成人高等教育教材

高等数学

下册

重庆大学成人教育学院 编

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

重庆大学出版社

成人高等教育教材

高等数学

下册

参编 谢树艺 王代先 余金诺
邓竞秀 曾繁蓉 万象明

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书分上、下册，下册内容包括：向量代数与空间解析几何；多元函数微分法及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；傅里叶级数等。

本书是按照工科本科专业要求编写的，下册计划教学时数为90学时，同时，专科班也可使用，专科班使用本科教材时，可根据教学时数和专业要求删减某些内容，如删去三重积分、曲面积分和傅里叶级数等。

与本书配套的《教学参考书》，可供教师和学员参考。

成人高等教育教材

高等教学

下册

王杰 主编

责任编辑 王季康

*

重庆大学出版社出版发行

重庆师范学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11 字数：247千

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数：1-6000

标准书号：ISBN7-5624-0518-2 / O·71 定价：4.15元

(川) 新登字020号

前　　言

编写本书的指导思想是：既坚持国家教委颁发的全国高等学校工科各专业“高等数学课程教学基本要求”，又适合成人教育特点，做到易教易学。

本书经过1988—1991三个学年试用，所有编者及全体使用本教材的数学教师，都十分关心本书的完善，不断提出修改意见，反复进行讨论和改进。在试用阶段，不仅重庆大学成人教育学院所有本科、专科都使用本书，而且函授班也使用本书。实践说明，使用本书可以达到教学要求，完成教学任务。

与本书配套的《教学参考书》，不仅教师可用，函授生可用，本科、专科生也可在适当的时候用。它可以帮助学员学到更多的数学知识。

本书由王杰副教授任主编，谢树艺教授参加了编写工作，并对全书发表了宝贵意见，其他编者有：王代先副教授、邓竞秀副教授、万象明副教授、曾繁蓉副教授及退休老教师佘金诺同志。

重庆大学系统工程及应用数学系杨万年教授、刘松教授、何良材副教授、谈骏渝副教授和已退休的罗国光老教授审阅了全套书，并提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢。

重庆大学成人教育学院副院长邹维勤副研究员对本书的编写和出版，给予了强有力的组织领导、支持和严格要求，我们表示最衷心的感谢。

对关心本教材完善，提出改进意见的所有老师和同学，我们表示衷心感谢。

编者1991年7月于重庆大学系统工程及应用数学系

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

正如学习一元函数微积分学需要平面解析几何的知识一样，学习多元函数微积分学就需要空间解析几何的知识。而向量是研究空间解析几何及其他许多学科的重要工具。因此，先介绍向量的基本概念及其运算法则，然后再用它们来研究空间解析几何。

第一节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在科学技术问题中，所遇到的量一般有两种：其中一种只具有大小，如质量、距离、面积、时间、温度等等，这种量叫做**数量**（或**标量**）；另一种则不仅具有大小，而且还具有方向，如力、位移、速度、加速度等等，这种量叫做**向量**（或**矢量**）。

在几何图形上，向量都是用有向线段来表示。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以A为起点，B为终点的有向线段所表示的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$ （图8-1）。有时也简单地用一个冠有箭头的字母如 $\vec{a}$ 来表示向量。在书刊上，为了简化排印手续，常常采用一个不冠箭头的粗体字母如**a**来表示向量。

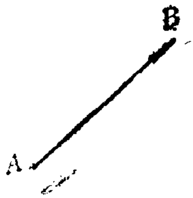


图8-1

向量的大小称为向量的**模**。向量$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$，**a** 的模分别

记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\vec{a}|$，$|\mathbf{a}|$。模等于1的向量叫做**单位向量**。模等于零的向量叫做**零向量**，记作$\vec{0}$或$\mathbf{0}$。零向量的方向可看作是任意的。

在几何、物理等学科中，有些向量是与其起点无关的，即经过平移而不会改变其作用的向量。这种向量最简单，叫做**自由向量**。现在只讨论自由向量。所以，**凡是模相等且方向相同的向量，不论其起点的位置在何处，都称为是相等的**，这就是说，我们所讨论的自由向量，可以经过平移将它的起点放在任一位置上。

二、向量的线性运算

向量的线性运算是向量与向量的加法、减法以及数量与向量的乘法这三种运算的总称。兹分述于下：

1. 向量的加法

由物理学知道，位移、力、速度、加速度等这些向量的合成均服从平行四边形法则。将此推广，就得到一般向量的加法概念。

定义1 设有互不平行的二向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，将其平移，使其起点重合于一点，则从此点到以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形的对角顶点所构成的向量$\vec{c}$，称为向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的和（图8-2），记作

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}。$$

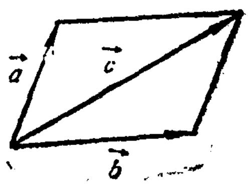


图8-2

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，则规定它们的和为这样一个向量$\vec{c}$：$\vec{c}$亦平行于$\vec{a}$及$\vec{b}$，且

（1）当$\vec{a}$与$\vec{b}$的指向相同时：$\vec{c}$的指向亦与$\vec{a}$及$\vec{b}$的指向相同，而$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（2）当$\vec{a}$与$\vec{b}$的指向相反时：$\vec{c}$的指向与$\vec{a}$，$\vec{b}$中模较长的一个的指向相同，此时

$$|\vec{c}|=\begin{cases}|\vec{a}|-|\vec{b}|，当|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|时；\\ |\vec{b}|-|\vec{a}|，当|\vec{b}|>|\vec{a}|时。\end{cases}$$

这个定义，常简称为确定向量和的**平行四边形法则**。

推论1 对于向量$\vec{a}$及$\vec{b}$，若将$\vec{b}$平移，使其起点与$\vec{a}$的终点重合，则从$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点引一向量$\vec{c}$，则$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$（图8-3）。这个方法，常简称为确定向量和的**三角形法则**。

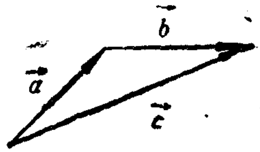


图8-3

重复应用三角形法则，又可得出确定多个向量之和的**多角形法则**。这就是

推论2 求n个向量之和时，可用平移方法，依次使后一向量的起点与前一个向量的终点重合，则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点所构成的向量，就是所求的n个向量的和向量。在图8-4中，是三个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$相加的情形。

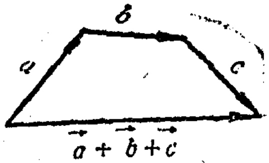


图8-4

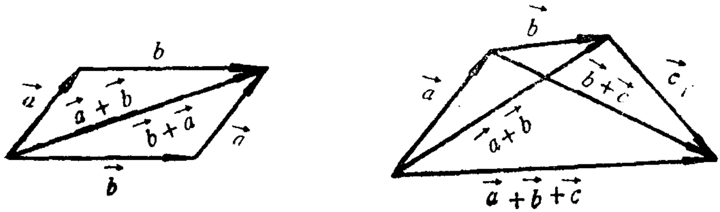
向量加法有下列运算规律：

（1）交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

（2）结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}。$$

这两条规律都可用三角形法则证明。依次参看图8-5 的(a)和(b)。



(a)　　图8-5　　(b)

2. 向量的减法

类似于数量的减法，我们用向量加法的逆运算来定义向量的减法。

定义 2　向量$\vec{b}$若与向量$\vec{c}$之和等于向量$\vec{a}$，则称向量$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，记作

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b},$$

如图8-6。

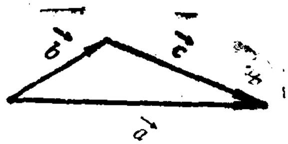


图8-6

由此可以看出：只要平移$\vec{a}$，$\vec{b}$使其起点重合，则从$\vec{b}$的终点到$\vec{a}$的终点所构成的向量，就是$\vec{a}-\vec{b}$。

对于任一向量$\vec{a}$，我们把与$\vec{a}$大小相等而方向相反的向量，叫做$\vec{a}$的负向量，记作$-\vec{a}$。由此，两个向量之差，就可化为两个向量之和，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

如图8-7。

3. 向量与数量的乘法

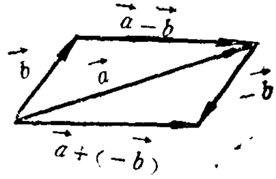


图8-7

定义3 向量$\vec{a}$与数量λ的乘积$\lambda\vec{a}$(或$\vec{a}\lambda$)是这样一个向量：

(1) 大小：$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

(2) 方向：$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$平行，且当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向；当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$，此时方向可以为任意。

由此定义容易得出：

性质1 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；

性质2 设$\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则

$$\vec{a}//\vec{b}\Longleftrightarrow^{①}\vec{a}=\lambda\vec{b}\qquad(\lambda\neq0)。$$

此外，再规定$\dfrac{\vec{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\vec{a}\ (\lambda\neq0)$，则对于任何非零向量$\vec{a}$，有$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$。这是一个与$\vec{a}$同方向的单位向量，将它记为$\vec{a}^0$，即$\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。这样向量$\vec{a}$就可表示为

---

①记号"$\Longleftrightarrow$"表示"充分必要"。这里表示$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的充分必要条件是$\vec{a}=\lambda\vec{b}\,(\lambda\neq0)$。

$$\vec{a} = |\vec{a}|\ \vec{a}^0,$$

此种表示法，明显地表达了一个向量的大小和方向，在许多学科上，被经常采用。

向量与数量的乘法有下列运算规律：

（1）结合律 $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$；

（2）第一分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$；

（3）第二分配律 $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$。

这几个规律，不难用定义证明，这里从略了。

例 1 设M为平行四边形$ABCD$的对角线交点(图8-8)，又设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$。试用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$。

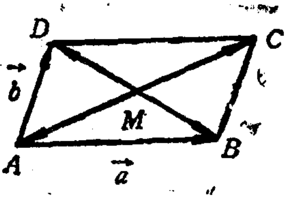


图 8-8

解 由于平行四边形的对角线互相平分，故有

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MC},\quad \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MB},$$

于是 $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$， $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$，

又 $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC}$， $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB}$，

所以 $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$， $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$。

例 2 证明三角形两边中点的连线必平行于第三边，且其长等于第三边之半。

证 设有三角形ABC，D为AB边中点，E为AC边中点（图8-9），则有

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $DE /\!/ BC$ 且$|DE|=\frac{1}{2}|BC|$。

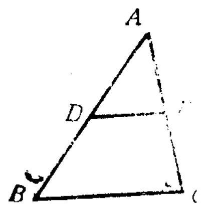


图8-9

思考题8-1

1．若$\vec{a}=\vec{b}$，必有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$吗？反之，若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，必有$\vec{a}=\vec{b}$吗？

2．满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$的非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$能否构成一个四边形？

3．非零向量$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$分别满足什么条件时，能使

（1）$\vec{a}+\vec{b}$平分角$\angle AOB$；（2）$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$。

习　题　3-1

1．设$\vec{a}$，$\vec{b}$为二非零向量，试用图形表明：

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（2）$|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant||\vec{a}|-|\vec{b}||$。

2．若一四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形。

3．设$\vec{a}$，$\vec{b}$为不平行的非零二向量，试证：若$m\vec{a}+n\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，则有$m=\lambda$，$n=\mu$。

第二节　向量在轴上的投影与投影定理

一、两向量的夹角

设有两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，将它平移使其交于一点。此时，向量$\vec{a}$，$\vec{b}$正方向之间不大于π的那个角φ（即$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$），叫做向量$\vec{a}$，$\vec{b}$**的夹角**（图8-10），记作$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$或$(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$。

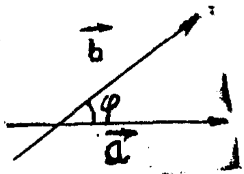


图8-10

对于向量与轴（即数轴）之间，或两条轴之间的夹角，只要将轴看成向量，就完全与上述两向量的夹角规定一样，就不再叙述了。

二、在轴上的有向线段的值

为了需要，这里我们把在轴上的有向线段的值作一简单复习。设A，B是轴u上的任意二点，则从A到B就构成轴u上的有向线段$\overrightarrow{AB}$（图8-11），其值记作AB，是指这样一个数：

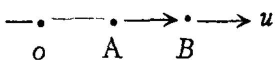


图8-11

$$AB=\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|, & \text{当}\overrightarrow{AB}\text{与轴}u\text{同向时；}\\ -|\overrightarrow{AB}|, & \text{当}\overrightarrow{AB}\text{与轴}u\text{反向时。}\end{cases}$$

据此，就可以看出：不论A，B，C三点在轴上的位置