

高 等 学 校 教 材

数值分析的 泛函方法

雷晋干 陈铭俊 匡蛟勋 沈祖和 编

高等教育出版社

数值分析

数值分析的泛函方法

高等学校教材

数值分析的泛函方法

雷晋干 陈铭俊 编
匡蛟勋 沈祖和

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数值分析的泛函方法/雷晋干等编. -北京:高等教育出版社, 1996

ISBN 7-04-005585-6

I.数… II.雷… III.泛函分析-计算方法 IV.0241

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第02306号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京市顺新印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.375 字数 340 000

1996年12月第1版 1996年12月第1次印刷

印数 0 001—758

定价:12.00元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

版权所有,不得翻印

内 容 提 要

本书是根据国家教育委员会数学力学教学指导委员会计算数学组制订的八五教材规划编写的一本计算数学硕士研究生教材,本书集中介绍了数值分析中最常用的泛函分析内容和方法。

全书共分八章,第一、二、三、四章分别是 Sobolev 空间、拓扑度和 Banach 空间中的微分学;第五、六、七、八章结合数值分析中的应用,分别介绍了迭代法、变分原理、投影法及逼近论。书中各章都配有精心设计的习题。

本书对应用数学的研究生以及相关专业的科技人员也很有参考价值。

前 言

自从 1948 年 Kantorovich 发表了他的论著“泛函分析与应用数学”一文以来,泛函分析作为研究数值数学的一门工具已为广大的数值分析工作者所接受,它的高度概括性,不仅能使所描述的问题得以简化和统一,甚至可能产生新的方法.将 Newton 迭代法解一元函数方程推广到解 n 维空间的多元函数方程组乃至函数空间的算子方程便是一个熟知的例子.又如解偏微分方程的有限元方法,由于使用了 Sobolev 空间的知识,使得研究问题更加一般、更加深刻.此外,近似解的收敛性、误差估计以及近似解的存在性论证都与泛函分析有着密切关系,这些都说明泛函分析已成为研究数值数学的重要手段.但是,在研究数值分析中的不同问题时往往需要花费大量时间和精力在浩瀚的文献中去寻找自己所需要的泛函分析内容.所以编写一本比较集中地介绍与数值分析有关的泛函分析及泛函方法的书是有必要的.国外在 80 年代初出现的一些“数值泛函分析”著作大概也是出于这种原因.在国内有关泛函分析的书籍也出版了不少,但专门为数值分析而编写的泛函分析书籍尚很少见.这就启示我们来编写这样一本书,集中介绍数值分析中最常用的泛函分析内容和方法.基于此,我们并不强调泛函分析本身的完整性和严谨性,而着重于在数值分析中应用的可能性,这一想法得到国家教育委员会理科教学指导委员会计算数学教材组的支持,并建议列入教材出版计划.我们四人多次会议、商讨,并分工负责进行了这项工作.

本书分为八章.第一章是泛函分析基础知识,扼要地介绍了泛函分析中常用的知识;第二、三、四章分别是 Sobolev 空间、拓扑度和 Banach 空间中的微分学,均属于本书的基础部分;第五、六、七、八章结合数值分析中的应用,分别介绍了迭代法、变分原理、投影

DAA28/08

解法及逼近论. 其中第一章由匡蛟勋编写, 第二、三、八章由陈铭俊编写, 第四、六、七章由雷晋干编写, 第五章由沈祖和负责编写. 中山大学陈仲英为二、三、八章, 上海师范大学项家祥为第一章的编写作了大量的工作. 在编写过程中, 我们注意使各章之间既有联系也有一定的相对独立性. 读者可选择自己感兴趣的章节细读. 我们也尽量注意内容的普遍性. 因此, 本书除可供计算数学硕士研究生阅读外, 对应用数学的研究生以及相关专业的科技人员也很有参考价值.

理科计算数学教材组对本书的编写一直十分关心和支持, 兰州大学的朱正佑教授详细审阅了本书的书稿, 并提出了不少很有价值的修改意见, 对此我们表示衷心的感谢.

必需指出, 泛函分析的内容实在太丰富了. 如何选择与数值分析有关的内容一直是本书编写中最感困难的问题, 几经取舍才形成本书的内容, 是否合适还有待时间的检验. 又由于编者的水平有限, 错误和遗漏在所难免, 敬请读者批评指正.

编 者

1995年7月于上海

目 录

第一章 泛函分析基础

§ 1 拓扑空间	(1)
1·1 拓扑空间	(1)
1·2 闭集、邻域、聚点、闭包	(2)
1·3 邻域基	(2)
1·4 Hausdorff 空间、序列的收敛性、映射的连续性	(3)
1·5 度量空间	(3)
1·6 完备性	(4)
1·7 列紧性	(6)
1·8 线性拓扑空间	(7)
1·9 半范数 局部凸线性拓扑空间	(8)
1·10 空间 $C^m(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$ 的拓扑化	(9)
1·11 赋范空间及其完备化	(11)
1·12 内积空间及其完备化	(12)
§ 2 开映射定理	(15)
2·1 Banach 空间的 Baire 性质	(15)
2·2 线性算子	(15)
2·3 开映射定理	(17)
2·4 逆算子定理	(19)
2·5 闭图形定理	(20)
2·6 线性算子的强扩张	(20)
§ 3 共鸣定理	(23)

3·1	共鸣定理	(23)
3·2	共鸣定理的两个推论	(24)
3·3	Banach-Sake 定理	(26)
§ 4	Riesz 表现定理	(27)
4·1	正交投影定理	(27)
4·2	Riesz 表现定理	(28)
4·3	Hilbert 空间的共轭空间	(30)
4·4	Lax-Milgram 定理	(31)
§ 5	Hahn-Banach 延拓定理	(33)
5·1	连续函数的延拓	(33)
5·2	Zorn 引理	(34)
5·3	线性空间中的 Hahn-Banach 延拓定理	(35)
5·4	线性赋范空间中的 Hahn-Banach 延拓定理	(37)
5·5	Hahn-Banach 延拓定理的推论, 共轭空间	(38)
5·6	Hahn-Banach 延拓定理的几何形式、 凸集分离定理	(40)
§ 6	弱收敛和弱*收敛	(43)
6·1	弱收敛	(43)
6·2	弱*收敛	(45)
6·3	弱*列紧	(46)
§ 7	线性算子的共轭算子和弱扩张	(47)
7·1	有界线性算子的共轭算子	(47)
7·2	一般线性算子的共轭算子	(48)
7·3	线性算子的(弱)闭扩张	(49)
7·4	微分算子的弱扩张	(50)
§ 8	算子方程	(50)
8·1	线性算子的豫解集和谱	(50)
8·2	有界线性算子方程	(52)
8·3	紧线性算子	(53)

8·4	紧线性算子的例——Fredholm 型积分算子	(56)
8·5	紧线性算子方程 Riesz-Schauder 理论	(59)
	习题	(67)

第二章 索伯列夫空间

§1	空间 $L^p(\Omega)$	(71)
1·1	空间 $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 的定义及其基本特性	(71)
1·2	空间 $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 的子集为列紧的条件	(72)
§2	磨光算子 均值逼近	(73)
2·1	磨光算子的定义	(73)
2·2	对 $L^p(\Omega)$ 中函数的均值逼近	(74)
2·3	变分法基本引理	(77)
2·4	对空间 $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 中函数的均值逼近	(77)
2·5	单位分解定理	(79)
§3	广义微商	(80)
3·1	弱广义微商	(81)
3·2	强广义微商 逐项求微商	(83)
3·3	广义微商对函数的局部依赖性	(87)
3·4	广义微商的运算法则	(88)
§4	索伯列夫空间	(89)
4·1	索伯列夫空间的定义及其基本性质	(89)
4·2	$C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 的稠密性	(91)
4·3	坐标变换	(93)
4·4	L -型域 锥性质	(95)

4·5	中间微商的插值不等式	
	$C_0^\infty(R^N)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 的稠密性	(98)
4·6	$W^{m,p}(\Omega)$ 中函数的边界值	(107)
§ 5	嵌入定理	(111)
5·1	嵌入的概念	(111)
5·2	$C_B^r(\Omega)$ 上的索伯列夫积分恒等式	(111)
5·3	位势型积分算子	(116)
5·4	$W^{m,p}(\Omega)$ 中的索伯列夫积分恒等式	(121)
5·5	嵌入定理	(123)
5·6	等价范数定理	(127)
§ 6	非整数次的索伯列夫空间	(129)
6·1	速降广义函数	(129)
6·2	Fourier 变换	(132)
6·3	非整数次空间 $H^s(R^N)$	(134)
6·4	非整数次空间 $H^s(\Omega)$	(137)
6·5	非整数次空间 $H_0^{-s}(\Omega)$ ($s > 0$)	(138)
6·6	迹空间	(139)
习题		(142)

第三章 拓扑度与不动点原理

§ 1	欧氏空间中连续映射的拓扑度	(143)
1·1	正规映射的拓扑度	(143)
1·2	连续映射的拓扑度及其性质	(151)
§ 2	Banach 空间中全连续场的拓扑度	(158)
§ 3	A-proper 映射的广义拓扑度	(162)
§ 4	不动点原理	(164)
4·1	Brouwer 不动点定理与开集不变性定理	
		(164)
4·2	Schauder 不动点定理和 Красносельский	

不动点定理	(165)
4·3 Leray-Schauder 不动点原理	(167)
4·4 边界条件与不动点定理	(168)
§5. 不动点算子方程的近似可解性	(169)
习题	(171)

第四章 Banach 空间的微分学

§1 向量值函数的微积分	(174)
1·1 向量值函数的导数和 Riemann 积分	(174)
1·2 向量值函数的 Bochner 积分	(177)
§2 Gateaux 微分	(180)
§3 Frechet 微分	(183)
3·1 Frechet 微分的定义及性质	(183)
3·2 Frechet 微分与 Gateaux 微分的关系	(187)
§4 高阶微分	(188)
§5 中值公式 Taylor 公式	(191)
5·1 中值公式	(191)
5·2 Taylor 公式	(194)
§6 梯度算子的判别条件	(195)
§7 隐函数定理	(199)
7·1 偏导数的概念	(199)
7·2 隐函数定理	(200)
7·3 推广的隐函数定理	(204)
§8 分歧方程	(206)
习题	(209)

第五章 迭代法

§1 简单的迭代法	(213)
1·1 压缩映射	(213)

1·2	非膨胀算子	(218)
1·3	加速迭代, 切比晓夫迭代	(219)
§ 2	解非齐次方程的迭代法	(222)
2·1	迭代法的一般形式	(222)
2·2	差分程序与松弛法的变体	(227)
§ 3	迭代程序的建立	(229)
3·1	Newton 方法	(229)
3·2	Newton 程序的收敛性定理	(230)
3·3	Newton 方法的变形, 简化的 Newton 方法	(236)
3·4	Newton 方法的应用	(240)
3·5	梯度法(最速下降法)	(247)
§ 4	连续法	(252)
4·1	连续法	(252)
4·2	延拓理论	(253)
4·3	数值连续法	(259)
4·4	Davidenko 方法	(263)
习题		(265)

第六章 变分原理

§ 1	泛函的无约束极值	(266)
1·1	极值存在的必要条件	(266)
1·2	弱下半连续条件与极值存在性	(267)
1·3	位势型算子方程的可解性	(271)
1·4	PS 条件与爬山引理	(278)
1·5	极值问题的有限维近似	(284)
§ 2	泛函的约束极值	(287)
2·1	Lagrange 乘子	(288)
2·2	非线性本征值问题	(290)

2·3	本征值问题的 Galerkin 近似	(296)
2·4	Kuhn-Tucker 定理与对偶原理	(297)
§ 3	凸集上的泛函极值	(302)
3·1	凸集上可微泛函的极值	(302)
3·2	凸集上非光滑泛函的极值	(305)
3·3	Ritz 方法	(308)
§ 4	极值解的迭代法	(310)
4·1	下降法的一般原理	(310)
4·2	迭代投影法	(311)
4·3	罚函数方法	(313)
	习题	(316)

第七章 算子方程的投影解法

§ 1	投影解法的概述	(318)
§ 2	第二型 Fredholm 方程的投影解	(326)
2·1	第二型方程的投影近似可解性	(326)
2·2	应用举例——Fredholm 积分方程的投影 近似解	(328)
§ 3	线性算子方程的投影解	(330)
3·1	有界线性算子方程的投影解	(330)
3·2	稠定线性算子方程的广义解及其 投影近似	(334)
3·3	具列紧扰动的线性算子方程的 广义解及其投影近似	(338)
3·4	二阶椭圆型方程的 Dirichlet 问题的 广义解及其投影逼近	(340)
3·5	计算过程的稳定性	(343)
3·6	本征值问题的投影近似	(345)
§ 4	非线性算子方程的投影解	(346)

4·1	单调算子	(346)
4·2	单调算子方程的投影近似可解性	(349)
4·3	具列紧扰动的单调算子方程	(353)
4·4	应用举例——非线性椭圆方程的边值问题	(355)
	习题	(358)

第八章 逼近论

§1	最佳逼近	(360)
1·1	最佳逼近问题的一般提法	(360)
1·2	线性赋范空间中最佳逼近元的存在性 与唯一性	(362)
1·3	线性赋范空间中最佳逼近元的特征	(365)
§2	插值逼近	(371)
2·1	插值逼近问题的一般提法	(371)
2·2	多项式插值的例子	(372)
2·3	一般的插值逼近的误差估计	(381)
§3	样条逼近	(386)
3·1	插值样条的抽象提法	(386)
3·2	插值样条的特征,唯一性和存在性	(389)
3·3	插值样条的构造	(391)
3·4	插值样条的收敛性	(398)
3·5	平滑样条	(402)
	习题	(408)

参考文献	(411)
------	-------

第一章 泛函分析基础

在这一章,我们简述拓扑空间、Banach 空间、线性算子等概念及有关的性质和结论,所有这些构成了泛函分析理论的基础.我们将不一一给出所列出定理的证明.读者可以从经典的泛函分析教程中找到.

§1 拓扑空间

1.1 拓扑空间

n 维实空间 $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j (j = 1, 2, \dots, n) \text{ 是实数}\}$ 是拓扑空间的简单原型. 在 R^n 内一子集 $G \subset R^n$ 称为开集, 如果对每一点 $x \in G$, 恒有以 x 为心, 某一正数 ε 为半径的开球 $B(x, \varepsilon) = \{y \in R^n; |y - x| < \varepsilon\}$ 含于 G 内, 此处 $|\cdot|$ 表示欧氏模. 开集有如下熟知的性质:

- (1) 空集 \emptyset 和 R^n 是开集,
- (2) 任意多个(有限或无限)开集之并仍为开集,
- (3) 任意有限个开集之交仍为开集.

基于这一事实的抽象化, 有下述定义:

定义 1.1 设 X 是一个集合, τ 是 X 的一个子集系(即 X 的某些子集组成的集合). 如果 τ 满足如下三条公理:

- (a) 空集 \emptyset 和 X 属于 τ ,
- (b) 设 A 是一个标集, 如果 $\forall \alpha \in A, G_\alpha \in \tau$, 则 $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$,
- (c) 如果 $G_1, G_2 \in \tau$, 则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$,

则称 τ 是 X 上的一个拓扑, 其中的元素称为开集, X 连同 τ , 即 $\{X, \tau\}$ 称为拓扑空间, 有时简称 X 是一拓扑空间.

定义 1.2 设 M 是拓扑空间 X 的一子集, G 是 X 的任意开集, 把 M 的形如 $M \cap G$ 的子集叫做 M 的开集, 则 M 成为一拓扑空间, 称为 X 的拓扑子空间. M 的这种诱导拓扑称为子集 M 的相对拓扑.

定义 1.3 设 $\{X_1, \tau_1\}$ 和 $\{X_2, \tau_2\}$ 都是拓扑空间. 作笛卡尔乘积 $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2): x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, 在其中引进拓扑 $\tau = \{G_1 \times G_2; G_1 \in \tau_1, G_2 \in \tau_2\}$, 则 $\{X_1 \times X_2, \tau\}$ 是一拓扑空间, 叫做 X_1 与 X_2 的乘积空间.

1.2 闭集、邻域、聚点、闭包

熟知在 R^n 内一子集 $F \subset R^n$ 称为闭集, 如果其导集 $F' \subset F$, 导集 F' 即是 F 的一切聚点组成的集合. $F \subset R^n$ 为闭集当且仅当其余集 $R^n \setminus F$ 是开集. 同样在拓扑空间中也有:

定义 1.4 拓扑空间 X 的子集 F 称为闭集, 如果余集 $X \setminus F$ 为开集.

定义 1.5 设 X 为一拓扑空间, $x \in X$, 称一子集 $U_x \subset X$ 为 x 的邻域, 如果存在开集 G 使 $x \in G \subset U_x$. 拓扑空间 X 的某点 x 叫做子集 $M \subset X$ 的聚点, 如果 x 的每一邻域都至少含有一异于 x 的点 $y \in M$, M 的一切聚点组成的集合称为 M 的导集, 记为 M' , M 与其导集之并 $\bar{M} = M \cup M'$ 称为 M 的闭包.

M 的闭包 \bar{M} 必是闭集, 且有如下蕴涵关系:

$$M \text{ 为闭集} \Leftrightarrow M = \bar{M} \Leftrightarrow M' \subset M.$$

1.3 邻域基

定义 1.6 设 X 是一拓扑空间, $x \in X$, $\beta_x = \{N_x\}$ 是 x 的某些邻域组成的集合. 称 β_x 是 x 的邻域系, 如果对 x 的任意邻域 U_x , 在 β_x 中恒能找到一 $N_x \subset U_x$. 令 $\beta = \{\beta_x; x \in X\}$, 其中 β_x 是 x 的

邻域系,称 β 为拓扑空间 X 的邻域基.

1·4 Hausdorff 空间、序列的收敛性、映射的连续性

定义 1·7 设 X 为拓扑空间,称序列 $\{x_j\}$,当 $j \rightarrow \infty$ 时收敛于 $x_0 \in X$,如果对 x_0 的任一邻域 U_{x_0} 存在自然数 N 使

$$x_j \in U_{x_0}, \quad \forall j > N.$$

x_0 称为序列 $\{x_j\}$ 的极限.

一般来讲,序列的极限未必唯一.

定义 1·8 拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间,如果 X 的拓扑满足分离公理,即对任意 $x, y \in X, x \neq y$,恒有不相交的开集 G_1, G_2 使 $x \in G_1, y \in G_2$. 因此对 Hausdorff 空间 X 的任意序列的极限(如果存在)必唯一.

定义 1·9 设 X 和 Y 都是拓扑空间, $y = f(x)$ 是定义在 X 上而取值于 Y 的映射.我们说映射 f 于 $x_0 \in X$ 连续,如果对 $y_0 = f(x_0)$ 的每一个邻域 V_{y_0} ,恒有 x_0 的邻域 U_{x_0} 使 $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$. 如果映射 f 在 X 的每一点连续,则称 f 在 X 上连续.

命题 1·1 映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续的充要条件是:对任意开集 V , $f^{-1}(V) = \{x \in X, f(x) \in V\}$ 恒为开集.

1·5 度量空间

定义 1·10 设 X 为非空集合,定义在 $X \times X$ 上的实值函数 $\rho(x, y)$ 如果满足下列条件:

(1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$,

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

则称 $\rho(\cdot, \cdot)$ 为 X 的度量(或距离).

利用度量 $\rho(\cdot, \cdot)$ 引进 X 的拓扑: X 的子集 G 为开集当且仅当对每一 $x \in G$ 恒有 $B(x, \epsilon) \subset G$, 此处 $B(x, \epsilon)$ 是球心位于 x , 半径等于 $\epsilon > 0$ 的球体: