分..... (178)

一、对弧长的曲线积分的概念与性质 (178)

二、对弧长的曲线积分的计算法 (181) 习题11—1(184)

第二节 对坐标的曲线积分..... (185)

一、对坐标的曲线积分的概念 (185) 二、对坐标的曲线积分的计算法 (190) 习题11—2 (194)

第三节 格林公式及其应用..... (195)

一、格林公式 (195) 二、曲线积分与路径无关的

条件 (198)	习题11--3 (1) (203)	三、二元函数的全微分求积 (204)	习题11--3(2) (210)
第四节	全微分方程		(210)
	习题11--4		(211)
第五节	曲面积分		(212)
一、对面积的曲面积分的概念	(212)	二、对面积的曲面积分的算法	(213)
		习题11--5 (1)	(216)
三、对坐标的曲面积分	(217)	习题11--5 (2)	(226)
第六节	高斯公式		(227)
	习题11-6		(231)
第十二章	无穷级数		(233)
第一节	无穷级数的概念		(233)
	习题12--1		(237)
第二节	无穷级数的性质		(238)
	习题12--2		(244)
第三节	正项级数的审敛性		(245)
	习题12--3		(255)
第四节	任意项级数的敛散性		(256)
一、交错级数的审敛法	(257)	二、任意项级数的敛散性	(259)
		习题12--4	(262)
第五节	幂级数		(263)
一、函数项级数的一般概念	(263)	二、幂级数及其敛散性	(264)
		三、幂级数的运算	(270)
		习题12--5	(277)
第六节	函数展开成幂级数		(278)
一、泰勒级数	(278)	二、用直接法将一些函数展为幂级数	(281)
		三、用间接法将函数展为幂级数	

(287)	习题12—6	(292)
第七节	幂级数的应用	(293)
一、	求函数值的近似值	(293)
二、	计算定积分的近似值	(297)
三、	微分方程幂级数解法	(298)
四、	尤拉公式	(300)
	习题12—7	(301)
第十三章	傅里叶级数	(302)
第一节	三角级数, 三角函数系的正交性	(302)
第二节	傅里叶级数	(306)
	习题13—1	(312)
第三节	奇、偶级函数的傅里叶级数	(313)
	习题13—2	(316)
第四节	函数的延拓	(317)
	习题13—3	(323)
第五节	周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数	(323)
	习题13—4	(327)
习题答案		(328)

第八章 向量代数与空间解析几何

正如学习一元函数微积分学需要平面解析几何的知识一样，学习多元函数微积分学就需要空间解析几何的知识。而向量是研究空间解析几何及其他许多学科的重要工具。因此，先介绍向量的基本概念及其运算法则，然后再用它们来研究空间解析几何。

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在科学技术问题中，所遇到的量一般有两种：其中一种只具有大小，如质量、距离、面积、时间、温度等等，这种量叫做数量（或标量）；另一种则不仅具有大小，而且还具有方向，如力、位移、速度、加速度等等，这种量叫做向量（或矢量）。

在几何图形上，向量都是用有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以A为起点，B为终点的有向线段所表示的向量，记为 \overrightarrow{AB} （图8-1）。有时也简单地用一个冠有箭头的字母如 \vec{a} 来表示向量。在书刊上，为了简化排印手续，常常采用一个不冠箭头的粗体字母如 \mathbf{a} 来表示向量。



图8-1

向量的大小称为向量的模。向量 \overrightarrow{AB} ， \vec{a} ， \mathbf{a} 的模分别

记作 $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, $|\mathbf{a}|$ 。模等于1的向量叫做单位向量。模等于零的向量叫做零向量, 记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$ 。零向量的方向可看作是任意的。

在几何、物理等学科中, 有些向量是与其起点无关的, 即经过平移而不会改变其作用的向量。这种向量最简单, 叫做自由向量。现在只讨论自由向量。所以, 凡是模相等且方向相同的向量, 不论其起点的位置在何处, 都称为是相等的, 这就是说, 我们所讨论的自由向量, 可以经过平移将它的起点放在任一位置上。

二、向量的线性运算

向量的线性运算是向量与向量的加法、减法以及数量与向量的乘法这三种运算的总称。兹分述于下:

1. 向量的加法

由物理学知道, 位移、力、速度、加速度等这些向量的合成均服从平行四边形法则。将此推广, 就得到一般向量的加法概念。

定义1 设有互不平行的二向量 \vec{a} 与 \vec{b} , 将其平移, 使其起点重合于一点, 则从此点到以 \vec{a} , \vec{b} 为邻边的平行四边形的对角顶点所构成的向量 \vec{c} , 称为向量 \vec{a} 与向量 \vec{b} 的和 (图8-2), 记作

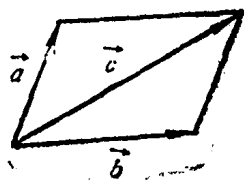


图8-2

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}。$$

若向量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行, 则规定它们的和为这样一个向量 \vec{c} ; \vec{c} 亦平行于 \vec{a} 及 \vec{b} , 且

(1) 当 \vec{a} 与 \vec{b} 的指向相同时: \vec{c} 的指向亦与 \vec{a} 及 \vec{b} 的指向相同, 而 $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(2) 当 \vec{a} 与 \vec{b} 的指向相反时: \vec{c} 的指向与 \vec{a} , \vec{b} 中模较长的一个的指向相同, 此时

$$|\vec{c}| = \begin{cases} |\vec{a}| - |\vec{b}|, & \text{当 } |\vec{a}| \geq |\vec{b}| \text{ 时;} \\ |\vec{b}| - |\vec{a}|, & \text{当 } |\vec{b}| > |\vec{a}| \text{ 时.} \end{cases}$$

这个定义, 常简称为确定向量和的平行四边形法则。

推论 1 对于向量 \vec{a} 及 \vec{b} , 若将 \vec{b} 平移, 使其起点与 \vec{a} 的终点重合, 则从 \vec{a} 的起点到 \vec{b} 的终点引一向量 \vec{c} , 则 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (图8-3)。这个方法, 常简称为确定向量和的三角形法则。

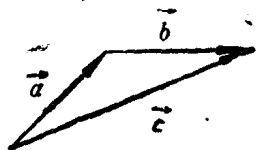


图8-3

重复应用三角形法则, 又可得出确定多个向量之和的多角形成法则。这就是

推论 2 求 n 个向量之和时, 可用平移方法, 依次使后一向量的起点与前一个向量的终点重合, 则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量, 就是所求的 n 个向量的和向量。在图8-4中, 是三个向量 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 相加的情形。

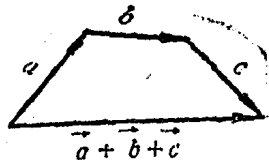


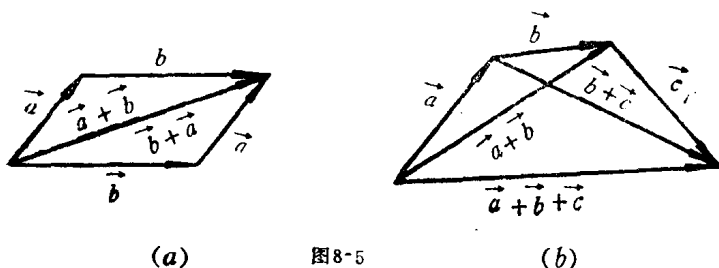
图8-4

向量加法有下列运算规律:

(1) 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

$$(2) \text{ 结合律 } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

这两条规律都可用三角形法则证明。依次参看图8-5的(a)和(b)。



(a)

图8-5

(b)

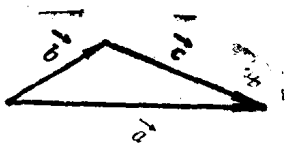
2. 向量的减法

类似于数量的减法，我们用向量加法的逆运算来定义向量的减法。

定义2 向量 \vec{b} 若与向量 \vec{c} 之和等于向量 \vec{a} ，则称向量

\vec{c} 为向量 \vec{a} 与 \vec{b} 之差，记作

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b},$$



如图8-6。

图8-6

由此可以看出：只要平移 \vec{a} ， \vec{b} 使其起点重合，则从 \vec{b} 的终点到 \vec{a} 的终点所构成的向量，就是 $\vec{a} - \vec{b}$ 。

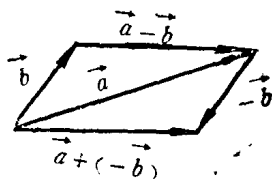
对于任一向量 \vec{a} ，我们把与 \vec{a} 大小相等而方向相反的向量，叫做 \vec{a} 的负向量，记作 $-\vec{a}$ 。由此，两个向量之差，就可化为两个向量之和，即

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

如图8-7。

3. 向量与数量的乘法

定义3 向量 \vec{a} 与数量 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ (或 $\vec{a}\lambda$)是这样—个向量:



(1) 大小: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;

(2) 方向: $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 平行, 且当

图8-7

$\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, 此时方向可以为任意。

由此定义容易得出:

性质1 $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

性质2 设 \vec{a} , \vec{b} 为非零向量, 则

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \textcircled{1} \vec{a} = \lambda \vec{b} \quad (\lambda \neq 0).$$

此外, 再规定 $\frac{\vec{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \vec{a}$ ($\lambda \neq 0$), 则对于任何非零向量

\vec{a} , 有 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ 。这是一个与 \vec{a} 同方向的单位向量,

将它记为 \vec{a}^0 , 即 $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 。这样向量 \vec{a} 就可表示为

① 记号“ \iff ”表示“充分必要”。这里表示 \vec{a} 与 \vec{b} 平行的充分必要条件是 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\lambda \neq 0$)。

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0,$$

此种表示法，明显地表达了一个向量的大小和方向，在许多学科上，被经常采用。

向量与数量的乘法有下列运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$;

(2) 第一分配律 $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;

(3) 第二分配律 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ 。

这几个规律，不难用定义证明，这里从略了。

例 1 设 M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点(图 8-8)，又

设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$ 。试用 \vec{a}

, \vec{b} 表示 \vec{MA} , \vec{MB} , \vec{MC} ,

\vec{MD} 。

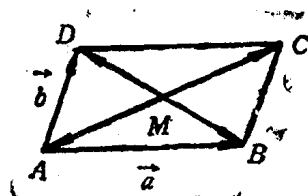


图 8-8

解 由于平行四边形的对角线互相平分，故有

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC} = 2\vec{MC}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{DB} = 2\vec{MB},$$

于是 $\vec{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$,

又 $\vec{MA} = -\vec{MC}$, $\vec{MD} = -\vec{MB}$,

所以 $\vec{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ 。

例 2 证明三角形两边中点的连线必平行于第三边，且其长等于第三边之半。

证 设有三角形 ABC , D 为 AB 边中点, E 为 AC 边中点
(图8-9), 则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

所以 $DE \parallel BC$ 且 $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$ 。

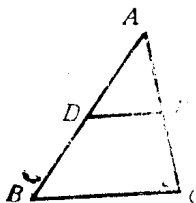


图8-9

思考题 8-1

1. 若 $\vec{a} = \vec{b}$, 必有 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 吗? 反之, 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 必有 $\vec{a} = \vec{b}$ 吗?

2. 满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ 的非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 能否构成一个四边形?

3. 非零向量 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 分别满足什么条件时, 能使

(1) $\vec{a} + \vec{b}$ 平分角 $\angle AOB$; (2) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 。

习 题 3-1

1. 设 \vec{a}, \vec{b} 为二非零向量, 试用图形表明:

(1) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

(2) $|\vec{a} - \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ 。

2. 若一四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形。

3. 设 \vec{a}, \vec{b} 为不平行的非零二向量, 试证: 若 $m\vec{a} + n\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 则有 $m = \lambda, n = \mu$ 。

第二节 向量在轴上的投影与投影定理

一、两向量的夹角

设有两向量 \vec{a}, \vec{b} , 将它平移使其交于一点。此时, 向量 \vec{a}, \vec{b} 正方向之间不大于 π 的那个角 φ (即 $0 \leq \varphi \leq \pi$), 叫做向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角 (图8-10), 记作 $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ 或

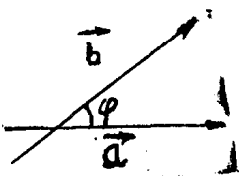


图8-10

$\widehat{(\vec{b}, \vec{a})}$ 。

对于向量与轴 (即数轴) 之间, 或两条轴之间的夹角, 只要将轴看成向量, 就完全与上述两向量的夹角规定一样, 就不再叙述了。

二、在轴上的有向线段的值

为了需要, 这里我们把轴上的有向线段的值作一简单复习。设 A, B 是轴 u 上的任意二点, 则从 A 到 B 就构成轴 u 上的有向线段 \overrightarrow{AB} (图8-11), 其值记作 AB , 是指这样一个数:

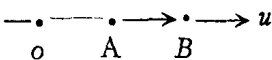


图8-11

$$AB = \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|, & \text{当 } \overrightarrow{AB} \text{ 与轴 } u \text{ 同向时;} \\ -|\overrightarrow{AB}|, & \text{当 } \overrightarrow{AB} \text{ 与轴 } u \text{ 反向时。} \end{cases}$$

据此, 就可以看出: 不论 A, B, C 三点在轴上的位置