北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

组合数学

冯荣权 宋春伟 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列

组合数学

冯荣权　宋春伟　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

组合数学 / 冯荣权，宋春伟编著. —北京：北京大学出版社，2015.8
（北京大学数学教学系列丛书）
ISBN 978-7-301-26105-7

Ⅰ.①组… Ⅱ.①冯… ②宋… Ⅲ.①组合数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 157352 号

书　　名	组合数学
著作责任者	冯荣权　宋春伟　编著
责 任 编 辑	曾琬婷
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-26105-7
出 版 发 行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电 子 信 箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	880 毫米 × 1230 毫米　A5　10.25 印张　300 千字
	2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	32.00 元

内 容 简 介

本书是基于作者多年来在北京大学讲授“组合数学”课程的讲义补充、修改而成的, 内容包括组合计数、存在性结果、图论基础、集合相交理论、组合设计、组合的代数和概率方法等. 本书注重对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握, 强调组合思想及组合数学在各个领域的应用.

全书分为十章, 第一章给出了本书用到的一些基本概念以及初等计数方法; 第二章至第五章给出几种组合计数的方法, 如递推关系、生成函数、容斥原理、Pólya 计数定理等, 以及几个重要的组合数, 如 Catalan 数、Stirling 数、分拆数等; 第六章给出鸽笼原理以及它的推广 —— Ramsey 理论和相异代表系等存在性结果; 第七章介绍了图论的基础知识; 第八章介绍了初步的集合相交理论; 第九章详细介绍了组合设计理论; 第十章简要介绍了组合数学的概率方法. 书中每章之后都配有丰富的习题, 书末给出了习题的解答或提示, 便于教师教学与学生自学时选用和参考.

本书可以作为高等院校数学及相关学科的本科生和研究生“组合数学”课程的教材或教学参考书, 也可供数学、计算机、生物、信息通信、经济等学科的科技工作者参考.

作者简介

冯荣权 北京大学数学科学学院教授、博士生导师，教育部大学数学课程教学指导委员会委员，中国数学会理事、北京数学会秘书长、中国密码学会理事、中国密码学会密码数学专业委员会和学术工作委员会委员、中国组合数学与图论学会理事，《数学的实践与认识》副主编. 主要研究方向为密码学与信息安全及代数组合论，主持或参加多项国家自然科学基金、国家 863 计划、国家 973 计划、教育部留学回国人员基金和中央办公厅国家密码发展基金等项目，参与的项目“数学专业本科生课程体系建设”获得第六届高等教育国家级教学成果奖二等奖和北京市教育教学成果奖 (高等教育) 一等奖，项目“北京大学代数类课程体系的综合改革”获得第七届北京市高等教育教学成果奖一等奖. 主持的课程“线性代数” 2008 年被评为国家级精品课程 (网络教育)，入选第四批国家级精品资源共享课 (网络教育课程) 立项项目. 在国内外核心期刊上发表论文 80 余篇，合作翻译出版《数学天书的证明 (第三、四版)》.

宋春伟 北京大学数学科学学院教授、博士生导师，从事组合数学与图论领域的研究工作. 在北京大学多次讲授“组合数学”“高等代数”“高等数学”等课程，在日本东京工业大学曾主讲“数理情报科学先端特别讲座 —— Topics in Advanced Combinatorics: Extremal Combinatorics and Algebraic/Probabilistic Methods”.

序　言

自 1995 年以来, 在姜伯驹院士的主持下, 北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际, 创造性地贯彻教育部“加强基础, 淡化专业, 因材施教, 分流培养”的办学方针, 全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势, 在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新, 以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革, 取得了显著的成效. 2001 年, 北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖, 在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面, 我们按照加强基础、淡化专业的要求, 对教学各主要环节进行了调整, 使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上, 接受学时充分、强度足够的严格训练; 在对学生分流培养阶段, 我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则, 大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容, 为新的培养方向、实践性教学环节, 以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础, 又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应, 积极而慎重地进行教学计划的修订, 适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时, 并增加了数学模型和计算机的相关课程, 使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中, 在注重专题课程的同时, 我们制定了 30

多门研究生普选基础课程 (其中数学系 18 门), 重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合, 我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的"北京大学数学教学系列丛书". 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考, 记录了我们教学实践的足迹, 体现了我们教学改革的成果, 反映了我们对新世纪人才培养的理念, 代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展, 数学的基本理论更加深入和完善, 而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛, 而且活跃于生产第一线, 促进着技术和经济的发展, 所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学, 正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化, 数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素, 将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区, 但要十分稳重和积极; 人才培养无止境, 既要遵循基本规律, 更要不断创新. 我们现在推出这套丛书, 目的是向大家学习. 让我们大家携起手来, 为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前　言

组合数学 (Combinatorics) 主要研究满足一定条件的组态 (或者说安排) 的存在性、计数及构造等问题, 它大体上可分为代数与计数组合学、图论、组合设计、组合优化等. 这些组态, 通常是优美或有实际应用意义的. 如同数学的整体特征一样, 组合数学既是一种艺术, 也是一门科学. 有时人们也称组合数学为离散数学, 因为组合数学的对象是离散的. 但是, 在有些组合数学家看来, "离散数学" 似乎应该和图论联系得更紧密些. 当然, 数学的各大分支之间尚且彼此联系微妙, 细致的划分也就见仁见智. 美国数学会赋予组合数学独立的分类号 05, 在其最新的 2010 分类中则将 05 这一分类细划为计数、设计、图论、极值和代数组合学五个子领域.

作为基础数学的一个古老而又新颖的分支, 从传统上讲, 组合数学比较依赖于聪明才智与精巧细致的推理. 这的确是组合数学的主要特征之一. 从积极的方面, 组合数学也许会永远如此美丽下去. 而在消极的层面上, 则曾有人抱怨道, 组合数学犹如众多散乱的珍珠, 缺乏将之连成一起的系统理论. 然而, 近百年来组合数学所经历的飞速进步, 特别是最近几十年的革命性发展, 使那些看法渐渐流于成见. 或许可以说, 英国数学家 MacMahon 在 20 世纪初出版的《组合数学分析》一书拉开了现代组合数学的序幕. 从那以后, 组合数学的新成果如雨后春笋般涌现出来. Ramanujan, Hardy 和 Littlewood 发展了源自 Euler 的整数分拆, 当代的 Andrews 结合了 Tableaux 理论使之更为系统、丰富. Tutte 开辟了现代图论. Erdős 在数学的众多分支作出了令人惊叹的贡献, 他将组合数学与数论、概率论等奇妙地连接在一起, 他的大量工作, 特别是他所提出的一些猜想, 还在影响着今天的组合数学. 特别要提

及的是, 通过 Rota 和 Stanley 等几代组合数学家的努力, 代数与计数组合学这个组合数学的核心分支最终得以发展成为一门公理化、体系化的学科. 从 Erdős 开始的组合中的概率方法, 经过 Lovász, Graham, Alon, Spencer 等继续发展, 已成为一门全新的学科, 并且得到日新月异的发展. 这样, 到了 20 世纪晚期, 组合数学已经渐趋成熟. 一方面, 组合的内容更加丰富、深刻, 问题的研究也更加依赖于一些深刻、成熟的工具; 另一方面, 研究的系统化也帮助了一些重大问题的解决, 如图论中的四色定理的简化证明和强完美图定理的证明. 与此同时, 随着组合数学的发展, 人们惊喜地发现它在表示论、数论、代数几何乃至泛函分析等其他主流数学分支中也有着超乎想象的应用. 近年来菲尔兹奖的颁发更印证了这一趋势. 有的菲尔兹奖得主本人即是组合数学家, 如 Gowers (1998), 还有一些获奖者的工作与组合数学深刻相关, 如 Okounkov (2006) 和 Tao (2006). 近年的国际数学家大会报告者包括许多组合数学家, 如 Macdonald (1998), Alon (2002), Stanley (2006), Dinur (2010), Rödl (2014) 等, Lovász 还担任 2007—2010 年的国际数学联盟执委会主席, 这些都彰显了组合数学在数学界与日俱增的影响力. 至于组合数学在通信调度、金融分析、经济军工等实际领域的应用, 堪称广泛而巨大, 这里无须赘言.

目前, 北京大学开设的 “组合数学” 课程为专业选修课, 同时面向数学科学学院的本科生与研究生. 该课程以理论学习为主, 强调系统性、组合思路的独特性和重要性. 目的是让学生通过一个学期的学习能够对组合数学的对象、基本概念和主要的工具与方法获得基本了解, 感悟组合思想. 对于有潜质的学生, 希望通过该课程的学习激发他们进一步深造的兴趣, 引导使之最终走进组合数学的殿堂. 本书是基于笔者多年来在北京大学讲授 “组合数学” 课程的讲义补充修改而成的.

本书内容量适合每周 4 学时的一个学期课程. 若课时不足, 根据作者的教学实践, 作为研究生和高年级本科生一个学期的课程, 教师可以讲授前五章的全部, 再根据具体情况选讲后五章的部分内容.

本书的编写参考了国内外众多组合数学的优秀教材与专著, 它们让笔者深受教益. 因所涉较多, 难以一一列举, 在此特向这些著作的作者及所有组合数学界前辈、同行致以敬意和谢忱. 在本书的编写过程中, 王彬、赵彤远、赵沨、付云皓、胡志、王子龙、陆珞、张梦瑶、甘文颖、杨珏懋、樊昊阳、卢道帝、谢磊、胡涵、夏素缦、陈辰超、匡斯萌、张瑞祥、罗马、费哲、郭溢譞、林博、兰洋、王坤等同学作出过贡献, 在此一并感谢.

北京大学出版社的曾琬婷女士为本书的出版给予了许多帮助, 特此致谢.

冯荣权　宋春伟

2015 年 7 月于北京大学

目　　录

第一章　预 备 知 识

本章作为开端, 简要回顾一些基础知识并介绍最基本的计数方法.

§1.1　集合, 关系, 函数

定义 1.1.1　把人们直观或思维中某些确定的能够区分的对象汇合在一起, 使之成为一个整体, 这一整体就是**集合**. 组成集合的这些对象, 称为这一集合的**元素** (简称为**元**).

假定读者熟悉 $\cap, \cup, \supseteq, \subseteq, \in$ 等符号及其含义. 若无特殊说明, 则集合中元素两两不同. 若集合中元素可重复, 则有如下定义:

定义 1.1.2　**多重集**是元素可以重复出现的集合, 把某个元素 a_i 出现的次数 n_i $(n_i = 0, 1, \cdots, \infty)$, 叫做该元素的**重数**. 通常把含有 k 种不同元素的多重集 S 记做 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$, 有时也记做 $\{{a_1}^{n_1}, {a_2}^{n_2}, \cdots, {a_k}^{n_k}\}$.

定义 1.1.3　给定集合 A, 称 A 中的元素个数为集合 A 的**基数**, 记做 $|A|$. 若 $|A| = n$, 称 A 为一个 n-**集合**.

定义 1.1.4　给定集合 A, 称 A 所有子集构成的集合为集合 A 的**幂集**, 记做 $P(A)$. 若 A 为一个 n-集合, 则显然 $|P(A)| = 2^n$.

例 1.1.5　**图**是一个二元组, 通常记做 $G = (V, E)$, 其中 V 是一个集合, 其里面的元素称为**顶点** (故 V 有时也称为**顶点集**), E 是 V 所有 2-子集组成的集合的一个子集, 称为**边集**, E 中的元素称为**边**.

对于 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, V 的所有 2-子集的集合记为 $\binom{V}{2}$, 熟知 $\left|\binom{V}{2}\right| = \frac{n(n-1)}{2}$. 任取 $E \subseteq \binom{V}{2}$, 便得到一个图 (V, E), 故以 V

为顶点集的图共有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个.

特别地, 若取 $E=\binom{V}{2}$, 则得到的图称为**完全图**. n 个顶点的完全图常记为 K_n. 若取边集 $E=\{\{v_i,v_{i+1}\}\mid 1\leqslant i\leqslant n,\text{ 但 } v_{n+1}=v_1\}$, 则得到的图称为**圈图** (或**圈**). n 个顶点的圈常记为 C_n.

关于图的进一步讨论参见第七章.

定义 1.1.6 若 A 的非空子集的集合 $\mathcal{P}=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 满足

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i,\quad \text{且}\quad A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j),$$

则称 $\mathcal{P}$ 是集合 A 的一个**划分**.

定义 1.1.7 设 A,B 为两个集合, 它们的 **Cartesion 积**定义为

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

当 $|A|=m$, $|B|=n$ 时, 显然有 $|A\times B|=m\times n$.

一个从 A 到 B 的**二元关系** R, 记为 $R:A\to B$, 定义为 $A\times B$ 的一个子集. 若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则从 A 到 B 的二元关系有 2^{mn} 个. 二元关系 R 的定义域为 $\{a\in A\mid \text{存在 } b\in B,\text{ 使得 } (a,b)\in R\}$, 值域为 $\{b\in B\mid \text{存在 } a\in A,\text{ 使得 } (a,b)\in R\}$. 若 $(a,b)\in R$, 则称 a 与 b 有二元关系 R. 对于 $a\in A$, a 的像为

$$R(a)=\{b\in B\mid (a,b)\in R\},$$

故 R 的值域为 $\bigcup\limits_{a\in A}R(a)$. 对于 $b\in B$, b 的原像为

$$R^{-1}(b)=\{a\in A\mid (a,b)\in R\}.$$

R 的**反关系** $R^{-1}:B\to A$ 定义为

$$R^{-1}=\{(b,a)\mid (a,b)\in R\}.$$

设 R 是 A 上的一个二元关系, 即一个 A 到 A 的二元关系, 称 R 是**自反**的, 如果对任意 $a\in A$, 有 $(a,a)\in R$; 称 R 是**对称**的, 如

果对 $(a,b)\in R$, 有 $(b,a)\in R$; 称 R 是**反对称**的, 如果对 $(a,b)\in R$, $(b,a)\in R$, 有 $a=b$; 称 R 是**传递**的, 如果对 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 有 $(a,c)\in R$.

定义 1.1.8 设 R 是集合 A 上的一个二元关系. 若 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 是定义在 A 上的一个**等价关系**. 此时, 若 $(x,y)\in R$, 则称 x **等价于** y, 记做 $x\sim y$.

设 R 为一等价关系, 对任意 $a\in A$, 则 a 的像

$$R(a)=\{b\in A \mid (a,b)\in R\}$$

称为包含元素 a 的等价类. 显然, 集合 A 上一等价关系的等价类为集合 A 的一个划分. 反之, 从 A 的一个划分 $\mathcal{P}$ 也可得到 A 上的一个等价关系 R, 定义为: $(a,b)\in R$ 当且仅当 a,b 在 $\mathcal{P}$ 的某个元素中.

定义 1.1.9 设 f 是从 A 到 B 的一个二元关系. 若 f 满足 $|f(a)|=1$, $\forall\, a\in A$, 则称 f 是从 A 到 B 的一个**映射**. 对于映射 f, 若对任意 $a_1,a_2\in A$, $a_1\neq a_2$, 有 $f(a_1)\neq f(a_2)$, 则称 f 为**单射**; 若对于任意 $b\in B$, 都有 $f^{-1}(b)\neq\varnothing$, 则称 f 为**满射**.

若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则从 A 到 B 的映射有 n^m 个. 对于映射 f, 若 f^{-1} 也是映射, 则称 f 为**双射**. 显然, f 为双射当且仅当 f 既为单射又为满射.

定理 1.1.10 设 A, B 为两个基数相同的有限集, f 为 A 到 B 的一个映射, 则 f 为单射当且仅当 f 为满射.

§1.2 偏 序 集

定义 1.2.1 设 X 是一个非空集合, P 是定义在 X 上的具有自反性、反对称性及传递性的二元关系, 则称 $\mathbf{P}=(X,P)$ 为一个**偏序集**. 在不引起混淆的情况下, 有时也直接称 X 是一个偏序集. 符合上述性质的关系称为**偏序关系**.