高等学校教材

数值分析的泛函方法

雷晋干　陈铭俊　匡蛟勋　沈祖和　编

高等教育出版社

高等学校教材

数值分析的泛函方法

雷晋干　陈铭俊
匡蛟勋　沈祖和　编

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

数值分析的泛函方法/雷晋干等编. -北京:高等教育出版社,1996
ISBN 7-04-005585-6

Ⅰ.数… Ⅱ.雷… Ⅲ.泛函分析-计算方法 Ⅳ.0241

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第02306号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京市顺新印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张13.375 字数340 000
1996年12月第1版 1996年12月第1次印刷
印数0 001—758
定价:12.00元

内 容 提 要

本书是根据国家教育委员会数学力学教学指导委员会计算数学组制订的八五教材规划编写的一本计算数学硕士研究生教材，本书集中介绍了数值分析中最常用的泛函分析内容和方法。

全书共分八章，第一、二、三、四章分别是 Sobolev 空间、拓朴度和 Banach 空间中的微分学；第五、六、七、八章结合数值分析中的应用，分别介绍了迭代法、变分原理、投影法及逼近论。书中各章都配有精心设计的习题。

本书对应用数学的研究生以及相关专业的科技人员也很有参考价值。

前　言

自从 1948 年 Kantorovich 发表了他的论著“泛函分析与应用数学”一文以来，泛函分析作为研究数值数学的一门工具已为广大的数值分析工作者所接受，它的高度概括性，不仅能使所描述的问题得以简化和统一，甚至可能产生新的方法. 将 Newton 迭代法解一元函数方程推广到解 n 维空间的多元函数方程组乃至函数空间的算子方程便是一个熟知的例子. 又如解偏微分方程的有限元方法，由于使用了 Sobolev 空间的知识，使得研究问题更加一般、更加深刻. 此外，近似解的收敛性、误差估计以及近似解的存在性论证都与泛函分析有着密切关系，这些都说明泛函分析已成为研究数值数学的重要手段. 但是，在研究数值分析中的不同问题时往往需要花费大量时间和精力在浩瀚的文献中去寻找自己所需要的泛函分析内容. 所以编写一本比较集中地介绍与数值分析有关的泛函分析及泛函方法的书是有必要的. 国外在 80 年代初出现的一些“数值泛函分析”著作大概也是出于这种原因. 在国内有关泛函分析的书籍也出版了不少，但专门为数值分析而编写的泛函分析书籍尚很少见. 这就启示我们来编写这样一本书，集中介绍数值分析中最常用的泛函分析内容和方法. 基于此，我们并不强调泛函分析本身的完整性和严谨性，而着重于在数值分析中应用的可能性，这一想法得到国家教育委员会理科教学指导委员会计算数学教材组的支持，并建议列入教材出版计划. 我们四人多次合议、商讨，并分工负责进行了这项工作.

本书分为八章. 第一章是泛函分析基础知识，扼要地介绍了泛函分析中常用的知识；第二、三、四章分别是 Sobolev 空间、拓朴度和 Banach 空间中的微分学，均属于本书的基础部分；第五、六、七、八章结合数值分析中的应用，分别介绍了迭代法、变分原理、投影

解法及逼近论.其中第一章由匡蛟勋编写,第二、三、八章由陈铭俊编写,第四、六、七章由雷晋干编写,第五章由沈祖和负责编写.中山大学陈仲英为二、三、八章,上海师范大学项家祥为第一章的编写作了大量的工作.在编写过程中,我们注意使各章之间既有联系也有一定的相对独立性.读者可选择自己感兴趣的章节细读.我们也尽量注意内容的普遍性.因此,本书除可供计算数学硕士研究生阅读外,对应用数学的研究生以及相关专业的科技人员也很有参考价值.

理科计算数学教材组对本书的编写一直十分关心和支持,兰州大学的朱正佑教授详细审阅了本书的书稿,并提出了不少很有价值的修改意见,对此我们表示衷心的感谢.

必需指出,泛函分析的内容实在太丰富了.如何选择与数值分析有关的内容一直是本书编写中最感困难的问题,几经取舍才形成本书的内容,是否合适还有待时间的检验.又由于编者的水平有限,错误和遗漏在所难免,敬请读者批评指正.

编　者

1995 年 7 月于上海

目　　录

第二章 索伯列夫空间

第三章 拓扑度与不动点原理

第四章　Banach 空间的微分学

第五章　迭代法

第六章 变分原理

第七章　算子方程的投影解法

第一章 泛函分析基础

在这一章，我们简述拓扑空间、Banach 空间、线性算子等概念及有关的性质和结论，所有这些构成了泛函分析理论的基础. 我们将不一一给出所列出定理的证明. 读者可以从经典的泛函分析教程中找到.

§1 拓扑空间

1·1 拓扑空间

n 维实空间 $R^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n); x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是实数$\}$ 是拓扑空间的简单原型. 在 R^n 内一子集 $G \subset R^n$ 称为开集，如果对每一点 $x \in G$，恒有以 x 为心，某一正数 ε 为半径的开球 $B(x, \varepsilon) = \{y \in R^n; |y - x| < \varepsilon\}$ 含于 G 内，此处 $|\cdot|$ 表示欧氏模. 开集有如下熟知的性质：

(1) 空集 $\varnothing$ 和 R^n 是开集，

(2) 任意多个(有限或无限) 开集之并仍为开集，

(3) 任意有限个开集之交仍为开集.

基于这一事实的抽象化，有下述定义：

定义 1·1 设 X 是一个集合，τ 是 X 的一个子集系(即 X 的某些子集组成的集合). 如果 τ 满足如下三条公理：

(a) 空集 $\varnothing$ 和 X 属于 τ，

(b) 设 A 是一个标集，如果 $\forall\, \alpha \in A, G_\alpha \in \tau$，则 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$，

(c) 如果 $G_1, G_2 \in \tau$，则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$，

则称 τ 是 X 上的一个拓扑，其中的元素称为开集，X 连同 τ，即 $\{X,\tau\}$ 称为拓扑空间，有时简称 X 是一拓扑空间.

定义 1·2　设 M 是拓扑空间 X 的一子集，G 是 X 的任意开集，把 M 的形如 $M\cap G$ 的子集叫做 M 的开集，则 M 成为一拓扑空间，称为 X 的拓扑子空间. M 的这种诱导拓扑称为子集 M 的相对拓扑.

定义 1·3　设 $\{X_1, \tau_1\}$ 和 $\{X_2, \tau_2\}$ 都是拓扑空间. 作笛卡尔乘积 $X_1\times X_2=\{(x_1,x_2): x_1\in X_1,\quad x_2\in X_2\}$，在其中引进拓扑 $\tau=\{G_1\times G_2;\quad G_1\in\tau_1,\quad G_2\in\tau_2\}$，则 $\{X_1\times X_2,\tau\}$ 是一拓扑空间，叫做 X_1 与 X_2 的乘积空间.

1·2　闭集、邻域、聚点、闭包

熟知在 R^n 内一子集 $F\subset R^n$ 称为闭集，如果其导集 $F'\subset F$，导集 F' 即是 F 的一切聚点组成的集合. $F\subset R^n$ 为闭集当且仅当其余集 $R^n\backslash F$ 是开集. 同样在拓扑空间中也有：

定义 1.4　拓扑空间 X 的子集 F 称为闭集，如果余集 $X\backslash F$ 为开集.

定义 1·5　设 X 为一拓扑空间，$x\in X$，称一子集 $U_x\subset X$ 为 x 的邻域，如果存在开集 G 使 $x\in G\subset U_x$. 拓扑空间 X 的某点 x 叫做子集 $M\subset X$ 的聚点，如果 x 的每一邻域都至少含有一异于 x 的点 $y\in M$，M 的一切聚点组成的集合称为 M 的导集，记为 M'，M 与其导集之并 $\overline{M}=M\cup M'$ 称为 M 的闭包.

M 的闭包 $\overline{M}$ 必是闭集，且有如下蕴涵关系：

M 为闭集 $\Leftrightarrow M=\overline{M}\Leftrightarrow M'\subset M$.

1·3　邻域基

定义 1·6　设 X 是一拓扑空间，$x\in X$，$\beta_x=\{N_x\}$ 是 x 的某些邻域组成的集合. 称 β_x 是 x 的邻域系，如果对 x 的任意邻域 U_x，在 β_x 中恒能找到一 $N_x\subset U_x$. 令 $\beta=\{\beta_x: x\in X\}$，其中 β_x 是 x 的

邻域系，称 β 为拓扑空间 X 的邻域基.

1·4 Hausdorff 空间、序列的收敛性、映射的连续性

定义 1·7 设 X 为拓扑空间，称序列 $\{x_j\}$，当 $j\to\infty$ 时收敛于 $x_0\in X$，如果对 x_0 的任一邻域 U_{x_0} 存在自然数 N 使

$$x_j\in U_{x_0},\qquad \forall\, j>N.$$

x_0 称为序列 $\{x_j\}$ 的极限.

一般来讲，序列的极限未必唯一.

定义 1·8 拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间，如果 X 的拓扑满足分离公理，即对任意 $x,y\in X,x\neq y$，恒有不相交的开集 G_1，G_2 使 $x\in G_1,y\in G_2$. 因此对 Hausdorff 空间 X 的任意序列的极限（如果存在）必唯一.

定义 1·9 设 X 和 Y 都是拓扑空间，$y=f(x)$ 是定义在 X 上而取值于 Y 的映射. 我们说映射 f 于 $x_0\in X$ 连续，如果对 $y_0=f(x_0)$ 的每一个邻域 V_{y_0}，恒有 x_0 的邻域 U_{x_0} 使 $f(U_{x_0})\subset V_{y_0}$. 如果映射 f 在 X 的每一点连续，则称 f 在 X 上连续.

命题 1·1 映射 $f:X\to Y$ 连续的充要条件是：对任意开集 V，$f^{-1}(V)=\{x\in X,f(x)\in V\}$ 恒为开集.

1·5 度量空间

定义 1·10 设 X 为非空集合，定义在 $X\times X$ 上的实值函数 $\rho(x,y)$ 如果满足下列条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0,\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$，

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$，

则称 $\rho(\cdot,\cdot)$ 为 X 的度量(或距离).

利用度量 $\rho(\cdot,\cdot)$ 引进 X 的拓扑：X 的子集 G 为开集当且仅当对每一 $x\in G$ 恒有 $B(x,\varepsilon)\subset G$，此处 $B(x,\varepsilon)$ 是球心位于 x，半径等于 $\varepsilon>0$ 的球体：