高等数学学习辅导

（修订版）

下 册

中央电大数学教研室编

中央广播电视大学出版社

高等数学学习辅导

（修订版）

下 册

[illegible]

[illegible]

高等数学学习辅导

（修订版）

下　册

中央广播电视大学数学教研室　编

中央广播电视大学出版社

目　录

第 十 章　多元函数微分学 ……………………………1

第十一章　重积分………………………………………46

第十二章　曲线积分和曲面积分………………………81

第十三章　场论初步 …………………………………120

第十四章　级数 ………………………………………158

第十五章　傅氏级数 …………………………………190

第十六章　常微分方程 ………………………………203

第十章 多元函数微分学

我们已经学习了一元函数的微积分，运用一元函数微积分能解决不少实际问题。但是在相当一部分实际问题中，却有多个变量，仅仅利用一元函数微积分的方法，还不足以解决问题，所以需要学习多元函数微积分。

多元函数与一元函数有着密切的联系，我们常常把多元函数问题转化为一元函数的问题，再利用一元函数微积分的概念和方法加以解决。同时还要注意到多元函数和一元函数不同之处，这些不同之处反映了多元函数的特殊性。

由于三元以上的多元函数的研究方法与二元函数类似，因此我们主要以二元函数为代表对多元函数微分学进行讨论。

一、内容提要

（一）基本概念

1. 多元函数定义及定义域

学习多元函数定义时，要特别注意自变量的取值范围及它们与因变量的对应关系。自变量 x, y 在一定的范围 D 内取定一组值后，按照一定的法则，都有唯一确定的值与它们对应。

自变量的取值范围 D 称为函数的定义域。一元函数定义域一般是 x 轴上的区间（包括孤立的点）。而二元函数定义域一般是 xy 平面上的区域（包括平面曲线）。

2. 简单的二元函数图形

主要是指球面，圆柱面，圆锥面，椭圆抛物面的方程及图形以及这些曲面经过平移（以坐标轴为对称轴，顶点不在原点）后的方程及图形。能够由简单的二元函数讨论它的定义域，值域，顶点，对称性等，从而画出它们的简图。

3. 二元函数的极限

学习二元函数的极限要注意动点 $P(x, y)$ 趋向于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 的意义。一元函数的极限当 $x \to x_0$ 时，方式只有两种，即 x 从左、右两边趋向 x_0，而二元函数的极限中 $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ 必须以任意方式趋向。任意方式意味着无穷多种，但是反过来，有时无穷多种方式并不能代表任意方式。

4. 二元函数的连续性

与一元函数连续性相似，二元连续函数具有一元连续函数所具有的性质，特别是“二元初等函数在其定义域内连续”的重要结论。

（二）二元函数微分法

1. 一阶偏导数

(1) 一阶偏导数的定义

设函数 $z=f(x, y)$，定义

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}$$

当函数在某点不连续，或某点为“尖点”时，一般用定义去求该点的偏导数。

(2) 一阶偏导数的计算方法

只对所要求的自变量求导，把其余的自变量看作常量，用一元函数求导法则求导。

(3) 一阶偏导数的几何意义

函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 是平面曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处切线的斜率 $\mathrm{tg}\alpha$，其中 α 为该切线与 x 轴的夹角：

$$\mathrm{tg}\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

同理有 $\mathrm{tg}\beta=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$. β 为平面曲线 $f(x_0,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的切线与 y 轴的夹角。

(4) 一阶偏导数与连续性的关系

二元函数在点 (x_0,y_0) 连续，但该点不一定存在偏导数，这一点与一元函数是一致的。但是在 (x_0,y_0) 有偏导数，而在该点不一定连续，这一点与一元函数中可导必连续是不同的。

2. 高阶偏导数

(1) 二阶偏导数的概念

函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内偏导数存在，$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 一般仍为 x,y 的函数，若它们在 D 内偏导数存在，可以继续求 x 或 y 的偏导数，这就是二阶偏导数，这样的偏导数共有四个：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\qquad\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\qquad\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(2) 二阶偏导数与次序无关的条件

如果两个偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3. 全微分

(1) 二元函数可微及全微分的概念

若二元函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的全增量Δz可写成：

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

其中A,B与$\Delta x,\Delta y$无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，当 $\rho\to 0$ 时，$o(\rho)$是比ρ更高阶的无穷小量，即当$\rho\to 0$，$\frac{o(\rho)}{\rho}\to 0$称$f(x,y)$在$P(x,y)$可微。

把$A\Delta x+B\Delta y$称作函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$的全微分，记作：

$$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

(2) 全微分的计算

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$\Delta x,\Delta y$是自变量的微分，$dx=\Delta x, dy=\Delta y$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

(3) 可微与连续的关系

一元函数中，在一点x_0可导，就称函数$f(x)$在该点可微。在二元函数$f(x,y)$中，在一点(x_0,y_0)可微要比在该点有偏导数条件强得多。即在(x_0,y_0)两个偏导数存在，并不能认为函数在该点可微，还必须要求在(x_0,y_0)两个偏导数连续，才能保

证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微。反过来 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，就一定能保证函数在该点连续并且有偏导数存在。

4. 复合函数的微分法

在一元函数中，学习复合函数的导数时，为了正确地计算出最后的结果，常常引入中间变量。这个方法同样可以运用到二元函数的偏导数计算中去，特别对于没有具体给出函数关系的二元函数。尽管计算要比一元函数要复杂一些，但是它们的求导原则是一致的，即函数对某个自变量求偏导数时，必须通过一切有关的中间变量，直到该自变量为止。这个法则形象地称为锁链法则。用式子表示就是

$$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$$

则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

5. 一阶全微分的形式不变性

$z=f(u,v)$，不论 u,v 是否为自变量还是中间变量，都有

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

利用这个全微分的形式不变性，可以灵活地计算二元函数的偏导数和全微分。

6. 隐函数的微分法

由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x,y)$，[或 $y=y(x,z)$，$x=x(y,z)$]，运用复合函数的微分法则，可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}$$

以及$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial z}, \cdots$各隐函数对自变量的偏导数。

（三）多元函数微分学的应用

1. 几何应用

(1) 由参数方程给出的空间曲线：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$的切线及法平面方程

过点(x_0, y_0, z_0)的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

要理解$\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$是曲线在点$(x_0, y_0, z_0)$的切向量。

(2) 曲面$F(x,y,z)=0$的切平面及法线方程

过点(x_0, y_0, z_0)的曲面切平面方程为：

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

要理解$\{F'_x(x_0,y_0,z_0), F'_y(x_0,y_0,z_0), F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$是曲面在点$(x_0, y_0, z_0)$的法向量。

在实际应用中，经常要用到空间解析几何中有关向量平行、垂直的条件，设法求出切点，最后代入公式问题就解决了。

2. 极值问题

(1) 二元函数的极值

二元函数$z=f(x,y)$偏导数存在，则极值存在的必要条件：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

使得一阶偏导数为零的点(x_0,y_0)称为驻点，要理解驻点有时不一定为极值点，有些偏导数不存在的点也可能为极值点。再具备什么条件，二元函数在(x_0,y_0)有极值存在呢？这就是二元函数极值存在的充分条件：

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)有一阶和二阶偏导数，且$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$。

若$[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)<0$，则二元函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$有极值，且当$f''_{xx}(x_0,y_0)>0$时，函数在$(x_0,y_0)$达到极小值，$f''_{xx}(x_0,y_0)<0$时，函数在$(x_0,y_0)$达到极大值。

若$[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)>0$，则函数在$(x_0,y_0)$无极值。若$[f''_{xy}(x_0,y_0)]^2-f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)=0$，则函数在$(x_0,y_0)$的极值不确定。

要知道这个充分条件只对二元函数而言，三元以上的多元函数则不适用。

(2) 条件极值及拉格朗日乘子法

普通极值在满足一定条件后就成为条件极值。要知道普通极值与条件极值是两个不同的概念。同样一个函数可以不存在极值，但在一定条件下可以存在条件极值。

计算方法可以从条件函数中解出一个未知量，代入极值函数，最后用多元函数普通极值方法计算。我们通常用拉格朗日乘子法求解条件极值。(以二元函数为例,但对二元以上的多元函数也适用。)

极值函数为 $z=f(x,y)$，条件函数为 $\varphi(x,y)=0$，引入新函数:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

由极值存在的必要条件,解联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

求出驻点，再判断该驻点是否为极值点。要注意新函数 $F(x,y,\lambda)$ 不再是二元函数，不能用二元函数极值的充分条件去判定，而在实际问题中，可以由问题本身可确定是否是极值，不必作过多的计算。

(3) 最大最小值问题

这部分主要是条件极值在实际问题中的应用。关键是根据实际问题写出极值函数及条件函数，用拉格朗日乘子法求出驻点,最后由问题本身判断出是否为最大(小)值点,并求出最大(小)值。

二、要 求

1. 了解二元函数的定义,会求二元函数的定义域及用平

面图形表示二元函数的定义域。

2. 了解二元函数极限及连续的定义，知道一切多元初等函数在其定义域内是连续的。

3. 掌握一阶偏导数的定义及其几何意义，熟练掌握一阶偏导数及二阶偏导数的计算方法；了解一阶偏导数与连续性的关系。

4. 理解全微分的概念，熟练掌握全微分的计算方法；理解二元函数在某点可微的条件。

5. 掌握复合函数微分法；会求隐函数的偏导数。

6. 了解用一阶全微分的形式不变性计算函数的全微分和偏导数的方法。

7. 会求空间曲线的切线及法平面及曲面的切平面及法线。

8. 掌握二元函数极值存在的必要条件和充分条件。

9. 会用拉格朗日乘子法求条件极值。

其中重点是：

偏导数的定义；复合函数的微分法；条件极值。

三、例题分析

（一）二元函数的定义域

例 1 求下列函数的定义域

① $z=\ln[x\ln(y-x)]$； ② $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$。

解① 这是复合函数 $z=\ln u$，其中

$$u=x\ln(y-x)$$

由对数函数定义域有$u>0$，即

$$x\ln(y-x)>0$$

于是有

$$\begin{cases}x>0\\ \ln(y-x)>0\end{cases} \tag{1}$$

或者

$$\begin{cases}x<0\\ \ln(y-x)<0\end{cases} \tag{2}$$

由(1)式得

$$\begin{cases}x>0\\ y-x>1\end{cases}$$

它的图形是图 10.1 中除去直线 $y=x+1$ 的阴影部分。

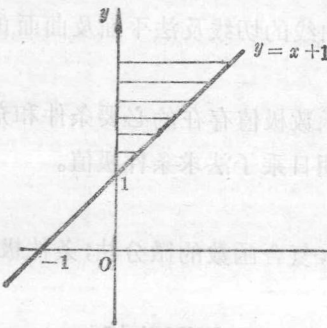
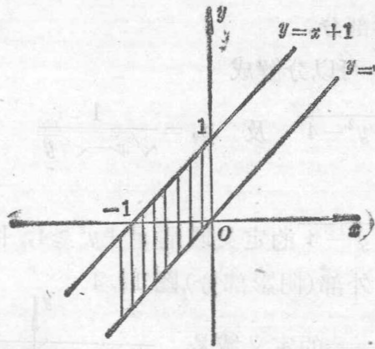


图 10.1

由(2)式得

$$\begin{cases}x<0\\ 0<y-x<1\end{cases}$$

它的图形是图 10.2 中除去直线 $y=x$ 及 $y=x+1$ 的阴影部分。



10.2

由于自变量 x,y 只要满足(1)式或(2)式中的一个，不必同时满足(1),(2)两式,所以该函数的定义域取它们的和,即

$$\begin{cases}x>0\\ y-x>1\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x<0\\ 0<y-x<1\end{cases}$$

图形是图 10.1 及图 10.2 的和(图 10.3) 即除去直线 $y=x$ 及

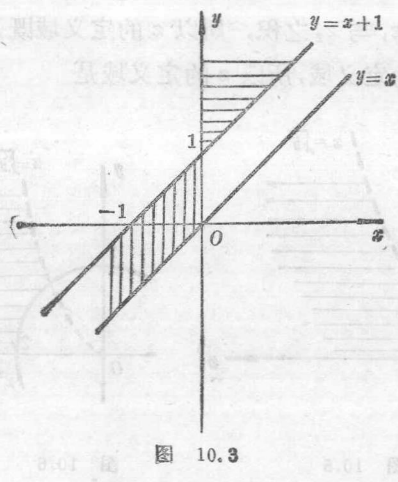


图 10.3

$y=x+1$ 的阴影部分。

(2) 函数 z 可以分解成

$$z_1=\sqrt{x^2+y^2-4} \quad \text{及} \quad z_2=\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$$

之积 $z=z_1z_2$。

$z_1=\sqrt{x^2+y^2-4}$ 的定义域是 $x^2+y^2\geqslant4$，图形是包括圆周 $x^2+y^2=4$ 的外部(阴影部分)图 10.4

$z_2=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ 的定义域是

$$\begin{cases}x-\sqrt{y}>0\\ y\geqslant0\end{cases}$$

即 $\quad x^2>y\geqslant0$

图形为除去抛物线 $x=\sqrt{y}$，包括 x 轴正向的阴影部分，图 10.5。

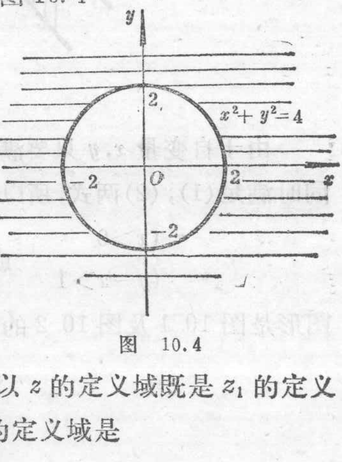


图 10.4

由于 z 是 z_1 与 z_2 之积，所以 z 的定义域既是 z_1 的定义域，也要是 z_2 的定义域，所以 z 的定义域是

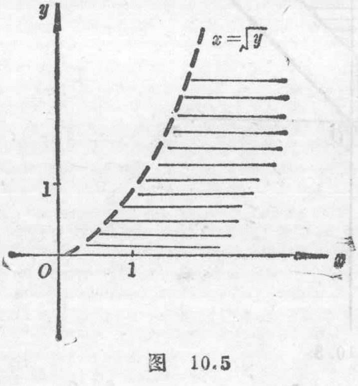


图 10.5

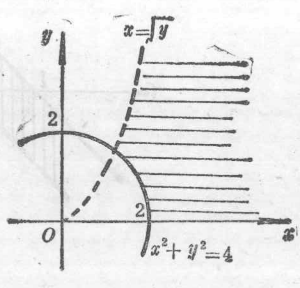


图 10.6

$$\begin{cases}x^2+y^2\geqslant 4\\ x^2>y\geqslant 0\end{cases}$$

图形取图10.4及图10.5的公共部分，即图10.6中除去抛物线，包括部分圆周 $x^2+y^2=4$ 及部分 x 轴正向的阴影部分。

小　结

(1) 熟练掌握二元初等函数，例如分式函数，无理函数，对数函数，三角函数，反三角函数自变量的取值范围。

(2) 一个多元函数如果是某些函数的代数和或乘积时，其定义域是这些函数定义域的公共部分。

(3) 求复合函数的定义域时，首先搞清复合关系，每一复合步骤对变量取值范围的要求，然后从外到里，一层一层做下去，最后得到复合函数定义域。

例如 $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$，是由

$$z=\sqrt{u},\ u=\sin v,\ v=x^2+y^2$$

复合而成的，要求 $u\geqslant 0$，即 $\sin v\geqslant 0$，所以 $2k\pi\leqslant v\leqslant(2k+1)\pi$，$(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$。又因 $v=x^2+y^2$ 是正实数，最后得

$$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

(4) 二元函数的定义域一般是一个平面区域（或者是一条曲线），若是一般区域可以用二元不等式 $\varphi(x,y)>0$（或 <0）表示，$\varphi(x,y)=0$ 叫区域的边界方程。一般地讲 $\varphi(x,y)=0$ 把平面分成两部分，在两部分中任意取一点，将该点坐标代入 $\varphi(x,y)$，若满足 $\varphi(x,y)>0$（或 <0），则该点所在的区域为要求的区域。这个方法在教材例题中具体讲到，要注意掌握这个方法。