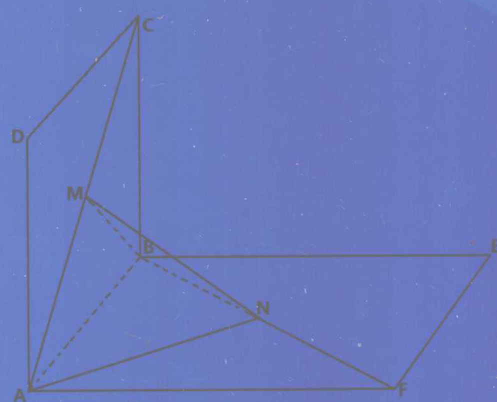
工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

代数学基础

(上册)

孙 毅 杨 柳 陈殿友 编



科 学 出 版 社

工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

代数学基础

（上册）

孙 毅 杨 柳 陈殿友 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为非数学学科的研究生编写的公共数学教材，分上、下两册：上册是矩阵论，下册是抽象代数.

本册书内容包括线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵分解、广义逆矩阵、矩阵分析、矩阵函数、特征值估计等. 本书内容适当、语言简练、表达规范、论述严谨，为适应读者线性代数基础的差异，还专门编写了一章预备知识，便于取舍，宜于教学.

本书可作为理工科及经济类、管理类硕士研究生课程的教材或教学参考书，也可作为工程技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

代数学基础. 上册/孙毅，杨柳，陈殿友编．—北京：科学出版社，2016. 1

(工科研究生数学类基础课程应用系列丛书)

ISBN 978-7-03-045395-2

Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①孙… ②杨… ③陈… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 193614 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：钟 洋

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2016 年 1 月第一次印刷 印张：16

字数：323 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”
编委会名单

序　言

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”是根据教育部关于研究生培养指导规划和目标、结合当前研究生教育改革的实际情况，借鉴国内外研究生教育的最新研究成果，旨在规范和加强研究生公共基础课教学的一套研究生公共数学系列教材. 本系列教材经过对研究生公共数学课程整合、优化，共编写教材 13 册，具体包括:《现代分析基础》(上、下册)、《代数学基础》(上、下册)、《现代统计学基础》(上、下册)、《现代微分方程概论》(上、下册)、《现代计算方法》(上、下册)、《现代优化理论与方法》(上、下册)、《应用泛函分析》.

本套书的编写体现了时代的特征，本着加强基础、淡化证明、强调应用的原则，力争做到科学性、系统性和实用性的统一，着眼于传授数学知识和培养学生数学素养的高度结合.

本套书吸取了国内外同类教材的精华，参考了近年来出版的一些新教材，结合当前研究生公共数学教学改革的实际，特别是综合性大学非数学类研究生公共数学的实际需求.

本套书体例科学，结构合理，内容经典而追求创新，既是作者多年教学经验的总结，又是作者长期教学研究和科学研究成果的体现. 每章后面既配备巩固基本概念、基本理论、基本运算的基本题目，又有提高学生抽象思维、逻辑推理和综合运用基础知识解题的提高题目，为学生掌握教材基本内容，运用教材基本知识开发创新思维提供了可行条件.

本套书适用面广、涉及专业全、教学内容新，可作为综合性大学非数学专业研究生公共数学教材和数学参考书，在教材体系与内容的编排上认真考虑了不同专业，不同学时的授课对象的需求，可选择不同的教学模块，以满足广大读者的实际需要.

本套书在编写过程中，得到了吉林大学研究生院、吉林大学数学学院和数学研究所的大力支持，也得到了科学出版社的领导和编辑的鼎力帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中的不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

丛书编委会

2015 年 3 月于长春

前　　言

代数学是数学的一个重要而基本的分支，历史悠久，体系庞杂，现已成为一种有力的数学语言和工具，在数学以及科学技术领域中都有着重要的应用. 本书是为非数学学科的硕士研究生编写的公共数学教材，分上、下两册：上册是矩阵论，下册是抽象代数. 矩阵论和抽象代数可以分别看成是大学线性代数在“技术”和理论方面的延伸.

本书是在已使用多年的硕士研究生教材《矩阵论》的基础上编写而成的. 此次修订除增添部分新章节外，还对原有体系及内容进行了系统而精心的修改. 特别注重了对教学实际需求的适应性. 重新编排的章节具有相对独立性，增强了可选择性. 第 0 章预备知识以及前几章中的若干节，为不同生源、不同起点的教学提供了选讲选学的方便；编写的带 * 号的部分也为不同专业、不同学时的教学留下了选择取舍的空间.

作为一本基础课教材，编者始终未忘传授理论知识、培养学用能力、树立创新意识、提高全面素质的使命，力求在教材中有所体现. 因此，本书始终把阐述基本概念、基本理论与基本方法作为基点，力求科学性、系统性、启迪性、实用性的统一.

本书是吉林大学研究生立项教材，可作为理工科及经济类、管理类各专业硕士研究生课程的教材，亦可供工程技术人员参考. 内容除预备知识外，还包括线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵分解、广义逆矩阵、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数、矩阵特征值估计等. 在正式章节之后，还以附录形式给出多项式矩阵的一些基本知识以及 Jordan 定理的证明，供读者参考.

本书预备知识及第 1 章由陈殿友编写，第 2～5 章由杨柳编写，第 6～8 章及附录部分由孙毅编写，全书由孙毅统稿.

本书在编写过程中得到了戴天时教授的悉心指导，并由其审阅了全书，他提出的许多宝贵的意见和建议被充分地吸收进了本书，在此向戴天时教授表示诚挚感谢.

限于编者水平，书中难免有一些疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目　　录

第0章 预备知识

0.1 多 项 式

0.1.1 数域

数，是数学的一个最基本的概念. 我们从上小学开始，就一直和数打交道. 随着学习的深入，我们认识的数的范围也越来越广，从正整数、分数、有理数、实数直到复数. 经验告诉我们：对于反映数量关系的数学问题，其结果往往和所考虑的数的范围有关. 例如，多项式 x^4-2 的因式分解，它在有理系数范围内已不能再分解了，而在实系数范围内就可以分解为

$$(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x^2+\sqrt{2}),$$

进而在复数范围内又可分解为

$$(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2}\mathrm{i})(x-\sqrt[4]{2}\mathrm{i}).$$

这说明对同一个问题，当所考虑的数的范围不同时，结果就可能是不同的. 因此，我们常常需要事先指明所涉及的数的范围. 数域就是描述数的范围的一个概念.

定义 0.1.1 设 F 是数集，其中至少包含两个不同的数，如果 F 中任意两个数的和、差、积、商（当除数不为零时）仍然是 F 中的数，则称 F 为一个数域.

由定义 0.1.1 立即可知：任何数域 F 至少包含 0 和 1. 这是因为，若 $a\in F$，则 $a-a=0\in F$；并且，由于 F 中不止 一个元素，必有非零数 $b\in F$，于是 $\frac{b}{b}=1\in F$.

如果集合 F 中任意两个元素做某种运算的结果仍在 F 中，我们就说 F 对这种运算封闭. 于是，数域就是一个含有不同元素并且对四则运算封闭的数集.

容易验证，全体有理数的集合是一个数域，称为**有理数域**，记为 $\mathbf{Q}$. 全体实数的集合和全体复数的集合也都是数域，分别称为**实数域**和**复数域**，记为 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$. 但是，全体整数的集合就不是数域，因为它对除法运算不封闭.

有理数域、实数域和复数域是最常用的数域. 但是数域绝不限于这三个. 不难验证数集

$$F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\text{ 为有理数}\}$$

构成一个数域. 显然，将上述数集中的 $\sqrt{2}$ 换成 $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\cdots$，都会得到相应的数域. 据此一点，就可以想到数域有无穷多个. 但是，由于对任何数集 F 总有 $F\subset\mathbf{C}$，所以

可以说,复数域是最大的数域.还容易证明,有理数域是最小的数域,即:任何数域必包含有理数域在其内(证明留作习题).

今后讨论问题时,凡涉及数的,我们总假设是在某个指定的数域上进行的(尽管有时并未特别申明).此时,参与运算的数都要限定在该数域内.例如,实矩阵是实数域上的矩阵,与实矩阵做数乘的数也应该是实数.同样,实系数的线性方程组通常被认为是实数域上的方程组,因而在进行初等变换和求解时也应该在实数域上进行.

0.1.2 多项式的运算

定义 0.1.2 对于非负整数 n 及数域 F 上的数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$,形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

称为数域 F 上的一个(一元)**多项式**,当 $a_n\neq 0$ 时,则称(1)式为一个(一元)$\boldsymbol{n}$ **次多项式**,非零数 a_n 称为该多项式的**首项系数**,a_0 称为**常数项**.

按此定义,$3x^4+x-2$ 是一个4次多项式;非零常数 -2 是0次多项式.所有系数全为0的多项式0称为**零多项式**.通常对零多项式不定义次数.如果为了方便,也可以认为它的次数为 $-\infty$.首项系数为1的多项式简称**首 1 多项式**.

定义 0.1.3 如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中,各同次项的系数都对应相等,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**,记为 $f(x)=g(x)$.

多项式的四则运算是人们所熟悉的,数域 F 上的两个多项式相加或相乘其结果仍是数域 F 上的一个多项式.多项式的加法和乘法还具有各自的交换律、结合律及加法对乘法的分配律.多项式的减法可以归结为加法,因为

$$f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)].$$

至于两个多项式相除,可以用长除法求得商式和余式,对此有如下定理.

定理 0.1.1(带余除法定则) 对任意多项式 $f(x)$ 及 $g(x)\neq 0$,恒有唯一的多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), \tag{2}$$

其中 $r(x)$ 是0或次数低于 $g(x)$ 的多项式.

证明 以 $f(x)$ 除以 $g(x)$,由长除法过程知必有适合定理条件的 $q(x)$,$r(x)$ 使(2)式成立.下面来证明唯一性.设另有多项式 $q_1(x)$ 及 $r_1(x)$ 使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

且次 $r_1(x)<$ 次 $g(x)$.于是

$$q(x)g(x)+r(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

即

$$[q(x)-q_1(x)]g(x)=r_1(x)-r(x). \tag{3}$$

如果 $q(x) \neq q_1(x)$，则上式左端次数大于等于 $g(x)$ 的次数，但右端次数小于 $g(x)$ 的次数，产生矛盾，故必有 $q(x) = q_1(x)$. 代入(3) 式又得 $r_1(x) = r(x)$. □

带余除法中所得的 $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商式**，$r(x)$ 称为**余式**.

0.1.3 多项式的整除性

定义 0.1.4 对于数域 F 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，如果存在数域 F 上的多项式 $h(x)$ 使

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{4}$$

就称 $g(x)$ **整除** $f(x)$，记为 $g(x) \mid f(x)$. $g(x)$ 不能整除 $f(x)$ 用 $g(x) \nmid f(x)$ 表示.

当有(4) 式成立时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的**因式**，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的**倍式**.

显然，非零常数 c 是任一多项式的因式，而零多项式 0 是任一多项式的倍式.

由定义 0.1.4 及定理 0.1.1 立知下述定理成立.

定理 0.1.2 对于多项式 $f(x)$ 及 $g(x) \neq 0$，$g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 余式为 0.

关于多项式的整除性，有如下的常用性质.

1° 两个非零多项式互相整除的充要条件是它们仅差一非零常数因子.

事实上，若 $f(x) = cg(x)$，c 是非零常数，则显然 $g(x)$ 与 $f(x)$ 互相整除. 反之，由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互相整除，则有多项式 $h_1(x)$，$h_2(x)$ 使

$$g(x) = h_1(x)f(x), \tag{5}$$

$$f(x) = h_2(x)g(x), \tag{6}$$

(6)式代入(5)式得

$$g(x) = h_1(x)h_2(x)g(x),$$

$g(x) \neq 0$ 故 $h_1(x)h_2(x) = 1$，因此 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 都是非零常数，再由(5) 和(6) 式知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅差非零常数倍.

2° 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$.（整除的传递性）

如果多项式 $u(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式又是 $g(x)$ 的因式，则称 $u(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**公因式**.

定义 0.1.5 如果 $d(x)$ 是多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式并且对于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任何公因式 $d_1(x)$ 都有 $d_1(x) \mid d(x)$，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式**或称**最高公因式**.

容易看出，任意两个不全为 0 的多项式必有公因式（至少非零常数就是）. 关于最大公因式有如下结果.

i) 任意两个多项式（只要它们不都是零多项式）必有最大公因式；（证明略）

ii) 最大公因式不唯一；但两个最大公因式之间最多差一非零常数倍.

这是因为：如果 $d(x)$，$h(x)$ 同是多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，根据定

义，它们必互相整除，从而仅差非零常数倍. 假如限定最大公因式的首项系数为1，则它是由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 唯一决定的了. 特别地，把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首1最大公因式记为

$$(f(x),g(x)).$$

定义 0.1.6　如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是非零常数，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**，亦称**互质**.

显然，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是 $(f(x),g(x))=1$. 实际上两个互素的多项式不存在一次及一次以上的公因式.

定义 0.1.7　一个多项式 $p(x)$ 在数域 F 上不能分解为两个次数比 $p(x)$ 低的多项式之积，则称 $f(x)$ 在数域 F 上是个**质式**，或称为**不可约多项式**.

当然，一个多项式是否可约，是和所考虑的数域密切相关的. 在复数域上，只有一次式才是质式，而在实数域上，质式可以是一次式及某些二次式.

0.1.4　多项式的根与标准分解

对于正整数 n，由 n 次多项式 $f(x)$ 形成的方程式 $f(x)=0$ 称为 ***n* 次代数方程**. 我们熟悉的是实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0,\quad a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0.$$

它的根依据 a,b,c 的不同取值可能为不同二实根、相同二实根或共轭二复根. 重复出现的根称为**重根**，其重复出现的次数称为该重根的**重数**. 重数为1的根称为**单根**. 如果约定在复数域上求根，并且重根的个数按其重数计算，那么一元二次代数方程就恰有两个根. 这一结论可以推广到一般代数方程上去. 由著名的代数学基本定理(即：当 $n\geqslant 1$ 时，复数域上的 n 次代数方程至少有一个根)便可知下述定理成立.

定理 0.1.3　在复数域上，n 次代数方程恰有 n 个根($n\geqslant 1$).

定义 0.1.8　对于 n 次($n\geqslant 1$)多项式 $f(x)$，代数方程 $f(x)=0$ 的根亦称为多项式 $f(x)$ 的**根**或**零点**.

根据定理0.1.3及定义0.1.8，又可以说：n 次($n\geqslant 1$)多项式在复数域上恰有 n 个根(重根的个数按重数计算).

容易理解，a 是多项式 $f(x)$ 的根即指 $(x-a)\mid f(x)$；a 是 $f(x)$ 的 k 重根即指 $(x-a)^k\mid f(x)$ 而 $(x-a)^{k+1}\nmid f(x)$. 关于 k 重根的判别，还有如下定理.

定理 0.1.4　$x=a$ 是多项式 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(a)=0$，$f'(a)=0,\cdots,f^{(k-1)}(a)=0$ 而 $f^{(k)}(a)\neq 0$.

证明　在 $x=a$ 处将 $f(x)$ 作泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{7}$$

必要性　a 是 k 重根，则 $f(x)$ 中恰有 $(x-a)^k$ 这个因式，(7) 式前 k 项必为 0，即 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$，而且必有 $f^{(k)}(a)\neq 0$，否则 a 的重数就多于 k 了！

充分性　当 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0$，而 $f^{(k)}(a)\neq 0$，由(7) 式即见 $(x-a)^k \mid f(x)$ 而 $(x-a)^{k+1}\nmid f(x)$，故 $x=a$ 是 $f(x)$ 的 k 重根.

推论 0.1.1　*如果多项式 $f(x)$ 满足*

$$f(a)=0, f'(a)=0, \cdots, f^{(k-1)}(a)=0,$$

则 $x-a$ 至少是 $f(x)$ 的 k 重因式.

按照根与一次因式的关系，多项式 $f(x)$ 的每一个根 x_i 都对应着 $f(x)$ 的一个一次因式 $(x-x_i)$，如果 n 次多项式(1) 在复数域上全部互异的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_t$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，则有

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_t)^{n_t}, \tag{8}$$

并且 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$.

(8) 式右端称为左端多项式 $f(x)$ 在复数域上的**标准分解式**.

例如，对于多项式 $f(x)=x^3+2x^2+x$，分解式

$$f(x)=x(x+1)^2, \quad f(x)=(x+1)^2x$$

都是标准分解式，而

$$f(x)=x(x+1)(x+1), \quad f(x)=\frac{1}{4}x(2x+2)^2$$

都不是标准分解式.

对于给定的多项式 $f(x)$，除各个不同根相应一次式方幂排列次序的差异外，标准分解式是唯一的.

习　题　0.1

1. 判明下列数集是否构成数域?
   1) $F=\{1,3,5,7,\cdots\}$;
   2) $F=\{a\pi \mid a$ 为有理数$\}$;
   3) $F=\{a+bi \mid a,b$ 为有理数$\}$.
2. 设 F 为任一数域，证明 $F\supset \mathbf{Q}$($\mathbf{Q}$ 为有理数域).
3. 设 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的多项式，并已知它的根为 $0,-1,1$(二重)，试求 $f(x)$ 按降幂排列的表达式.

4. 设 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2+ax+b$,试确定 a,b 的值,使 $(x-1)^2\mid f(x)$.

5. 已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 次数相同,证明:若 $f(x)\mid g(x)$,则 $g(x)\mid f(x)$.

6. 判明各小题中多项式的因式分解式哪些是复数域上的标准分解.

1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)$;

2) $g(x)=(x^2+2)(x-3)^2$;

3) $h(x)=2(x+1)^2x(x+5)$;

4) $p(\lambda)=\lambda(2\lambda-1)\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)$.

0.2　方阵的特征值与特征向量

鉴于矩阵特征值、特征向量对于进一步学习矩阵论课程的重要性,本节将以罗列的方式回顾与之相关的若干主要结果,以备需要时查阅.

定义 0.2.1　对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,其主对角线上 n 个元素之和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**,记为迹 $\boldsymbol{A}$ 或 tr$\boldsymbol{A}$.

定义 0.2.2　对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,把含有字母 λ 的矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}\tag{1}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**. 行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的值表达式 $\varphi(\lambda)$ 是一个多项式,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**. 特征多项式的根称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**,亦称**特征根**.

如果特征值 λ_0 是特征多项式的单根,则称 λ_0 为**单特征值**,否则称为**重特征值**.

定义 0.2.3　设 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 若有 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 成立,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于(属于)特征值 λ_0 的**特征向量**.

对于特征向量的定义,请读者注意以下四点:

i) 特征向量都是列向量;

ii) 零向量 $\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 不是特征向量;

iii) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于任一特征值 λ_0 的特征向量都有无穷多个,它们恰是齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全部非零解向量.

iv) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征向量只能相应于某一个确定的特征值.

不然的话,若向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同时是 $\boldsymbol{A}$ 相应于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,则有 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}$,于是便有 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,而作为特征向量的 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零的,则只能 $\lambda_1-\lambda_2=0$,这与 λ_1,λ_2 不同的条件相违.

例 0.2.1　在实数域上,求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解　A 的特征多项式为

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-(\lambda+1)r_1+r_3]{2r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2(\lambda-2)&\lambda-2&0\\-\lambda(\lambda-2)&2(\lambda-2)&0\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}2&1\\-\lambda&2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

可得 A 的实特征值为

$$\lambda_1=2(二重),\quad \lambda_2=-4.$$

对于 $\lambda_1=2$,求解齐次线性方程组$(\lambda_1E-A)x=\mathbf{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\\-3&-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

于是,矩阵 A 相应于特征值$\lambda_1=2$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,\quad k_1,k_2 \text{ 是不同时为零的任意实数}.$$

对于 $\lambda_2=-4$,求解$(\lambda_2E-A)x=\mathbf{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-7&-2&1\\2&-2&-2\\-3&-6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}.$$

于是,A 相应于特征值$\lambda_2=-4$ 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{\xi}_3,\quad k_3 \text{ 为任意非零实数}.$$ □

关于方阵的特征值与特征向量,有如下一些有用的结果.

1° n 阶矩阵 A 的特征多项式 $\psi(\lambda)$ 是一个首项系数为 1 的 n 次多项式;若设