

清 華 大 學

第一次科学討論会报告集

1956 · 4

第二分册 自然科学类

清華大学科学研究工作委员会編

机械工業出版社出版

408
811

親愛的讀者：

当您讀完這本書後，請尽量地指出本書內容、設計和校對上的錯誤和缺點，以及對我社有關出版工作的意見和要求，以幫助我們改進工作。來信請寄北京東交民巷二十七號本社收（將信封左上角剪開，註明郵資總付字樣，不必貼郵票），並請詳告您的通訊地址和工作職務，以便經常聯系。

機械工業出版社

NO. 1280

1956年12月第一版

1956年12月第一版第一次印刷

787×1092¹/₁₆ 字數 96 千字 印張 4¹/₂ 0,001—4,500 冊

機械工業出版社（北京東交民巷27號）出版

機械工業出版社印刷廠印刷 新華書店發行

北京市書刊出版業營業許可証出字第008號

統一書號

13033·1

定價(8) 0.46 元

清 華 大 学
第一次科学討論会报告集

第二分册 自 然 科 学 类

清華大学科学研究工作委员会編

机械工業出版社

1 9 5 6

目 錄

斜量法的比較及应用	趙訪熊 (3)
重力壩彈性应力分析問題	杜慶華 (15)
空心壩的应力分析	楊振昌 (28)
管道的振動	鄭哲敏 (37)
圓拱的振動	黃昭度 (42)
線性机械自动控制系統的理論綜述	鍾一謨 (50)
有关高分子化合物溶液的性質的若干問題	宋心琦 (59)
关于化学反应速度和热力学因素的关系	趙慕愚 (66)

斜量法的比較及應用

一 引 言

給定 n 個聯立一次方程

$$Ax + b = 0,$$

其中大字母 A 代表係數方陣 $[a_{ij}]$, 小字母代表 n 空間矢量。我們設 $|a_{ij}| \neq 0$, 而求它的解 ξ 。

令 A' 代表方陣 $[a'_{ij}]$, 為了討論方便起見我們令

$$f = Ax + b = A(x - \xi),$$

$$g = A'f,$$

$$h = Ag,$$

$$k = A'h,$$

$$l = Ak。$$

下列代數定理是容易驗證的。

定理：設

$$v = Au, \quad w = A'v, \quad \text{則 } u \cdot w = v \cdot v_0,$$

利用這個定理, 我們有本文將要討論的等式

$$\begin{cases} g \cdot (x - \xi) = f \cdot f, \\ h \cdot f = g \cdot g, \\ k \cdot g = h \cdot h, \\ l \cdot h = k \cdot k. \end{cases} \quad (1)$$

我們把 f 叫做 x 所引起的殘矢, 把 $|f|$ 叫做 x 的“殘量”, 把 $|x - \xi|$ 叫做 x 對於解的“離差”, g 是殘量的斜量方向的一個矢量。從任何 x_0 出發, 順着一個給定的方向, 例如殘量最速下降方向 $-g$, 前進到 x_1 , 如果 x_1 的殘量較小於 x_0 的殘量, 我們就說 x_1 , 按殘量標準說, 是較好於 x_0 的一個近似解; 如果 x_1 的離差較小於 x_0 的離差, 我們就說 x_1 , 按離差標準說, 是較好於 x_0 的一個近似解。在本文內, 我們將比較幾種斜量法的計算工作量及效果。提出改進方法, 最後用斜量法求對稱方陣的固有矢量及固有值。

二 幾種斜量法的比較

普通斜量法^[1]給出的第一次近似解 M_1 是在通過起點 x_0 點的斜量線 $x = x_0 + g_0\tau$ 上, 按殘量標準說, 最好的近似解, 公式是

$$M_1 = x_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} g_0, \quad (2)$$

我的斜量法^[2]給出的第一次近似解 C_1 是在通过起点 x_0 的斜量線上,按离差标准說,最好的近似解,公式是

$$C_1 = x_0 - \frac{f_0 \cdot f_0}{g_0 \cdot g_0} g_0. \quad (3)$$

注意从 x_0 算出 $h_0 = AA'(Ax_0 + b)$, 需要做 $3n^2$ 个乘法, 而算出 $g_0 = A'(Ax_0 + b)$ 僅需做 $2n^2$ 个乘法。所以用(3)的每次計算工作量僅是用(2)的每次計算工作量的三分之二, 而且 C_1 比 M_1 更近於所求的解。

准布尼雅科夫斯基不等式

$$(f \cdot f)(h \cdot h) - (f \cdot h)^2 \geq 0$$

及(1)的

$$f \cdot h = g \cdot g,$$

可得

$$\frac{f_0 \cdot f_0}{g_0 \cdot g_0} \geq \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0},$$

所以在 $-g$ 方向的進度在用(2)时一般比用(3)时为小, 惟有在 f_0 与 h_0 平行的特殊情形下, 两个方法的進度才是相等的。这种特殊情形是可能發生的。当 f_0 与 h_0 平行时, 我們有

$$f_0 = \frac{f_0 \cdot h_0}{h_0 \cdot h_0} h_0 = \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} h_0 = \frac{f_0 \cdot f_0}{g_0 \cdot g_0} h_0,$$

从(2)可得

$$M_1 - \xi = (x_0 - \xi) - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} g_0,$$

左乘方陣 A 即得

$$f_1 = f_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} h_0 = 0.$$

所以在这种特殊情形用(2)或(3)一次就达到所求的解。反过來說, 如果 $x_1 = \xi$, 則 $f_1 = 0$, f_0 也必然与 h_0 平行。

为了增加(2)的收敛速度, 在大量計算內通常^[1]改用公式

$$B_1 = x_0 - 0.9 \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} g_0 \quad (4)$$

來計算。很顯然如果遇到 f_0 与 h_0 平行的特殊情形时, 用(4)反而大大降低了收敛速度, 所以用經驗公式(4)來作大量計算是否有正确的理論根据是可以怀疑的。顯然, 如果在(2)或(3)加一个修正項, 那么这个修正項应当包含与

$$(f_0 \cdot f_0)(h_0 \cdot h_0) - (g_0 \cdot g_0)^2$$

有关的因子, 否則应用於上述特殊情形或十分接近該情形时不能產生有利的作用。

茲設 A 是对称的正定方陣, 也就是說, $A = A'$, 而且 $x \cdot Ax$ 当 x 不等於零矢时只能取到正值。在这个假設下, 我們有比(2)及(3)更簡單的公式, Канторович^[3] 作出二次汎函数

$$H(x) = (Ax + 2b) \cdot x$$

証明了使 H 为極小就可得給定方程的解, H 的斜量方向与 f 相同, 在通过 x_0 点的殘量線 $x = x_0 + f_0 \tau$ 上使 H 为極小的点 K_1 是

$$K_1 = x_0 - \frac{f_0 \cdot f_0}{f_0 \cdot g_0} f_0. \quad (5)$$

不难验证在通过 x_0 的残量线上使残量为最小的点 J_1 是

$$J_1 = x_0 - \frac{f_0 \cdot g_0}{g_0 \cdot g_0} f_0, \quad (6)$$

这是吉田耕作程序。准布尼雅科夫斯基不等式知

$$\frac{f_0 \cdot g_0}{g_0 \cdot g_0} \leq \frac{f_0 \cdot f_0}{f_0 \cdot g_0},$$

因此吉田耕作程序在 $-f$ 方向的进度一般较小于 Канторович 程序的进度, 惟有在 f_0 与 g_0 平行时这两种程序的进度才是相等的。此时

$$f_0 = \frac{f_0 \cdot g_0}{g_0 \cdot g_0} g_0,$$

与 J_1 或 K_1 对应的残量 f 是

$$f_1 = AJ_1 + b = f_0 - \frac{f_0 \cdot g_0}{g_0 \cdot g_0} g_0 = 0,$$

所以不论用那种程序都可以一下子就得出所求的解。

我们将按离差标准来比较这两种程序。给定对称及正定的方阵 A 后, 就可以找出一个三角型的方阵 B 满足 $B'B = A$ 。以 $n=3$ 为例, 就是可以找出 B 使

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

A 的正定性保证我们能从关于 $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, b_{33}$ 的六个联立方程解出所求的解^[5]。找出 B 后给定方程可以写作

$$Ax + b = B'Bx + b = B'B(x - \xi) = 0,$$

那么求 ξ 使 $A(x - \xi) = 0$ 的问题与求 ξ 使 $B(x - \xi) = 0$ 的问题是等价的。兹求 $B(x - \xi) = 0$ 的解。

$$\begin{aligned} \text{令} \quad & F = B(x - \xi), \\ \text{则} \quad & G = B'F = A(x - \xi) = f, \\ & H = BG \\ & K = B'H = Af = g, \end{aligned}$$

利用(2)即得在 x_0 点的斜量线 $x = x_0 + G\tau = x_0 + f_0\tau$ 上使残量 $|F|$ 为极小之点为

$$K_1 = x_0 - \frac{G_0 \cdot G_0}{H_0 \cdot H_0} G_0 = x_0 - \frac{f_0 \cdot f_0}{f_0 \cdot g_0} f_0, \quad (5)$$

注意这就是 Канторович 程序。

利用(3)即得在 x_0 点的斜量线上使离差为极小之点为

$$F_1 = x_0 - \frac{F_0 \cdot F_0}{G_0 \cdot G_0} G_0, \quad (6)$$

上述平面的方程可以寫成

$$x = x_0 + \mu_1 g_0 + \mu_2 n_0, \quad \text{其中 } n_0 \cdot g_0 = 0,$$

我們有

$$\begin{aligned} x - \xi &= (x_0 - \xi) + \mu_1 g_0 + \mu_2 n_0, \\ D &= (x - \xi) \cdot (x - \xi) = (x_0 - \xi) \cdot (x_0 - \xi) + \mu_1^2 (g_0 \cdot g_0) + \\ &\quad + \mu_2^2 (n_0 \cdot n_0) + 2\mu_1 (f_0 \cdot f_0) + 2\mu_2 [n_0 \cdot (x_0 - \xi)] = \\ &= (x_0 - \xi) \cdot (x_0 - \xi) + \left[\sqrt{g_0 \cdot g_0} \mu_1 + \frac{f_0 \cdot f_0}{\sqrt{g_0 \cdot g_0}} \right]^2 + \\ &\quad + \left[\sqrt{n_0 \cdot n_0} \mu_2 + \frac{n_0 \cdot (x_0 - \xi)}{\sqrt{n_0 \cdot n_0}} \right]^2 - \frac{(f_0 \cdot f_0)^2}{g_0 \cdot g_0} - \frac{[n_0 \cdot (x_0 - \xi)]^2}{n_0 \cdot n_0}, \end{aligned}$$

顯然使 D 最小就是使

$$\mu_1 = -\frac{f_0 \cdot f_0}{g_0 \cdot g_0}, \quad \mu_2 = -\frac{n_0 \cdot (x_0 - \xi)}{n_0 \cdot n_0},$$

因

$$n_0 = K_0 - \frac{h_0 \cdot h_0}{g_0 \cdot g_0} g_0,$$

故有

$$n_0 \cdot (x_0 - \xi) = g_0 \cdot g_0 - \frac{h_0 \cdot h_0}{g_0 \cdot g_0} f_0 \cdot f_0 = -\frac{|f_0 \cdot f_0, g_0 \cdot g_0|}{g_0 \cdot g_0}.$$

在这里我們用到引言內的定理而得

$$u = x_0 - \xi, \quad g_0 = A' A u, \quad w = A' A y_0 = K_0,$$

所以有

$$K_0 \cdot (x_0 - \xi) = g_0 \cdot g_0.$$

現在我們得到(8)的另一個形式

$$C_2^* = x_0 - \frac{f_0 \cdot f_0}{g_0 \cdot g_0} + \frac{|f_0 \cdot f_0, g_0 \cdot g_0|}{(g_0 \cdot g_0)(n_0 \cdot n_0)} n_0,$$

$$\text{其中 } n_0 = K_0 - \frac{h_0 \cdot h_0}{g_0 \cdot g_0} g_0 \text{ 是垂直於 } g_0 \text{ 的,} \quad (9)$$

从(9)可以看出如果 $C_1 \neq \xi$, 也就是說如果 f_0 不与 h_0 平行, 則

$$C_2^* = C_1 + \mu_2 n_0, \quad \mu_2 \neq 0.$$

惟

$$C_2 = C_1 - \frac{f_1 \cdot f_1}{g_1 \cdot g_1} g_1,$$

故有

$$C_2^* - C_2 = \mu_2 n_0 + \frac{f_1 \cdot f_1}{g_1 \cdot g_1} g_1,$$

$$g_0 \cdot (C_2^* - C_2) = \frac{f_1 \cdot f_1}{g_1 \cdot g_1} (g_1 \cdot g_0) = -\frac{(f_1 \cdot f_1)}{(g_1 \cdot g_1)(g_0 \cdot g_0)} |f_0 \cdot f_0, g_0 \cdot g_0|,$$

顯然 $g_0 \cdot (C_2^* - C_2) \neq 0$, 所以 $C_2^* \neq C_2$, 已証完。

事實上我們也已証明如果 $C_1 \neq \xi$, 那么 $C_2 \neq \xi$, 因为如果 $C_2 = \xi$, 那么 $C_2^* = \xi = C_2$ 就与剛在已証的結果矛盾, 所以如果 $C_1 \neq \xi$, 任何 C_n 也不是所求的解 ξ 。這就是說如果用(3)一次不得达到解, 那么用(3)任何多次也不能真正达到所求的解。

II. 程序(2)的改進

从公式(2)

$$M_1 = x_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} g_0,$$

可得

$$M_2 = M_1 - \frac{g_1 \cdot g_1}{h_1 \cdot h_1} g_1,$$

其中

$$g_1 = g_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} k_0,$$

$$h_1 = h_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} l_0.$$

所以 x_0 , M_1 及 M_2 三点所定出的平面仍是 x_0 点及 g_0 , k_0 两个方向所定出的平面

$$x = x_0 + \tau_1 g_0 + \tau_2 k_0,$$

由此可得

$$f = f_0 + \tau_1 h_0 + \tau_2 l_0,$$

$$E = f \cdot f = (f_0 \cdot f_0) + \tau_1^2 (h_0 \cdot h_0) + \tau_2^2 (l_0 \cdot l_0) + 2\tau_1 (g_0 \cdot g_0) + 2\tau_2 (h_0 \cdot h_0) + 2\tau_1 \tau_2 (k_0 \cdot k_0),$$

定 τ_1 及 τ_2 使 E 为極小的条件是

$$\begin{cases} (g_0 \cdot g_0) + (h_0 \cdot h_0) \tau_1 + (k_0 \cdot k_0) \tau_2 = 0, \\ (h_0 \cdot h_0) + (k_0 \cdot k_0) \tau_1 + (l_0 \cdot l_0) \tau_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

定出的最好的点是

$$M_2^* = x_0 + \tau_1 g_0 + \tau_2 k_0, \text{ 其中 } \tau_1 \text{ 及 } \tau_2 \text{ 满足(10),}$$

注意求出 M_2^* 僅需作大致 $5n^2$ 个乘法, 用(2)兩次求出 M_2 反而需要 $6n^2$ 个乘法, 所以用改進后公式 M_2^* 可以節省一些計算工作量, 茲証如果 $M_1 \neq \xi$, 則 $M_2^* \neq M_2$, 用 M_2^* 的确比 M_2 好些。

今有

$$M_2^* = x_0 + \tau_1 g_0 + \tau_2 k_0, \text{ 其中 } \tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_0 \cdot k_0 & g_0 \cdot g_0 \\ l_0 \cdot l_0 & h_0 \cdot h_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_0 \cdot h_0 & k_0 \cdot k_0 \\ k_0 \cdot k_0 & l_0 \cdot l_0 \end{vmatrix}},$$

$$M_2 = x_0 + \lambda_1 g_0 + \lambda_2 k_0, \text{ 其中 } \lambda_1 = - \left[\frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} + \frac{g_1 \cdot g_1}{h_1 \cdot h_1} \right],$$

故有

$$M_2^* - M_2 = (\tau_1 - \lambda_1) g_0 + (\tau_2 - \lambda_2) k_0,$$

因

$$g_1 = g_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} k_0,$$

而

$$g_1 \cdot g_0 = g_0 \cdot g_0 - \frac{g_0 \cdot g_0}{h_0 \cdot h_0} h_0 \cdot h_0 = 0, \text{ 已設 } M_1 \neq \xi, \text{ 故 } g_1 \neq 0,$$

所以 g_1 与 g_0 恆互相垂直, g_1 是 g_0 及 k_0 的線性組合, 所以 g_0 与 k_0 不可能平行, 否則 g_1 也將与 g_0 平行。因此如果 $M_2^* = M_2$, 則必有 $\tau_1 - \lambda_1 = 0$, 不难算出

$$-\lambda_2 = \frac{(g_0 \cdot g_0)^2}{(h_0 \cdot h_0)^2} \left| \frac{g_0 \cdot g_0, k_0 \cdot k_0}{h_0 \cdot h_0, l_0 \cdot l_0} \right| \frac{1}{(h_0 \cdot h_0)(h_1 \cdot h_1)},$$

因此 $\tau_1 - \lambda_1 = 0$ 就是

$$\frac{(h_0 \cdot h_0)^2 (h_1 \cdot h_1)}{(g_0 \cdot g_0)^2} = \left| \frac{h_0 \cdot h_0, k_0 \cdot k_0}{k_0 \cdot k_0, l_0 \cdot l_0} \right|,$$

角为 θ , x^* 矢量与 φ 矢量間的角为 θ^* , 則有

$$\cos^2 \theta = \frac{(x \cdot \varphi)^2}{x \cdot x}, \quad \cos^2 \theta^* = \frac{(x^* \cdot \varphi)^2}{x^* \cdot x^*},$$

要求 x^* 的方向更近於 φ 的方向就是要求下列不等式成立,

$$\frac{(x^* \cdot \varphi)^2}{x^* \cdot x^*} > \frac{(x \cdot \varphi)^2}{x \cdot x}, \quad (17)$$

我們有

$$x^* \cdot \varphi = (x \cdot \varphi) \left[1 - \frac{(g \cdot x)(g \cdot \varphi)}{2(g \cdot g)(x \cdot \varphi)} \right],$$

$$x^* \cdot x^* = (x \cdot x) \left[1 - \frac{3}{4} \frac{(g \cdot x)^2}{(g \cdot g)(x \cdot x)} \right],$$

代入(17)簡化即得

$$3 \frac{(x \cdot \varphi)^2}{x \cdot x} + \frac{(g \cdot \varphi)^2}{g \cdot g} - 4 \frac{(g \cdot \varphi)(\varphi \cdot x)}{g \cdot x} > 0, \quad (18)$$

为了找出不等式(18)規定的 x 与 φ 間的关系, 把 g 寫成固有矢量的線性組合

$$g = \sum_{i=1}^n G_i \varphi_i,$$

則有

$$G_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 \varepsilon_i \lambda_i^2 - 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 \lambda_j \varepsilon_i \lambda_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \varepsilon_j^2 \varepsilon_i = \varepsilon_i \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

$$g \cdot x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k G_k = \varepsilon_i G_i + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \sum_{j \neq k} \varepsilon_j^2 (\lambda_k - \lambda_j)^2,$$

取出 $j=i$ 一項

$$\varepsilon_i^2 \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 (\lambda_i - \lambda_k)^2 = \varepsilon_i G_i,$$

即得

$$g \cdot x = 2\varepsilon_i G_i + \alpha_i,$$

其中

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j \neq k} \varepsilon_k^2 \varepsilon_j^2 (\lambda_k - \lambda_j)^2 \geq 0.$$

因此我們有(設 $\varphi = \varphi_i$)

$$\frac{(g \cdot \varphi)(\varphi \cdot x)}{g \cdot x} = \frac{\varepsilon_i G_i}{2\varepsilon_i G_i + \alpha_i} \leq \frac{1}{2},$$

只要 x 与 φ 滿足

$$3 \frac{(x \cdot \varphi)^2}{x \cdot x} > 2, \quad (19)$$

就可以滿足(18), 条件(19)可以寫成

$$3\varepsilon_i^2 > 2[\varepsilon_i^2 + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2],$$

即

$$\varepsilon_i^2 > 2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2. \quad (20)$$

当 $n=3$ 时, 就要求 x 在以 φ_i 为軸(选作 x_i 軸)的圓錐面 $x_i^2 = 2 \sum_{j=1}^n x_j^2$ 之內, 設从軸到元素的角度为 θ_0 , 則 $\cos \theta_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82$, $\theta_0 = 35^\circ$, 当 $n=2$ 时, 滿足(18)就是滿足

$$3 \frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2} + \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2} - 2 > 0, \quad i \neq j$$

即

$$\varepsilon_i^2 - \varepsilon_j^2 > 0,$$

也就是說只要 x 比較接近於 φ_i 軸, 則 x^* 就一定更接近於 φ_i 軸, 由此可見如果 x 是 φ_i 方向的一个比較好的近似矢量, 那么 x^* 就是一个更好的近似矢量。

六 例 題

茲求

$$\begin{bmatrix} 4, & 2 \\ 2, & 5 \end{bmatrix}$$

的固有矢量, 固有值 λ 滿足的方程是

$$\lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0,$$

其根为

$$\lambda_1 = 4.5 + \sqrt{4.25}, \quad \lambda_2 = 4.5 - \sqrt{4.25},$$

$$\sqrt{4.25} = 2.061552812,$$

所以

$$\lambda_1 = 6.561552812,$$

两个互相垂直的固有矢量是

$$\phi_1 = (0.780776406, 1),$$

$$\phi_2 = (1, -0.780776406).$$

我們从 $x = (1, 1)$ 出發用上節的斜量法接近一个固有矢量。

今有

$$x = (1, 1), \quad x \cdot x = 2,$$

$$x' = (6, 7), \quad x \cdot x' = 13, \quad x' \cdot x' = 85,$$

$$x'' = (38, 47);$$

$$g = 2(38, 47) - 26(6, 7) + 85(1, 1) = (5, -3),$$

$$g \cdot x = 2, \quad g \cdot g = 34;$$

$$x^* = x - \frac{(g \cdot x)g}{2g \cdot g} = (1, 1) - \frac{1}{34}(5, -3) = \left(\frac{29}{34}, \frac{37}{34}\right),$$

$$x^* = \mu(0.783783, 1)。$$

注意这是 ϕ_1 的一个近似矢量, 僅有兩位有效数字, 因 $(29, 37)$ 大致与 $(47, 60)$ 平行, 我們再从 $(47, 60)$ 出發, 我們有

$$x = (47, 60), \quad x \cdot x = 5,809,$$

$$x' = (308, 394), \quad x \cdot x' = 38,116,$$

$$x'' = (2,020, 2586), \quad x' \cdot x' = 250,100;$$

$$g = (9,424, -7,334),$$

$$g \cdot x = 2,888,$$

$$g \cdot g = 142,599,332;$$

$$x^{**} = (47, 60) - \frac{1444(9424, -7334)}{142,599,332} = (46.904569988, 60.0742661) =$$

$$= \tau(0.78077641, 1),$$

与 ϕ_1 比較可知 x^{**} 已有八位有效数字, 而用疊代法八次所得的近似矢量是

$$x^{(8)} = (2968198, 3801247) = 6(0.78084849, 1),$$

它僅有四位有效数字。

如果我們从 $(1, -1)$ 出發,用斜量法則得

$$x'' = (1, -1) - \frac{(-3, -5)}{34} = \left(\frac{37}{34}, -\frac{29}{34}\right),$$

这是 φ_2 的一个近似矢量。当然用疊代法不能直接从 $(1, -1)$ 得出 φ_2 的近似矢量。

参 考 文 献

1. Milne, W. E.: Numerical Solution of Differential Equations, 1953, Chapter 9.
2. 趙訪熊:解联立方程的斜量法,数学学报 3:4 (1953) 328—342.
3. Канторович, Л. В.: 汎濫分析与应用数学,数学進展 1:4 (1955) 638—747.
4. 趙訪熊:解联立方程的差分方程法,数学学报 5:2 (1955) 149—159.
5. Гельфанд: 一次代数学,商务, 1953, 定理見 193 頁。

重力壩彈性應力分析問題

一 引言

重力壩是重要水工結構的一種，本文將以彈性力學平面問題的观点來處理應力分析方法上的一些問題，由於平面問題的性質這種方法將只適用於較長的壩體，或者在較短的壩體中作為中間面計算的近似。

重力壩作為平面彈性問題已有五十年左右的發展，問題的性質極為明顯，這是一個邊界形狀和邊界條件複雜的平面問題（包括溫度應力）。而壩內厂房或觀察通道的設置更引起了復連通的性質。實踐要求重力壩的應力分析應該包括由於地震引起的振動應力，由於問題的複雜性目前處理重力壩的應力分析多半依靠實驗，但是由於計算設備的改進，近十年來蘇聯和英美近似計算工作也得到進展。

本文討論的範圍將以平面彈性靜力問題為限，提出差分 and 變分近似解，並利用光彈性和電比拟作為實驗驗證，關於壩體的穩定及滲流影響等均不涉及。

本文是我們關於重力壩彈性應力分析的一系列工作中的第一部分，文中在這問題上提出了一些新方法的应用，包括：有孔壩的近似計算，變分法在這一問題上的应用，考慮二種介質的可能，和由於邊界條件的處理可能性而將雙諧問題化為簡諧問題，在實驗技術上我們应用了光彈性和電場比拟配合应用下面平面問題尚可靠的結果。

二 歷史簡介

在這一世紀以前重力壩的應力始終停留在运用樑的簡單理論的階段，亦即重力壩作為懸臂樑的情況來分析的。到二十世紀的开始由於水力利用的要求和彈性力學上取得的進展^{[1], [2]}。重力壩开始作為平面彈性問題來尋求應力分析的方法。1907—8年 J. S. 威尔遜和 W. 高尔^[3]首先用橡皮模型進行實驗，特別是他們提出了在外加載荷以代替自重引起的應力分析（參看圖 1）。1909年 L. F. 李查遜^[4]提出重力壩應力分析的差分数解法，李氏首先运用聖維南原理將重力壩化為有限區域的問題並且提出了差分的數解法（參看圖 2）。李氏的概念是後來^[13]一些工作的基礎，由於 M. 李維^[2]的工作 K. 胡尔夫^[5]在 1914 年提出了三角壩的解法。在 1933 年蘇聯 E. T. 伽僚金^[6]提出了三角形及梯形壩的應力分析的詳盡分析，顯然當時這一方面的工作是和蘇聯第一個五年計劃中水電站和水利建設的推動分不開的。應該指出從李維開始到伽僚金的工作都是滿足三角形壩體表面的邊界條件為限的，也就是基礎的彈性作用未能合理計入，也

3. 变分法在重力壩应力分析中的应用。

其中 1, 2, 3 項的具体計算及討論將另文發表。

		标 号	
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	正应力及剪应力	$\bar{R}_x, \bar{R}_y$	內边界(壩孔)作用力的合力
X, Y	体積力	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	体積擴張
φ	应力函数	ρ	單位面積壩質量/單位長度
V	体積力势函数	$\bar{R}_{yp} = \rho g A_0$	壩孔所移去的重量/單位長度
u, v	x, y 方向位移	g	重力加速度
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	正应变及剪应变	F	迭弛法殘留量
$\nu^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$		p, q, p_1	簡諧函数
$\bar{X}, \bar{Y}$	边界力	附标	'壩身
λ, G, μ	彈性常数		"壩基
$\cos(n, x) \cos(n, y)$	方向余弦	W, M, S	壩身自重, 橫向水压向自重作用線与壩基交点簡化之力矩, 垂直力, 水平力
u_d, v_d, ω_d	位差		
$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$	旋量		

三 理論分析

重力壩的应力分析在壩体較長, 或僅考慮作为中間面的近似計算时可以作为二維之小彈性变形平面应变問題。亦即 u 及 v 为 x 及 y 之函数, 而 w 为零, 此时單元微体平衡条件導致:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

滿足平衡条件的应力状态可以通过应力函数 φ 及体積力势函数 V 表达

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + V, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

平面应变的物理条件为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2G} [(1-\mu)\sigma_x - \mu\sigma_y], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2G} [(1-\mu)\sigma_y - \mu\sigma_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

变形一致要求

在上式中用(2)式引入 φ , 及 $V = -\rho g y$ 运用方向導数, 沿内边界积分然后部份积分, 及运用格林定理則得

$$\iint y \nabla^4 \varphi dx dy = -\frac{1}{1-\mu} (\bar{R}_y + \rho g A_c), \quad (9)$$

同理, $v_d = 0$ 得

$$\iint x \nabla^4 \varphi dx dy = -\frac{\bar{R}_x}{1-\mu}, \quad (10)$$

而 $\omega_d = 0$ 得

$$\iint \nabla^4 \varphi dx dy = 0, \quad (11)$$

(9)式及(10)式中之 $\bar{R}_x, \bar{R}_y$ 为内边界上边界力之合力之 x, y 方向分量。 ρ 为單位長壩体單位截面的重量, A_c 为孔之面積。

在这种复連区域中应力函数

$$\varphi = \varphi_0 + Ax + By + C,$$

φ_0 为滿足内外边界条件之双調函数, 在單連区域中(实心壩)可以令 A, B, C 三常数为零在复連区域有一孔时应由(9), (10), (11)三个方程式中解出 A, B 及 C 。

應該指出要消除位差而引起決定常数 a, b, c 的問題在应用位移方法时同样存在。因为内边界(孔)的剛体位移將照样改变应力狀況。於是在内边界上消除这种剛体位移必須使

$$u = u_0 + a - cy, \quad v = v_0 + b + cx$$

滿足下列三个条件。其中 u_0, v_0 为滿足内外边界条件的位移函数。其余項次代表剛体位移, 这三个条件是根据消除这种剛体約束滿足平衡沿内边界积分用相似於上述的处理得出

$$\iint \left[(1-2\mu) \nabla^2 u + \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right] dx dy = -\frac{1-2\mu}{G} \bar{R}_x, \quad (12)$$

$$\iint \left[(1-2\mu) \nabla^2 v + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right] dx dy = -\frac{1-2\mu}{G} (\bar{R}_y + \rho g A_c), \quad (13)$$

$$\iint \left[x \left(\overline{1-2\mu} \nabla^2 v + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) - y \left(\overline{1-2\mu} \nabla^2 u + \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \right] dx dy = -\frac{1-2\mu}{G} (\bar{M}_x + \rho g X_c A_c). \quad (14)$$

式中 $\bar{R}_x, \bar{R}_y$ 为内边界力的合力的 x, y 方向分量, $\bar{M}_x$ 为此力对坐标原点之力矩, X_c 为孔面積所含之面心, 选择此面心为原点則 X_c 为零, ρ 及 A_c 同前。 a, b 及 c 可由(12), (13)及(14)諸式決定。

上述复連区域性質的基本觀念在 J. H. 密息尔^[1] 及 L. N. G. 法龍^[17] 工作俱有說明, 多孔区域的处理方法是可以类推的。由此可見在解決有孔的問題中应用应力函数和位移函数都有決定每孔三个常数的問題。在解決的方式上处於相同境地。所以以下將只就应力函数來解決这一問題。

根据 M. A. 皮奧特^[9] 的工作, 壩体的自重可以化为边界力水压力, 这样孔内將出現一个分佈的水压力, 也就是 $\bar{R}_{y0} = \rho g A_c$, 这时控制 A, B 及 C 常数的条件將为

$$\iint y \nabla^4 \varphi dx dy = -\frac{\bar{R}_{y0}}{1-\mu}, \quad (15)$$

● 其实 C. Г. Гутман 在 1934 年就提了这一見解。

$$\iint x \nabla^4 \varphi dx dy = 0, \quad (16)$$

$$\iint \nabla^4 \varphi dx dy = 0. \quad (17)$$

在解空心壩的問題中，內邊界上的 φ 值將依靠沿內邊界積分而獲得， $\bar{R}_{yp}$ 的存在雖然不在

(15) 式引起複雜，但每積分一圈一週多出一常數，而且與坐標原點選擇有關，因此可以採用下列方法移去此內邊界不平衡的力。令

$$\sigma_x = \sigma'_x - \sigma''_x, \quad (18)$$

$$\sigma_y = \sigma'_y - \sigma''_y, \quad (19)$$

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy} - \tau''_{xy}, \quad (20)$$

σ'_x, σ'_y 及 τ'_{xy} 系根據邊界上作用有三種力的無自重壩算出(參看圖 4):

(1) 水壓力。

(2) 自由重轉化出之水壓力。

(3) 為了平衡內邊界附加力 $-\bar{R}_{yp} = -\rho g A_e$ 所引起的內外邊界力。此力可以根據無限體中一集中力的解^[19]

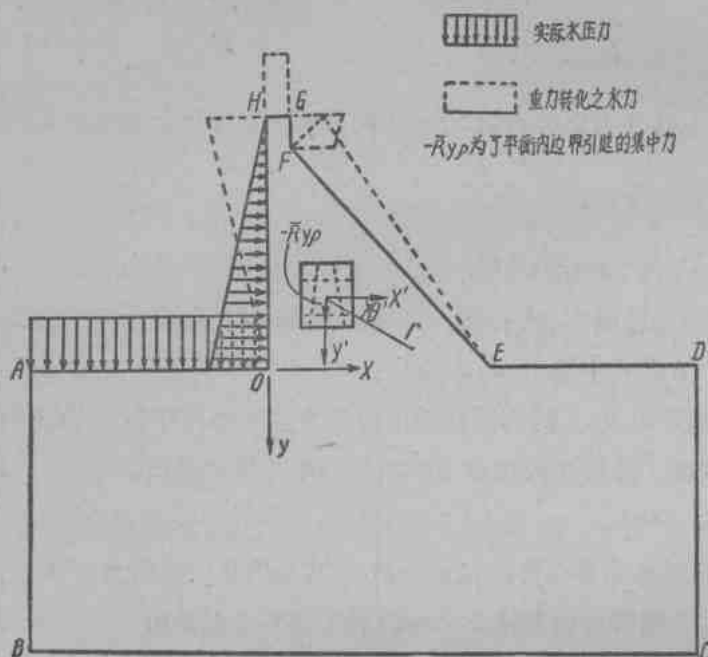


圖 4. 計算空心壩方法示意。

$$\sigma''_x = \frac{\bar{R}_{yp}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} [-(3+\mu) + 2(1+\mu)\cos^2 \theta], \quad (21)$$

$$\sigma''_y = \frac{\bar{R}_{yp}}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} [1-\mu - 2(1+\mu)\cos^2 \theta], \quad (22)$$

$$\tau''_{xy} = \frac{\bar{R}_{yp}}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} [1-\mu + 2(1+\mu)\sin^2 \theta] \quad (23)$$

而算出內外邊界上之應力值然後以此作為邊界力。

由於內邊界既然平衡計算 σ'_x, σ'_y 及 τ'_{xy} 時內邊界常數 A, B, C 將由

$$\iint y \nabla^4 \varphi dx dy = 0, \quad (24)$$

$$\iint x \nabla^4 \varphi dx dy = 0, \quad (25)$$

$$\iint \nabla^4 \varphi dx dy = 0 \quad (26)$$

三式決定。

在壩體運算中此時可以應用 L. F. 李查遜的邊界處理並用迭弛法^[20]求解。而迭弛的決定內邊界常數 A, B 及 C 之條件將為