



21世纪经济与管理规划教材

金融学系列

# 数理金融基础

Fundamentals  
of Mathematical  
Finance

张元萍 主 编  
周 远 副主编



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS



# 数理金融基础

Fundamentals  
of Mathematical  
Finance

张元萍 主 编  
周 远 副主编



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

数理金融基础/张元萍主编. —北京:北京大学出版社, 2016.10

(21世纪经济与管理规划教材·金融学系列)

ISBN 978-7-301-27459-0

I. ①数… II. ①张… III. ①金融学—数理经济学—高等学校—教材 IV. ①F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第199371号

- 书 名 数理金融基础  
Shuli Jinrong Jichu
- 著作责任者 张元萍 主编 周 远 副主编
- 责任编辑 张 燕
- 标准书号 ISBN 978-7-301-27459-0
- 出版发行 北京大学出版社
- 地 址 北京市海淀区成府路205号 100871
- 网 址 <http://www.pup.cn>
- 电子信箱 [em@pup.cn](mailto:em@pup.cn) QQ:552063295
- 新浪微博 @北京大学出版社 @北京大学出版社经管图书
- 电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752926
- 印刷者 北京大学印刷厂
- 经 销 者 新华书店
- 787毫米×1092毫米 16开本 14.25印张 320千字  
2016年10月第1版 2016年10月第1次印刷
- 印 数 0001—4000册
- 定 价 35.00元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子信箱: [fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

图书如有印装质量问题,请与出版部联系,电话:010-62756370

# 丛书出版前言

作为一家综合性的大学出版社,北京大学出版社始终坚持为教学科研服务,为人才培养服务。呈现在您面前的这套“21世纪经济与管理规划教材”是由我国经济与管理领域颇具影响力和潜力的专家学者编写而成,力求结合中国实际,反映当前学科发展的前沿水平。

“21世纪经济与管理规划教材”面向各高等院校经济与管理专业的本科生,不仅涵盖了经济与管理类传统课程的教材,还包括根据学科发展不断开发的新兴课程教材;在注重系统性和综合性的同时,注重与研究生教育接轨、与国际接轨,培养学生的综合素质,帮助学生打下扎实的专业基础和掌握最新的学科前沿知识,以满足高等院校培养精英人才的需要。

针对目前国内本科层次教材质量参差不齐、国外教材适用性不强的问题,本系列教材在保持相对一致的风格和体例的基础上,力求吸收国内外同类教材的优点,增加支持先进教学手段和多元化教学方法的内容,如增加课堂讨论素材以适应启发式教学,增加本土化案例及相关知识链接,在增强教材可读性的同时给学生进一步学习提供指引。

为帮助教师取得更好的教学效果,本系列教材以精品课程建设标准严格要求各教材的编写,努力配备丰富、多元的教辅材料,如电子课件、习题答案、案例分析要点等。

为了使本系列教材具有持续的生命力,我们将积极与作者沟通,争取三年左右对教材不断进行修订。无论您是教师还是学生,您在使用本系列教材的过程中,如果发现任何问题或者有任何意见或建议,欢迎及时与我们联系(发送邮件至em@pup.cn)。我们会将您的宝贵意见或建议及时反馈给作者,以便修订再版时进一步完善教材内容,更好地满足教师教学和学生学习的需要。

最后,感谢所有参与编写和为我们出谋划策提供帮助的专家学者,以及广大使用本系列教材的师生,希望本系列教材能够为我国高等院校经管专业教育贡献绵薄之力。

北京大学出版社  
经济与管理图书事业部



# 前 言

数理金融学是金融学自身发展而衍生出来的一个新的分支,是数学与金融学相结合的产物,是金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合转变,由规范研究向实证研究转变,由理论阐述向理论研究与实用研究并重转变,金融模糊决策向精确化决策发展,由微观金融模型向宏观金融数量化拓展的结果。

随着国内经济、金融的教学逐步与国际接轨,特别是近年来金融工程专业的发展,急需一本适合金融专业学生使用的数理金融教材。本教材拟在普及性和广泛适用性上下功夫,借鉴国外教材和最新研究成果,同时考虑学生的接受程度和教学要求,不注重复杂公式的推导,而侧重于应用,并附加大量例题,使金融定量分析方法与实际应用紧密结合,并在理论系统化、模型数学化、方法计量化、表述通俗化上做一些有益的尝试。

全书分为八章,系统地介绍了数理金融的基本理论、基本观点和基本方法,逻辑严密,层次清楚,力图展示数理金融理论及实践的 latest 发展趋势和研究成果,达到基础性和前瞻性的统一。

本书由天津财经大学张元萍老师任主编,天津财经大学周远老师任副主编,天津财经大学李炳念老师以及部分研究生参编。具体编写分工如下:第一章由张元萍编写,第二章和第三章由张元萍、赵仡编写,第四章和第五章由周远编写,第六章由周远、史德坤编写,第七章由李炳念、史德坤、封笑笑编写,第八章由李炳念、封笑笑编写。本教材得到天津财经大学重点教材建设立项项目的资助,北京大学出版社张燕编辑对本书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示感谢。

编者

2016年7月



<b>第一章 数理金融引论</b> .....	1
第一节 数理金融学的发展沿革 .....	2
第二节 数理金融学的结构框架 .....	7
第三节 数理金融学面临的挑战 .....	13
本章小结 .....	21
本章重要概念 .....	21
思考练习题 .....	21
<b>第二章 数理金融中的基本数学方法</b> .....	23
第一节 函数和微积分在数理金融中的应用 .....	24
第二节 线性代数在数理金融中的应用 .....	32
第三节 随机过程在数理金融中的应用 .....	35
本章小结 .....	41
本章重要概念 .....	42
思考练习题 .....	42
<b>第三章 计量经济学在数理金融中的应用</b> .....	45
第一节 一元线性回归模型 .....	46
第二节 多元线性回归模型 .....	49
第三节 市场间联动性分析 .....	53
本章小结 .....	65
本章重要概念 .....	66
思考练习题 .....	66
<b>第四章 投资组合理论与资产定价模型</b> .....	67
第一节 不确定条件下的选择理论 .....	68
第二节 投资组合理论 .....	70
第三节 资本资产定价模型 .....	74
第四节 套利定价理论 .....	77
本章小结 .....	82
本章重要概念 .....	83
思考练习题 .....	83

<b>第五章 期权定价模型</b> .....	85
第一节 期权价格的构成 .....	86
第二节 布朗运动与伊托引理 .....	92
第三节 布莱克-斯科尔斯期权定价模型 .....	97
第四节 二叉树期权定价模型 .....	103
第五节 金融期权价格的敏感性指标 .....	107
本章小结 .....	112
本章重要概念 .....	113
思考练习题 .....	113
<b>第六章 有效市场理论及检验</b> .....	115
第一节 股票市场的信息效率 .....	116
第二节 有效市场假说在投资中的运用 .....	120
第三节 有效市场假说的实证检验 .....	124
第四节 中国股票市场有效性问题的实证检验 .....	128
第五节 对有效市场理论的评价与发展 .....	132
本章小结 .....	136
本章重要概念 .....	137
思考练习题 .....	137
<b>第七章 金融风险分析与测度</b> .....	139
第一节 金融风险概述 .....	140
第二节 灵敏度分析与债券市场风险 .....	147
第三节 VaR 模型 .....	156
第四节 贝叶斯 MCMC 模拟方法与操作风险 .....	166
第五节 信号评估法与信用风险的测度 .....	172
第六节 整体风险管理 .....	178
本章小结 .....	184
本章重要概念 .....	184
思考练习题 .....	184
<b>第八章 宏观金融模型</b> .....	187
第一节 宏观金融分析框架 .....	188
第二节 货币政策模型 .....	193
第三节 动态随机一般均衡模型 .....	197
第四节 宏观金融风险的管理 .....	204
本章小结 .....	207
本章重要概念 .....	208
思考练习题 .....	208
<b>习题答案</b> .....	209
<b>参考文献</b> .....	216



## 数理金融引论

### 【本章学习要点与要求】

本章讲述了数理金融的基本思想,梳理了数理金融的发展脉络,阐述了数理金融与金融学、数学的关系,确立了数理金融在金融学科体系中的地位,同时对数理金融面临的行为金融方面的挑战进行了分析。要求学生通过本章的学习,重点掌握数理金融的相关概念,了解数理金融的发展背景,认清数理金融在金融学科体系中的作用,对数理金融的发展前景有所了解。



## 第一节 数理金融学的发展沿革

数理金融学是金融学自身发展而衍生出来的一个新的分支,是数学与金融学相结合而产生的一门新的学科,是金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合转变,由微观金融模型向宏观金融数量化拓展,由规范研究向实证研究转变,由理论阐述向理论研究与实用研究并重转变,由金融模糊决策向精确化决策发展的结果。

### 一、数理金融学的相关机理

在现代的金融交易中,任何一项金融决策,特别是金融交易的决策都要面对许多不确定性因素,这些不确定性因素都将影响并反映在金融产品的风险与收益上,因此,任何金融决策都必须在权衡收益与风险之后才能做出。所以,如何精确地度量金融交易过程中的收益和风险,就成为金融交易决策的核心。为了使决策做到科学和精确,就必须对各种不确定性因素进行定量分析,这种现实和不断发展的需求促进了数学在金融活动中的应用和发展,从而衍生出数理金融学这一新的学科。

数理金融研究的内容可分为套利、优化和均衡。从模型的精确度分析,资产的价格波动是随机的,受外界因素影响较大,用随机过程刻画价格波动的特征是合理的。模型可分为离散型随机模型和连续型随机模型两大类。在20世纪50年代、70年代的两个时间段,一些学者提出了“风险的处理和效益的优化”两个现代金融学的中心议题。从此,几乎所有数理金融的理论也都围绕着这两个基本问题而展开。数理金融学的这两大命题都用到了非常深刻的数学工具。前者需要近二十年来发展起来的随机分析;后者更是为数学家提出了许多新问题,使数学在金融经济学中找到了用武之地,吸引了许多数学家投身到金融经济学的研究中去。应该说明的是:将数理概念引入对金融市场制度、金融工具和金融分析方法之中,使金融分析方法得以丰富和发展,并且充实了金融研究方法体系。

金融创新还包括金融制度创新。任何事物的运动规律必然通过量的关系反映出来。金融制度创新也是如此。反过来,透过这些量的关系,可以深刻地研究和分析现象背后的本质。对金融制度用数理金融方法加以研究分析,可以从量的方面更精确地把握金融制度的深层结构和制度变迁的基本决定因素及其变化规律。因此,数理金融学还可以对金融制度创新有着巨大的推动作用。数理金融学可以把决定金融制度创新的因素量化,从而对金融制度的发展进行定量分析并揭示其内在规律。数理金融学可以通过建模、模拟分析等方法模拟市场的制度运行和制度安排本身的内在机理并揭示其特征,从而推动金融制度创新。

数理金融学和金融工程学在我国的发展是近十几年的事。我国市场经济的发展特别是证券市场的发展,实际上已为金融工程产品的开发与创新及应用提供了现实的土壤和发展空间,中国金融市场的国际化发展也预示着金融工程在中国将有广阔的发展前景。与此同时,作为金融工程基础理论的数理金融学,也必将获得迅速发展。事实上,数

理金融学和金融工程学正在我国呈加速发展的态势,不少高等院校已开办了数理金融专业,不少金融企业都设立了专门的金融工程研究小组,这标志着数理金融学和金融工程学已植根于我国的金融市场土壤之中,其发展前景广阔。

## 二、数理金融学的发展阶段

数理金融学是20世纪50年代迅速发展起来的一门学科。数理金融学的迅速发展,是现代金融实践发展推动的结果。现代金融市场的发展实质上是一个金融产品不断快速创新的过程。20世纪50年代前的金融理论主要是对金融实践的总结和对金融政策的解释。后期金融学研究方法发生了重大改变,转向运用规范的数理论证和计量模型分析金融问题。20世纪70年代以来,各种衍生工具的产生和发展是数理金融学产生和发展的基本推动力。随着金融产品的不断创新,金融交易的范围和层次更具多样性,同时金融产品的交易价格也更具不确定性。因此,金融交易过程实际上就是一个以金融产品价格为核心的风险与收益的度量与决策问题,本质上是一个如何把交易行为量化并进而研究其相互之间关系的问题,这是数理金融学得以产生和发展的现实基础。

### (一) 20世纪70年代前

金融理论的核心问题是研究在不确定的环境中经济主体如何在时间和空间上配置资源。数理金融定价模型是金融研究的一种重要工具,其产生可以追溯到路易斯·巴施里耶(Louis Bachelier)在1900年关于投机的一篇论文,它标志着连续型期权定价理论的诞生。

20世纪70年代以前,金融定价模型集中于货币的时间价值分析和贴现值研究,主要运用于非金融机构的资本预算。1938年,麦考利(Macaulay)曾将金融定价模型运用于债券价格的利率敏感性分析。20世纪40年代至50年代初,伊藤清(Kiyoshi Ito)发展了巴氏理论,使其成为金融学中重要的数学工具,即随机计算。

而一般认为,金融学从一门描述性科学向分析性科学的转变始于马科维茨(Markowitz, 1952)提出的投资组合理论(modern portfolio theory, MPT)。20世纪50年代后期和整个60年代,马科维茨、斯普伦克尔(Sprengle)、莫迪利亚尼(Modigliani)、米勒(Miller)、夏普(Sharpe)、林特纳(Lintner)、伯纳斯(Boness)、法玛(Fama)和萨缪尔森(Samuelson)等作了大量的开拓性工作。

定价模型在公司金融方面的运用有了一些新的突破,但还是集中在投融资决策和资本预算方面。1958年莫迪利亚尼和米勒在他们的一篇论文中证明了一个重要定理,后来被称为MM定理。

斯普伦克尔(1961)假设股价服从均值和方差为常数的对数正态分布,该分布允许股价有正向漂移,部分消除了巴施里耶公式的缺陷。该模型直接排除了证券具有非正价格的可能性。如果允许漂移存在随机游走,就产生了正的利率和风险厌恶。

伯纳斯(1964)在“股票期权价值理论的要素”一文中,假设股票收益服从对数正态分布。由于认识到风险态度对投资者的影响,模型中还假设投资者对风险的态度无差异,即为风险中性的。由于考虑了货币的时间价值,该模型消除了斯普里克尔模型的缺陷,但该模型同样未考虑股票和期权的风险水平不同,对这两种不同的证券采用了同一期望

收益率,导致结果不太合理。

麦考利的投资组合均值-方差分析为一般资产的风险-收益分析提供了一种可行的量化工具;在此基础上,夏普(1964)、林特纳(1965)研究了资本资产价格的均衡结构,资本资产定价模型(capital asset pricing model, CAPM)也成为证券风险量化分析的基础(CAPM的严格的假定条件给经验验证带来了许多障碍,即使在规模最大、制度最完善、效率最高的美国证券市场中,证券的风险-收益关系也不可能与CAPM结论完全吻合)。

20世纪60年代另一个对金融实践具有重要影响的假说是萨缪尔森和法玛(1965)提出的有效市场假说(该假说认为,在一个充分有效的资本市场中,资产价格的最优估计就是经过“公平”预期回报率调整的现行价格),法玛(1970)进行了系统的总结。按照这个假说,试图使用历史数据和公众预期进行证券未来价格的预期必然是不可行的。

萨缪尔森(1965)认识到由于风险的不同,期权和股票的期望收益应该是不同的。假定股价遵循带有正成长率的几何布朗运动,因而允许有正的利率和风险收益。该模型推动了期权定价理论的发展,构成了20世纪60年代以来证券理论研究的基石,为后来的Black-Scholes模型的开发奠定了基础。

20世纪60年代末和70年代初,发展到了资产定价和最优决策的跨期与不确定性分析。马科维茨的均值-方差模型为动态的投资组合理论所发展和丰富。马科维茨组合理论的立足点是全面考虑期望收益最大和不确定性(即风险)最小。随着量化研究的不断深入,组合理论及其实际运用方法越来越完善,成为现代投资学中的交流工具。

1970年罗斯(Ross)提出了一种新的资本资产均衡模型——套利定价模型(arbitrage pricing theory, APT)。APT的核心是假设不存在套利机会。APT在更加广泛的意义上建立了证券收益与宏观经济中其他因素的联系,为证券走势分析提供了比CAPM更好的拟合。

20世纪50年代以前,宏观金融学的核心理论主要建立在古典学派和凯恩斯学派的货币学说的基础上,其分析范式以定性的制度分析为主,数理方法的运用还相对较少。古典学派理论体系中货币是中性,其数量变化仅造成名义收入的变化,不会引起相对价格体系的变化,市场在瓦尔拉斯一般均衡机制下迅速出清,此时的宏观金融理论主要有决定物价的货币数量论、决定利息的资本市场供求论和金属货币制度下汇率决定的“休谟机制”与纸币制度下汇率决定的货币模型(如Tobin模型)等。

在20世纪60年代经济增长的“黄金时期”和70—80年代的“滞胀危机”前后,新古典学派和新凯恩斯学派兴起,宏观金融学进入快速发展阶段。货币主义学派、理性预期学派和供给学派是新古典经济学的三大支柱,基本假设依然是完全竞争和价格完全弹性,三个学派的理论机制存在差异,但基本结论一致,即政府政策无效。

凯恩斯主义的产生是宏观金融学的重要革命,其理论基础是货币供给外生论和货币需求“流动性偏好”说,认为在价格刚性条件下,给定货币需求函数,货币供给变化能够影响实际有效需求,进而影响实际产出。凯恩斯主义货币理论模型主要有利率产出决定的IS-LM模型、价格产出决定的AD-AS模型和开放条件下的蒙代尔-弗莱明模型等。同时,在此阶段,金融学在研究方法上也出现了重要创新,由静态和比较静态分析向动态分析转变,形成了哈罗德-多马(Harrod-Domar)的“刀刃”模型和多恩布什(Dornbusch)的“超

调”(overshoot)模型等。

弗里德曼(Friedman,1963)在古典货币数量论基础上,将货币需求函数化,发现此需求函数相对稳定,提倡货币政策执行与长期实际国民收入增长率相一致的“单一规则”。在梅茨勒(Metzler,1941)的外推型预期和卡根(Cagen,1965)的适应性预期模型的基础上,卢卡斯(Lucas,1961)提出了理性预期假说,认为经济主体的理性行为将使政府的任何调控政策失效,市场会达到完美预见的均衡,系统的货币活动仅仅影响名义变量,不影响实际变量。在开放经济方面,穆斯(Muth,1961)认为在市场理性预期假设下,远期汇率是未来即期汇率的最好无偏预测器。

## (二) 20世纪70—90年代

1973年布莱克(Black)和斯科尔斯(Scholes)发表了题为“期权价格和公司负债”一文,提出了有史以来第一个期权定价模型,在学术界和实务界引起了强烈反响。在这篇突破性的论文中,他们成功求解了随机微分方程,利用市场的套利条件,导出了到期月以前的期权价格的精确公式。该经济理论的重要意义在于超前于金融实践,并引导金融实践的运行。

自从布莱克和斯科尔斯的论文发表以后,莫顿(Merton)、考克斯(Cox)、鲁宾斯坦(Rubinstein)等一些学者相继对这一理论进行了重要的推广并加以广泛的应用。期权定价模型可用来制定各种金融衍生产品的价格,是各种衍生产品估价的有效工具。期权定价模型为西方国家的金融创新提供了有利的指导,是现代金融理论的主要内容之一。

20世纪70年代的金融定价模型主要运用于股票市场以及基于股票的衍生证券市场。到80年代,其运用集中于固定收益证券领域。这些模型连同或有要求权分析(contingent claims analysis, CCA)模型的各种发展形式为各种衍生证券的定价和套期操作提供了理论依据。80年代后期,金融理论的时间滞后模型在实践中得到广泛的运用,例如利率动态模型连同CCA模型对货币市场衍生工具的定价提供了依据。

相对完全竞争市场的新古典主义,强调市场非完全的新凯恩斯主义的发展也非常迅速。针对货币市场摩擦,新凯恩斯主义发展了四大货币模型,分别是西德劳斯基(Sidrauski,1967)的效用函数中的货币模型(MIU)、卢卡斯(Lucas,1982)的现金先行模型(CIA)、金布罗(Kimbrough,1986)的购物时间模型(STM)和芬斯特拉(Feenstra,1986)的交易成本模型,这四大模型为货币进入新凯恩斯主义宏观金融分析框架奠定了基础。另外,迪克西特和斯蒂格利茨(Dixit & Stiglitz,1977)的垄断竞争模型引入新凯恩斯研究框架,成为其框架下的基本设定之一;同时,新凯恩斯主义继续坚持名义价格粘性假设,开创了价格调整的Calvo规则和Taylor规则(Calvo,1983; Taylor,1980),并据此推导出新凯恩斯菲利普斯曲线,该曲线成为货币政策调控研究的重要方程。卡雷肯和华莱士(Kareken & Wallace,1981)进一步阐述了汇率的不确定性,认为政府政策变量的设置条件不足以决定汇率,就该意义上的政策而言,汇率是不确定的;卢卡斯则用太阳黑子理论证明汇率的不确定性。

## (三) 20世纪90年代以后

20世纪90年代以来,特别是近几年,很多经济学家对不完全市场、标的资产价格存

在异常跳跃或标的资产收益率方差不为常数等情况下的期权定价问题进行了广泛研究,取得了许多重要研究成果。马登和塞尼塔(Madan & Seneta, 1990)选择 gamma 过程作为时变过程来构造时变布朗运动,即用 gamma 时变布朗运动代替 B-S 期权定价模型中的布朗运动,从而得到相应的资产收益模型。

近十几年中数学和计算机领域的快速发展推动了金融衍生品的发展,定价模型渐趋复杂。这一阶段的相关研究包括:斯坦(Stein, 1991)、赫斯顿(Heston, 1993)与罗马(Roma, 1994)等采用波动率的随机过程建立衍生品的定价模型,使之更贴近现实;本赛德和伦泽(Bensaid & Lense, 1992)考虑了交易费用对期权价格的影响,把衍生品定价问题归结为寻找最优保值策略的问题,一般要求解一个带约束的随机最优控制问题,提出了存在交易费用情况下的期权定价模型;朗斯塔夫(Longstaff, 1993)从利率的随机过程及利率的期限结构角度来对金融衍生品定价做更进一步的研究,提出了利率衍生品的两因素一般均衡模型;赫尔和怀特(Hull & White, 1993)分析得到了货币期权和股票指数期权的定价公式;鲁宾斯坦(1994)提出、萨哈拉和罗(Ait-Sahalia & Lo, 1996)发展完善了马尔科夫期权定价模型;杜安(Duan, 1995)提出了 GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) 期权定价模型,以 GARCH 模型描述资产收益轨迹,反映了标的资产条件波动性的改变;琳晨(Linchen, 1996)在衍生品定价及风险控制管理方面提出了利率期限结构的三因素一般均衡模型。卡露伊和奎内茨(Karoui & Quenez, 1997)、朱尼(Jouini, 1997)利用鞅理论非线性定价理论后移随机微分方程和等价鞅测度与不完全市场;刘海龙和吴冲锋(2001)在离散时间模型基础上,给出不完全金融市场的期权定价  $\varepsilon$ -套利方法。针对股价服从几何布朗运动的假设,即意味着股价是时间的连续函数,研究发现,几何布朗运动并不是刻画股价过程的理想工具。实践表明,股价可能会出现间断的“跳跃”,股票的预期收益率往往是波动变化的,可能是依赖时间和股价的函数。

此外,很多文献对股价波动规律进行了研究:贝茨(Bates, 1991)、阿敏和杰诺(Amin & Jarrow, 1992)、马登和常(Madan & Chang, 1996)进一步发展了莫顿模型,分别得到了随机利率期权定价模型和跳跃-扩散模型;施魏策尔(Schweizer, 1991)提出了一般半鞅模型;赫尔和怀特(Hull & White, 1987)提出、赫斯顿(Heston, 1993)发展了随机波动率定价模型;贝利和斯图茨(Baily & Stulz, 1989)提出、巴克希和陈(Bakshi & Chen, 1997)发展完善了随机利率-随机波动率定价模型;贝茨(Bates, 1996)和斯科特(Scott, 1997)提出并建立了随机波动率-跳跃扩散定价模型;巴克希(Bakshi, 1997)提出了基于随机利率、随机波动率和跳跃扩散假设的混合期权定价模型;尚(Chan, 1999)提出了 Levy 过程模型;卡尔森(Kallsen, 2000)提出了指数 Levy 过程模型;普里哲(Prigent, 2001)提出了一般标志点过程模型等。

布拉特和赖德博格(Bladt & Rydberg, 1998)首次提出期权定价的保险精算方法,将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题。闫海峰和刘三阳(2003)推广了布拉特和赖德博格的结果,把布莱克-斯科尔斯模型推广到无风险资产(债券或银行存款)具有时间相依的利率和风险资产(股票)具有时间相依的连续复利预期收益率和波动率的情况,获得了欧式期权的精确定价公式以及买权与卖权之间的平价关系。

20 世纪 90 年代以来,现代宏观金融学的基本分析框架——动态随机一般均衡模型

(简称 DSGE 模型)形成。代表性的有实际商业周期(RBC)模型、新凯恩斯动态随机一般均衡(NK-DSGE)模型和新开放宏观经济学(NOEM)模型。RBC 模型是现代宏观金融学分析框架的雏形。作为新古典学派的基准模型,其假设依然是价格弹性、信息完全和市场连续出清,认为宏观经济周期的主因是实际经济面的不确定性冲击,主要模型有基德兰德-普林斯科特(Kydland-Prescott)模型和汉森(Hansen)模型。早期 RBC 模型的关键缺陷在于分析框架中无货币,因此萨金特(Sargent,1987)和布兰查德和费雪(Blanchard & Fischer,1989)等以货币效用模型(MIU)方式将货币融入模型,但由于依然假设完美市场,在该框架下货币仍然是中性的,甚至是超中性的。

新古典完美市场条件下的 RBC 模型更多的是作为一个基准,而现实市场条件难以满足其基本假设,理论和实践中运用更多的是 NK-DSGE 模型。克里斯坦诺、艾肯鲍姆和埃文斯 2005 年的工作论文(Christiano, Eichenbaum & Evans,2005)是 NK-DSGE 模型的经典之作,涵盖了之前许多新凯恩斯主义的研究成果,包括投资的调整成本、产能利用率、工资粘性、消费惯性等。近几年,NK-DSGE 模型又在多个方面取得了显著的进展,如信息粘性、预期粘性、工资惯性、混合新菲利普斯曲线等。目前 NK-DSGE 模型最薄弱的环节在劳动力市场和金融市场方面,布兰查德和加利(Blanchard & Gali,2010)以及克里斯坦诺等(2013)等对劳动力市场进行了一定的探索,而克里斯滕森和德布(Christensen & Dib,2008)、克里斯坦诺等(2015)等推进了金融市场的研究。

NOEM 模型实际上是 DSGE 模型的开放经济版本,前述众多 RBC 或 NK-DSGE 模型也都是开放经济条件下的研究。NOEM 模型的开山之作是奥布斯坦菲尔德(Obstfeld,1995)构建的 Redux 模型,所谓的开放包括经常项目开放和资本项目开放,购买力平价和利率平价是反映此两类开放的核心假设。德弗罗(Devereux,1998)修正了 Redux 模型隐含的购买力平价假设,即认为企业不一定以生产者货币定价,可能以市场货币定价;奥布斯坦菲尔德和罗格夫(Obstfeld & Rogoff,2002)等对利率平价假设进行了修正,认为货币政策行为影响国内外利率风险溢酬。总体来看,NOEM 模型分为两类:一类是大国开放模型,又称两国模型,代表性的有克拉里达等(Clarida et al.,2001)的文献,大国模型的关键假定是两国之间的供求能够相互影响价格(即国际市场价格);而另一类是小国开放模型,代表性的是盖利(Gaily,2008)的 SOM 模型,在小国模型框架下,国内市场供求不会影响国际市场价格,国内部门在对外交往活动中只能接受国际价格。

## 第二节 数理金融学的结构框架

完整的现代金融学体系将以微观金融学和宏观金融学为理论基础,扩展到各种具体的应用金融学学科上,而数理金融(同时辅助以实证计量)的研究风格将逐渐贯穿整个从理论到实践的过程。

### 一、微观金融学与宏观金融学

金融学是研究如何在不确定性的环境下,通过资本市场对资源进行跨期最优配置的一门经济科学。可以说,金融学是专门研究不确定性和动态过程的经济学,它同正统经

济学在学科研究内涵和基本方法论上存在某种相似性。由于其特殊的研究对象(货币、金融现象),金融学得以作为一门独立的经济学科存在。

从金融学思想的发展历程可以看出,早期的古典经济学家关心整体价格水平(如货币数量理论)、利息率决定和资本积累过程等问题,他们更多的是在宏观的意义上考察金融问题的。新古典后期的经济学家们,则通过利息理论把宏观金融问题与一般经济问题(如经济增长和经济危机)紧密结合在一起考虑。等到凯恩斯革命时,顺理成章地,它不但确立了现代宏观经济学,也标志着现代宏观金融学的形成,从此宏观金融学的核心内容——货币理论也同时成为宏观经济学的重要内容。

微观金融学一般被认为出现在20世纪50年代中期,如同新古典经济学(也即后来的微观经济学),它也是一种价格理论,它认为使得资源(跨期)最优配置的价格体系总是存在的,它的目标就是寻找使得资源实现最优配置的合理(金融资产)价格体系。宏观金融学则是在资源非有效配置(即自由价格机制在某种程度上失灵)的情况下,对微观金融学(也即新古典金融学)的一种现实扩展,尽管获得这种认识的历史顺序与逻辑顺序正好相反(同经济学相比较而言)。

微观金融学主要考虑金融现象的微观基础。它研究如何在不确定情况下,通过金融市场对资源进行跨期最优配置。这也意味着它必然以实现市场均衡和获得合理金融产品价格体系为其理论目标和主要内容。它的一个重要任务被认为是为资产定价。在初步引入不确定性、时间等一些基本概念后,为了呈现理性决策的基础,需要建立个人偏好公理体系和效用函数理论。然后考察个人如何做出投资/消费决策,以使得个人终身效用最大化。微观金融学的另一个方面是生产者的融资行为理论,即企业如何做出它们的投资/融资决策,通过合理的资本结构安排,使得所有者权益最大化。资金的供给者(投资者)和需求者(融资者)最终在资本市场上相遇。当市场均衡时,资产的价格和数量必须同时被决定。

宏观金融学研究在一个以货币为媒介的市场经济中,如何获得高就业、低通货膨胀、国际收支平衡和经济增长。可以认为宏观金融学是宏观经济学(包括开放条件下)的货币版本,它着重于宏观货币经济(包括开放条件下)模型的建立,并通过它们产生对于实现高就业、低通货膨胀、高经济增长和其他经济目标可能有用的货币政策结论和建议。货币经济学是整个宏观金融学的核心内容,货币只是众多的备选金融资产中的一种。在新货币主义的框架下,问题可以简化为既定收入(恒久收入)、财富约束下个人资产配置的均衡问题,或者既定价格(资产收益率)体系下收入(参数)扩张的路径问题,从而在IS-LM框架中决定了利息率和国民收入之间的关系。

在国际金融领域,大规模的资本流动使得外部平衡的传统定义有了更新,基于资产选择方法的汇率理论开始被普遍接受,以蒙代尔-弗莱明(Modell-Fleming)模型的出现为标志,整个经济的内部、外部均衡开始被紧密地联系在一起考虑。这也同时意味着开放的货币经济的整体均衡有可能通过适当的政策协调得以实现。这种协调既出现在一个经济的内部,也出现在不同经济之间。由于始终存在着看待问题的不同角度和不同的研究风格,因而在一些重要的金融问题(如通货膨胀、汇率管理、市场干预)上,总是会有不同货币政策和争论产生,这也构成了宏观金融理论的一个重要也是必然的组成部分。

## 二、数理金融学在金融学科体系中的地位

现代金融学体系必须对于现有各金融学分支学科提供足够的兼容性,而且最重要的是,它必须提供一个开放的学科结构,以适应飞速发展的金融理论和实践创新的需要,尤其体现在金融学这门学科的主要研究方向和内容以及主要使用的数学工具和方法的运用上。

在微观层面上,投资学研究如何把个人、机构的有限财富或者资源分配到诸如股票、国库券、不动产等各种(金融)资产上,以获得合意的现金流量和风险与收益。它的核心内容就是以效用最大化准则为指导,获得个人财富配置的最优均衡。

金融市场学分析市场的组织形式、结构,同时考察不同的金融产品和它们的特征,以及它们在实现资源跨期配置过程中起到的作用。它们的合理价格是这种研究中最重要的一部分。

公司理财考察公司如何有效地利用各种融资渠道,获得最低成本的资金来源,并形成合适的资本结构。它会涉及现代公司制度中的一些诸如委托-代理结构的金融安排等深层次的问题。

金融经济学同经济学面临的任務一样,它试图通过对个人和厂商的最优化投资与融资行为以及资本市场的结构和运行方式的分析,去考察跨期资源配置的一般制度安排方法和相应的效率问题。

在宏观层面上,货币银行学的核心内容是货币供给和需求、利率的决定以及由此而产生的对于宏观金融经济现象的解释和相应的政策建议。它是主流宏观经济学的一种货币演绎。

国际金融学本质上是开放经济的货币宏观经济学,因而它往往被认为是货币银行学的一个外延和必然组成部分。在经济全球化进程中,它主要关心在一个资金广泛流动和灵活多变的汇率制度环境下,同时实现内外均衡的条件和方法。

数理金融学则显得比较独特,与其说它是一门独立的学科,倒不如说它是作为一种方法存在。它主要使用一切可能的数学方法,来研究几乎一切金融问题,特别是复杂产品定价和动态市场均衡。类似的学科还有金融市场计量经济学,本质上它属于计量经济学,它是基于实际数据,以统计计量的方法为各种金融模型和理论提供校验(验伪)手段和方法。

近年来,推动金融学与数学相结合的主要动力是金融工程学的发展,金融工程学侧重于衍生金融产品的定价和实际运用,它最关心的是如何利用创新金融工具,来更有效地分配和再分配个体所面临的形形色色的经济风险,以优化他们的风险与收益特征。

数理金融学是金融工程学的理论基础,可以说,金融工程学就是把数理金融学的基本原理工程化、产品化。前者是基础理论,后者是理论的应用。金融工程学的核心内涵包括两个方面:一是如何组合已有的金融产品,以改变原有金融产品的风险与收益特性,从而达到有效地利用与开发风险、实现金融交易收益最大化的目的。能否通过金融产品的不同组合来实现开发风险、提高收益的目的,关键在于能否精确地刻画与预测金融产品的风险与收益变化的规律。二是开发新的金融产品。开发新的金融产品,说到底就是根据市场的需要创新出具有新的收益与风险特性,或者能对已有产品形成替代,或者可



与已有金融产品结合而产生更令人满意的风险与收益特性,或者能适应某种特殊需要的新金融品种。总之,金融工程学的关键是要能定量地精确刻画出金融产品的风险。要实现这样的目的,除了应用数学工具与思维方法之外,别无他径。同时,在精确地刻画金融产品风险的基础上,如何进行金融产品组合,仍然是一个应用数学工具与思维方法的问题。因此,数理金融学与金融工程学两者是相互依赖和促进的。金融工程学的发展不断为数理金融学提出新的研究课题,促进了数理金融学的发展;另一方面,数理金融学的发展也日益拓宽金融工程学的创新空间,不断为金融工程学提供新的理论和方法。

综上所述,金融学的这些分支学科所考察的金融现象发生在不同的层次之上,并存在着某种分工。各种分支学科之间的固有联系正日益变得有机、清晰,并紧密统一在一个完整的框架结构中。图 1-1 提供了一份比较完整的现代金融学学科构成图。当然,由于实践的快速发展和学科的开放性质,它将不断得到进一步的充实和扩展。

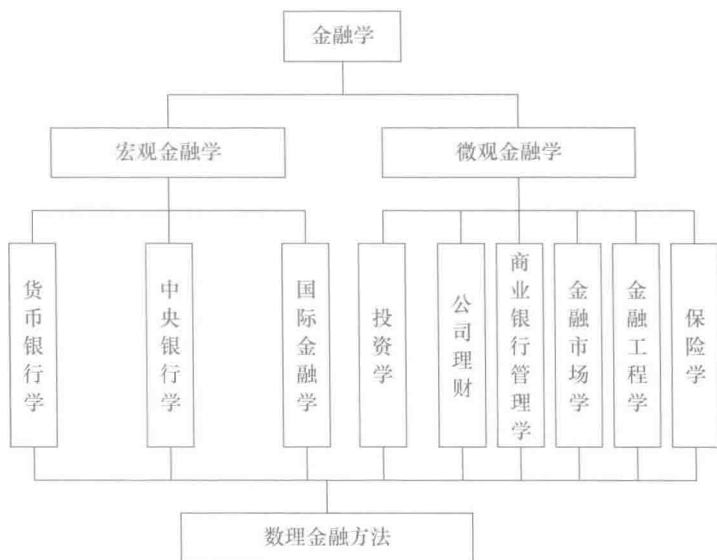


图 1-1 现代金融学学科构成图

### 三、数理金融学的结构框架

构建一门学科是为了更全面和更系统地研究它。目前数理金融学科体系缺乏一种提纲挈领和统一的基础理论框架。它也最大限度地使用现代数学提供的有力工具,这主要是指随机过程理论,因而它是一门建立在金融学和数学基础上的专门解决不确定性和动态问题的经济学分支学科。它为金融学提供方法论基础。同时,它和几乎所有金融实践工作紧密地联系在一起,它的大量成果被直接应用到金融市场第一线。本书的框架结构和基本内容主要从以下几个方面展开。

第一部分是数理金融方法基础篇,包括第 2 章和第 3 章,阐述了数理金融的基本数学方法和计量经济学在数理金融中的应用,重点讲述了微积分、线性代数、概率论、计量经济学等在数理金融中的应用。例如,运用指数、对数函数计算连续复利和实际利率、银行按揭贷款、分期付款、银行贴现以及时间最优问题;运用微分方法测度边际效用函数、