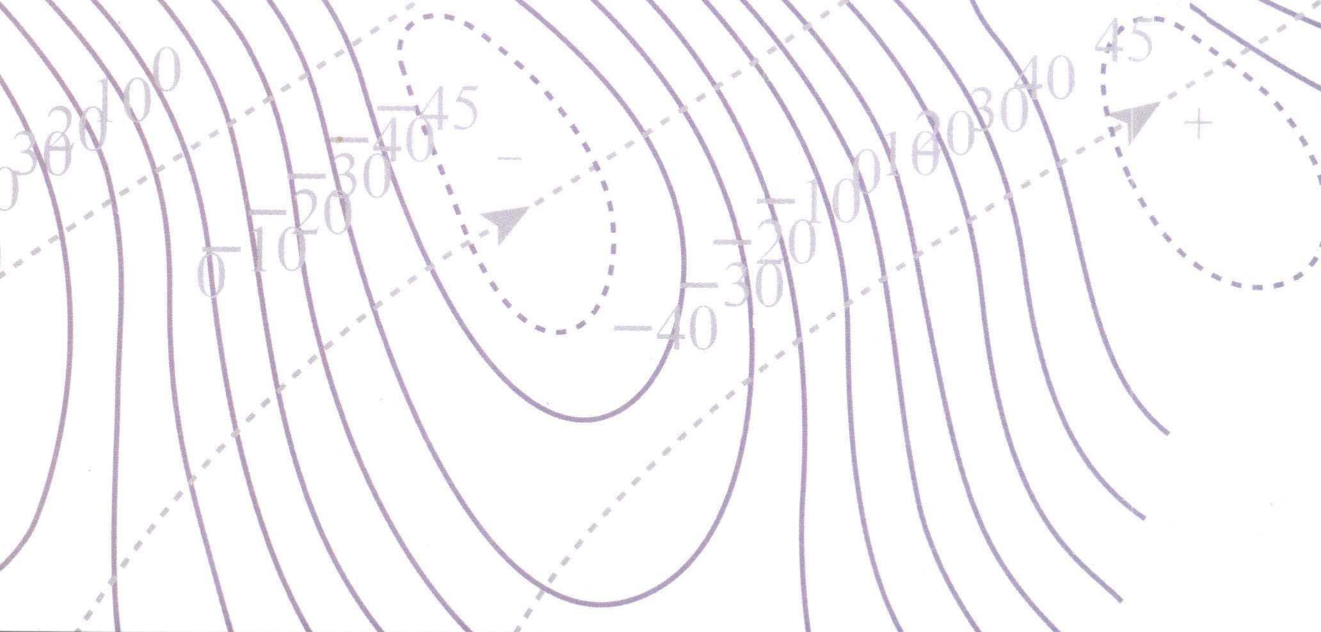

大气运动的波包动力学

——卢佩生文选

Dynamics of Wave Packet in the Atmospheric Motion

—— Selected Works of Professor Lu Peisheng

科学出版社

大气运动的波包动力学

——卢佩生文选

Dynamics of Wave Packet in the Atmospheric Motion

——Selected Works of Professor Lu Peisheng

科学出版社

北京

内 容 简 介

大气运动的波包动力学是天气和气候动力学的重要研究领域，很有理论和实用意义，可广泛应用于相应的理论研究、诊断分析和业务工作之中，并可推广应用于地球流体力学、天气和气候数值预测研究之中。本书是我国在这方面研究卓有建树的代表者之一卢佩生研究员及其合作者的代表性论文选编，并影印卢佩生手稿的有关部分的详尽数学公式推导。

本书可供大气科学和地球流体力学研究人员、高等院校师生，以及有关领域的研究和业务工作人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

大气运动的波包动力学：卢佩生文选＝Dynamics of Wave Packet in the Atmospheric Motion：Selected Works of Professor Lu Peisheng/曾庆存，曾晓东主编. —北京：科学出版社，2015
ISBN 978-7-03-042570-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①曾…②曾… Ⅲ.①大气动力学 Ⅳ.①P433

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 272578 号

责任编辑：吴凡洁 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张 倩 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：27 1/4 插页：1
字数：630 000

定价：168.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

大气运动的波包动力学是近三十多年来才兴起的研究领域，非常有理论意义，又十分实用，其研究方法已广泛应用于天气和气候动力学理论研究、实际资料的诊断分析，以及天气和气候数值预测模式研制和模式结果的分析和解释；还已推广到像海洋运动等一般规律即地球流体力学的研究中。波包表示法简洁而形象鲜明，波包动力学所推得的公式简明而优美，研究结果所揭示的规律性既深刻又浅显且便于实际应用。20 世纪 70 年代后期，国外强调研究波包在空间中传播路径的有关问题，是几何光学方法的直接外延；而国内则注意到波包即扰动随时间演变的动力学有关问题，当然也包括传播路径随时间的变化问题，比前者更复杂、更全面、也更有用。

卢佩生是国内从事波包动力学研究的代表之一，她与其合作者的研究结果已在天气和气候动力学研究中得到很好的应用。因此，我们将其有代表性的论文选编成书出版，以供有志于研究波包动力学的学者和业务工作者参考。相信本书对大学生和研究生的学习，对从事地球流体力学研究及天气和气候预测等研究的人员有启发和应用价值。

本书分四部分。第一部分是已发表的中文论文和英文论文的中译版，以便于国人阅读；第二部分是第一部分的英文版，即已发表的英文论文和中文论文的英译版，以飨英文读者，也期望国人能将它们传播到海外；第三部分是卢佩生在有关研究过程中的手稿影印，主要是公式的详细推导，相信它尤其对于大学生和研究生会很有参考价值，因为波包动力学表示法和结果虽然优美简洁，所用到的数学方法也并不很难，但公式推演过程却是很烦的，不可能在文章中一一列出；第四部分是附录，载有卢佩生生平简历和编者之一写的纪念性文章，也可作为卢佩生生平简历的补充。卢佩生研究员是编者的亲人，生前从事过多方面的科学研究工作，尤其在波包动力学方面卓有建树，惜其只有近二十年的工作结果留世，未臻其高峰，编者企盼有志的青年能接力登顶，以至其极，是所厚望。

在编辑出版本书过程中，刘淑秋、靳江波、吴琳、张莉、王昭等同仁在收集、选编、打字、翻译、校对等方面作了十分艰巨的工作，王东海研究员奔波联系出版工作。在此，编者谨致以衷心的崇敬和谢忱。

编者　曾庆存　曾晓东

2014 年 10 月 15 日

目　　录

Contents

一、中文文章和中译英文文章

Chinese Articles and Chinese Translations of English Articles

二、英文文章和英译中文文章

English Articles and English Translations of Chinese Articles

三、手稿(原件影印)

Handwriting Drafts for Derivation of Mathematical Formulas

四、附　　录

Appendix

一、中文文章和中译英文文章

Chinese Articles and Chinese Translations of English Articles

1

非均匀基流上扰动的演变

曾庆存　卢佩生

（中国科学院大气物理研究所）

摘要　本文用 WKBJ 方法统一处理了叠加在非均匀气流上的小扰动随时间的演变问题，得到了二维正压大气中重力-惯性波（快波）和涡旋波（慢波）具有不同的演变规律。前者发展时伴随着波长变短，衰减时波长变长；涡旋波与此正相反。由此可推知：在实际大气中只有短波长的快波比较显著，波长较长的快波不明显，从而不易观测到。还可解释：一个移动性的高空槽脊发展时它加宽，而衰减时总以收缩（波长变短）北退（强度减小）的形式出现。上述两种波的不同演变特性，主要由气流的不均匀性和波动的类别所决定。对于科氏参数为零的情况也对，科氏力的影响只是给波包以附加的弥散，给能量变化过程以次要的影响，并使慢波满足地转风关系。

在自然界的流体中（例如大气和海洋），存在着性质上差别很大的各种类型的运动，它们随时间的演变过程也是非常不同的。今以最简单的二维平面上可压缩流体模型为例，这时有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} & (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} & (2) \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \phi\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \tag{4}$$

其中，ϕ 可解释为在重力场中流体自由表面的位势；f 为科里奥利参数，为简单起见，本文取为常数。将式（1）～式（4）线性化，取 $\partial/\partial t$ 代替 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，并用 $\tilde{\phi}(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$ 代 $\phi(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$，其中 $\tilde{\phi}$ 为 ϕ 的平均值（常数）。这时有简谐波型特解

$$(u, v, \phi') = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\phi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny-\sigma t)} \tag{5}$$

频率 σ 有三个

$$\sigma_{2,3} = \pm\sqrt{f^2 + c_0^2(m^2+n^2)}, \quad c_0^2 = \tilde{\phi} \tag{6}$$

$$\sigma_1 = 0 \tag{7}$$

原载：《中国科学》A 辑，1980，第 12 期：1193-1202。

对于每一种频率，振幅 $\hat{u},\hat{v},\hat{\phi}$ 为常数。当考虑到基流$(\bar{u},\bar{v})$的影响时，例如取 $\bar{u}=$ 常数，$\bar{v}=0$，则线性化时应用 $\partial/\partial t+\bar{u}\partial/\partial x$ 代 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$（更仔细的考虑见以下各节）。于是应用 $x-\bar{u}\,t$ 代替式(5)中的 x，结果是式(6)和式(7)为相对于基流 $\bar{u}$ 的频率。$\sigma_{2,3}$ 分别代表顺风(气流)和逆风传播的重力-惯性波；而 $\sigma_1=0$ 表明相应的扰动以相速 $\bar{u}$ 传播，即所谓慢波或涡旋波。

为了讨论一般情况(即 $\bar{u},\bar{v}$ 不为常数)，似乎较好的方法是应用 WKBJ 方法。在文献[1]中即已用来讨论一般情况下快波随时间演变的特点。本文将统一用来讨论快波和慢波(或移动性高空槽脊)的演变特性。

一、小扰动方程及其求解方法

引入 $t,(x,y),(u,v),\phi-\tilde{\phi},f$ 的特征量 $t^*,L^*,U^*,\Phi^*=f^*U^*L^*$ 和 f^*，并取 $t^*=L^*/U^*$。于是由式(1)～式(4)得小扰动量方程为

$$\begin{cases}\varepsilon\left(\dfrac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right)-fv'+\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}+\varepsilon\left(u'\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)=0\\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial v'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial v'}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial v'}{\partial y}\right)+fu'+\dfrac{\partial\phi'}{\partial y}+\varepsilon\left(u'\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)=0\\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial\phi'}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial\phi'}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial\phi'}{\partial y}\right)+(\mu^2+\varepsilon\bar{\phi})\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}\right)+\varepsilon\phi'\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)+\varepsilon\left(u'\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial x}+v'\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial y}\right)=0\end{cases}\tag{8}$$

其中，$t,(x,y),(u',v'),(\bar{u},\bar{v}),\bar{\phi},\phi'$ 和 f 等均为无量纲量；$\varepsilon=U^*/(f^*L^*)$，以及 $\mu^2=(L_0/L^*)^2$ 为无量纲参数，$L_0=c_0f^{*-1}$。

在一般情况下，我们设 $O(\bar{u},\bar{v},\bar{\phi})=O(1)$。不过，在有急流时，也可不取急流流速作为特征速度 U^*，于是在某些地区(甚至可以认为在全区域)有 $O(\bar{u},\bar{v})>O(1)$。在下面的分析中，我们将兼顾这两种情况，只是在必要时分别加以说明。

设基流是“大尺度的”和“缓变的”，即 $O(\mu^2)\leqslant O(1)$，且无量纲量 $\bar{u},\bar{v},\bar{\phi}$ 等对无量纲时间和空间的微商(例如 $\partial\bar{u}/\partial t,\partial\bar{u}/\partial x$ 等)的量级均为 $O(1)$ 或 $O(\bar{u},\bar{v},\bar{\phi})$。设 u',v',ϕ' 组成快波或慢波波包，并设它是“中、小尺度的”和“快变的”，即波包内每一个波的无量纲波长 $\ll 1$，无量纲频率则 $\gg 1$。在实际大气中一般有 $\varepsilon\ll 1$，而快波的相速(有量纲量接近于 c_0)，比气流(有量纲量为 $\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}$)大一个量级，故可设快波的无量纲频率为 $O(\varepsilon^{-2})$[1]。综合起来，可将快波波包写成

$$\begin{cases}u'=\hat{u}(x,y,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon^{-1}\theta(x,y,\tau)}\\ v'=\hat{v}(x,y,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon^{-1}\theta(x,y,\tau)}\\ \phi'=\hat{\phi}(x,y,\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon^{-1}\theta(x,y,\tau)}\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$\begin{cases} \tau \equiv t\varepsilon^{-1}, \quad \dfrac{\partial\theta}{\varepsilon\partial\tau} \equiv -\varepsilon^{-1}\sigma(x,y,\tau) \\ \dfrac{\partial\theta}{\varepsilon\partial x} \equiv \varepsilon^{-1}m(x,y,\tau), \quad \dfrac{\partial\theta}{\varepsilon\partial y} \equiv \varepsilon^{-1}n(x,y,\tau) \end{cases} \tag{10}$$

在均匀的介质中，对于单频波列来说，$-\varepsilon^{-2}\sigma, \varepsilon^{-1}m$ 和 $\varepsilon^{-1}n$ 就是在 (x,y,t) 空间中的频率以及 x 和 y 方向的波数，它们都为常数。且按前面的约定，σ,m,n 的量级都是 $O(1)$。在非均匀介质中，σ,m,n 将随时间和空间而变，但它们是 (x,y,τ) 的缓变函数，即它们对 (x,y,τ) 的微商的量级为 $O(1)$。其次，设波幅 $\hat{u},\hat{v},\hat{\phi}$ 也是 (x,y,τ) 的缓变函数。由波包的定义本身即已假定了 $\hat{u}$ 等为 (x,y) 的缓变函数，而它还是 τ 的缓变函数，则可由 $\hat{u}$ 基本上按群速度移动推知，下面的推导将自动证明这一点，而且还可推知快波的群速量级为 $O(\varepsilon^{-1})$。

在式(8)中，我们尚未涉及 u',v',ϕ' 本身的量级。但因式(8)是关于 u',v',ϕ' 的线性齐次方程，故可认为 $O(u',v',\phi')=O(1)$。从而 $O(\hat{u},\hat{v},\hat{\phi})=O(1)$。

今将 $\hat{u}$ 等按 ε 展开如下：

$$\begin{cases} \hat{u}(x,y,\tau) = u_0(x,y,\tau) + \varepsilon u_1(x,y,\tau) + \varepsilon^2 u_2(x,y,\tau) + \cdots \\ \hat{v}(x,y,\tau) = v_0(x,y,\tau) + \varepsilon v_1(x,y,\tau) + \varepsilon^2 v_2(x,y,\tau) + \cdots \\ \hat{\phi}(x,y,\tau) = \phi_0(x,y,\tau) + \varepsilon\phi_1(x,y,\tau) + \varepsilon^2\phi_2(x,y,\tau) + \cdots \end{cases} \tag{11}$$

再将式(8)改写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial\tau} + \left(U\dfrac{\partial u'}{\partial x} + V\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right) - \dfrac{F}{\varepsilon}v' + \dfrac{\partial\phi'}{\partial x} + \left(u'\dfrac{\partial U}{\partial x} + v'\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial v'}{\partial\tau} + \left(U\dfrac{\partial v'}{\partial x} + V\dfrac{\partial v'}{\partial y}\right) + \dfrac{F}{\varepsilon}u' + \dfrac{\partial\phi'}{\partial y} + \left(u'\dfrac{\partial V}{\partial x} + v'\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial\tau} + \left(U\dfrac{\partial\phi'}{\partial x} + V\dfrac{\partial\phi'}{\partial y}\right) + (\mu^2 + \varepsilon\bar{\phi})\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y}\right) + \phi'\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + f(u'V - v'U) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$U(x,y,\tau) \equiv \varepsilon\bar{u}(x,y,t), \quad V(x,y,\tau) \equiv \varepsilon\bar{v}(x,y,t), \quad F \equiv \varepsilon f \tag{13}$$

以后我们将认为 U,V 等的量级为 $O(1)$，目的是在 $\partial u_0/\partial\tau, \partial v_0/\partial\tau$ 和 $\partial\phi_0/\partial\tau$ 中即计入基流的影响；其次，这样做也可以研究基流速度 $(\bar{u},\bar{v})$ 比波动速度 (u',v') 的量级为大的情况，同时还可更好地考虑到地球自转对快波的影响。此外，还可同时讨论慢波波包演变问题（这时虽然 $O(\sigma)=O(\varepsilon^{-2})$ 不成立，但形式上按此法作展开，结果仍然有效，详见下面的推导）。将式(9)、式(10)和式(11)代入式(12)，按 ε 的幂次集项。含 ε^{-1} 的项组成下列方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{i}\xi u_0 - Fv_0 + \mathrm{i}m\phi_0 = 0 \\ Fu_0 + \mathrm{i}\xi v_0 + \mathrm{i}n\phi_0 = 0 \\ \mu^2\mathrm{i}mu_0 + \mu^2\mathrm{i}nv_0 + \mathrm{i}\xi\phi_0 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$\xi \equiv -\sigma + mU + nV \tag{15}$$

故有

$$\xi\{\xi^2 - [F^2 + \mu^2(m^2+n^2)]\} = 0 \tag{16}$$

$$\xi_1 = 0 \tag{17}$$

$$\xi_{2,3} = \mp \sqrt{F^2 + \mu^2 (m^2 + n^2)} \tag{18}$$

即

$$\sigma_1 = -\xi_1 + mU + nV = mU + nV \tag{17$'$}$$

$$\sigma_{2,3} = -\xi_{2,3} + mU + nV = mU + nV \pm \sqrt{F^2 + \mu^2 (m^2 + n^2)} \tag{18$'$}$$

设 $U > 0, V > 0$，且取 $m \geqslant 0, n \geqslant 0$，则对应于 $\xi = \xi_1$ 的一解为慢波(顺风传播)；$\xi_2 < 0$ 和 $\xi_3 > 0$ 分别对应于顺风和逆风传播的重力-惯性波。

将式(7)代入式(14)得到慢波满足地转风关系①和无辐散关系

$$u_0 = -\mathrm{i}nF^{-1}\phi_0 \equiv a^{(1)}\phi_0, \quad v_0 = \mathrm{i}mF^{-1}\phi_0 \equiv b^{(1)}\phi_0 \tag{19}$$

$$\mathrm{i}(mu_0 + nv_0) = 0 \tag{20}$$

即波包的动力结构由 m, n, ϕ_0 决定，将式(18)代入式(14)，则得到重力-惯性波满足下列风压关系：

$$\begin{cases} u_0(x, y, \tau) = a^{(2,3)}(x, y, \tau)\phi_0(x, y, \tau) \\ v_0(x, y, \tau) = b^{(2,3)}(x, y, \tau)\phi_0(x, y, \tau) \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} a^{(2,3)}(x, y, \tau) = \dfrac{m\xi_{2,3} - \mathrm{i}nF}{F^2 - \xi_{2,3}^2} \equiv a_r^{(2,3)} + \mathrm{i}a_i^{(2,3)} \\ b^{(2,3)}(x, y, \tau) = \dfrac{n\xi_{2,3} + \mathrm{i}mF}{F^2 - \xi_{2,3}^2} \equiv b_r^{(2,3)} + \mathrm{i}b_i^{(2,3)} \end{cases} \tag{22}$$

故在零级近似下，快波波包的动力结构也由 m, n, ξ 和 ϕ_0 决定(依赖于 ξ 说明顺风和逆风传播的波包结构不同)。为书写方便，将标明波动类别的符标改写在右上角。如 $a^{(2,3)}$ 分别和 $\xi_{2,3}$ 对应。

为了研究 ϕ_0 随时间的演变，可用展开式中含 ε^0 的项。有

$$\begin{cases} \mathrm{i}\xi u_1 - Fv_1 + \mathrm{i}m\phi_1 = -\left[\dfrac{\mathrm{D}u_0}{\mathrm{D}\tau} + \dfrac{\partial \phi_0}{\partial x} + \left(u_0 \dfrac{\partial U}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial U}{\partial y}\right)\right] \equiv A \\ Fu_1 + \mathrm{i}\xi v_1 + \mathrm{i}n\phi_1 = -\left[\dfrac{\mathrm{D}v_0}{\mathrm{D}\tau} + \dfrac{\partial \phi_0}{\partial y} + \left(u_0 \dfrac{\partial V}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)\right] \equiv B \\ \mathrm{i}\mu^2(mu_1 + nv_1) + \mathrm{i}\xi\phi_1 = -\left[\dfrac{\mathrm{D}\phi_0}{\mathrm{D}\tau} + \mu^2\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right) + F(u_0V - v_0U)\right] \\ \qquad + \phi_0\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\bar{\phi}(mu_0 + nv_0) \equiv C \end{cases} \tag{23}$$

其中

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} \tag{24}$$

由第一和第二式解出 u_1, v_1，代入第三式，得

$$\mathrm{i}[\mu^2(ma + nb) + \xi]\phi_1 + \mathrm{i}\mu^2\left(m\frac{\mathrm{i}\xi A + FB}{F^2 - \xi^2} + n\frac{\mathrm{i}\xi B - FA}{F^2 - \xi^2}\right) = C \tag{25}$$

其中 a, b 由式(19)(慢波)及式(21)(快波)给出。再将 A, B, C 的表达式代入式(25)，并注

① 将式(9)、式(10)和式(11)代入地转风关系 $fu = -\partial\phi/\partial y$ 和 $fv = \partial\phi/\partial x$，取 ε^0 的项，结果和式(19)相同。

意到

$$\mu^2(ma+nb)+\xi=0 \tag{26}$$

由式(25)就得到关于 ϕ_0 的演变过程的方程为

$$\begin{aligned}
&[-\mu^2(ma+nb)\xi+\mathrm{i}\mu^2F(mb-na)-(F^2-\xi^2)]\frac{\mathrm{D}\phi_0}{\mathrm{D}\tau}+[(-\mu^2m\xi-\mathrm{i}\mu^2nF)\\
&-\mu^2a(F^2-\xi^2)]\frac{\partial\phi_0}{\partial x}+[(-\mu^2n\xi+\mathrm{i}\mu^2mF)-\mu^2b(F^2-\xi^2)]\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\\
&-\left\{\mu^2\left[(m\xi+\mathrm{i}nF)\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}\tau}+(n\xi-\mathrm{i}mF)\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}\tau}+(F^2-\xi^2)^2\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}\right)\right]\right.\\
&+\mu^2\left[(m\xi+\mathrm{i}nF)\left(a\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial U}{\partial y}\right)+(n\xi-\mathrm{i}mF)\left(a\frac{\partial V}{\partial x}+b\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]\\
&\left.+(F^2-\xi^2)\left[F(aV-bU)+\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\phi(\mathrm{i}ma+\mathrm{i}mb)\right]\right\}\phi_0=0
\end{aligned} \tag{27}$$

此式对于慢波和快波都是适用的。表面上十分复杂，但当分别代入慢波和快波的 ξ，a 和 b 时，都可以改写成便于分析讨论的公式。

二、波长和波射线的变化

波包在非均匀介质中传播时，波长和波射线的方向都会改变。

按 m,n,σ 的定义，由式(10)可得下列运动学的关系式：

$$\frac{\partial m}{\partial\tau}=-\frac{\partial\sigma}{\partial x},\quad \frac{\partial n}{\partial\tau}=-\frac{\partial\sigma}{\partial y},\quad \frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial x} \tag{28}$$

其次，可将 σ 看作 m,n,U,V 的函数：

$$\sigma=\sigma(m,n,U,V) \tag{29}$$

群速度 $\vec{C}_g=\vec{i}C_{gx}+\vec{j}C_{gy}$ 定义为

$$C_{gx}=\frac{\partial\sigma}{\partial m},\quad C_{gy}=\frac{\partial\sigma}{\partial n} \tag{30}$$

于是有

$$\frac{\partial\sigma(x,y,\tau)}{\partial x}=C_{gx}\frac{\partial m}{\partial x}+C_{gy}\frac{\partial m}{\partial y}+m\frac{\partial U}{\partial x}+n\frac{\partial V}{\partial x} \tag{31}$$

$$\frac{\partial\sigma(x,y,\tau)}{\partial\tau}=-C_{gx}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-C_{gy}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+m\frac{\partial U}{\partial\tau}+n\frac{\partial V}{\partial\tau} \tag{32}$$

引入记号

$$\frac{\mathrm{D}_g}{\mathrm{D}\tau}\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}+C_{gx}\frac{\partial}{\partial x}+C_{gy}\frac{\partial}{\partial y} \tag{33}$$

于是由式(31)、式(32)就可推得 $\mathrm{D}_gm/\mathrm{D}\tau$，同法可推出 $\mathrm{D}_gn/\mathrm{D}\tau$ 等。最后就得到波包的一些要素 m,n,σ 随时间变化的公式如下：

$$\frac{\mathrm{D}_gm}{\mathrm{D}\tau}=-\left(m\frac{\partial U}{\partial x}+n\frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{34}$$

$$\frac{\mathrm{D}_gn}{\mathrm{D}\tau}=-\left(m\frac{\partial U}{\partial y}+n\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{D}_g\sigma}{\mathrm{D}\tau}=m\frac{\partial U}{\partial \tau}+n\frac{\partial V}{\partial \tau} \tag{36}$$

沿波射线方向的波长为 $2\pi/\sqrt{m^2+n^2}$，波数为 $\sqrt{m^2+n^2}$。由式(34)和式(35)可得

$$\frac{\mathrm{D}_g}{\mathrm{D}\tau}\sqrt{m^2+n^2}=\frac{-1}{2\sqrt{m^2+n^2}}\left[m^2\frac{\partial U}{\partial x}+mn\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)+n^2\frac{\partial V}{\partial y}\right] \tag{37}$$

设波射线和 x 轴的夹角为 β，则有 $\mathrm{tg}\beta=n/m$，于是由式(34)和式(35)得

$$\frac{\mathrm{D}_g}{\mathrm{D}\tau}\mathrm{tg}\beta=-\frac{1}{m^2}\left[m^2\frac{\partial U}{\partial y}+mn\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)-n^2\frac{\partial V}{\partial x}\right] \tag{38}$$

式(34)～式(38)对快波和慢波都适用。因此，波包要素 m,n,σ 的变化只由气流不均匀性决定，快波和慢波的差别在于群速度不同，此外，波包能量变化的规律性也不同(见以下两节)。

三、快波波包随时间的演变

令

$$\phi_0=|\phi_0|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{39}$$

代入式(27)，约去公因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，再分虚部和实部，并应用到式(22)和式(34)～式(36)，再经过小心运算，最后就得到

$$\frac{\mathrm{D}_g\alpha}{\mathrm{D}\tau}=\frac{1}{2\xi}\left[\frac{2F\mu^2\xi}{F^2-\xi^2}\left(n\frac{\mathrm{D}_g m}{\mathrm{D}\tau}-m\frac{\mathrm{D}_g n}{\mathrm{D}\tau}\right)-F\xi\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+F^2(-nV-mU)+\bar{\phi}\xi(m^2+n^2)\right] \tag{40}$$

$$\frac{\mathrm{D}_g|\phi_0|^2}{\mathrm{D}\tau}+|\phi_0|^2\left(\frac{\partial C_{gx}}{\partial x}+\frac{\partial C_{gy}}{\partial y}\right)=|\phi_0|^2\left\{\left(1+\frac{F^2}{\xi^2}\right)\frac{\mathrm{D}_g\ln\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}}{\mathrm{D}\tau}+\frac{F}{\xi^2}\left[\xi(mV-nU)-2mn\bar{\phi}\right]\right\} \tag{41}$$

若在式(12)第三式中略去含 $\varepsilon\bar{\phi}$ 一项，则在式(40)和式(41)中含 $\bar{\phi}$ 的项亦消失；若在式(12)中设 $\mu^2+\varepsilon\bar{\phi}$ 在局部地区为常数，代以 μ'^2，则在式(40)和式(41)中含 $\bar{\phi}$ 的项亦消失，但用 μ'^2 代 μ^2。

α 就是波列包络线的位相函数。当 $F=0$(此时 $\bar{\phi}$ 为零，从而含 $\bar{\phi}$ 的项自动消去)，就有

$$\frac{\mathrm{D}_g\alpha}{\mathrm{D}\tau}=0 \tag{42}$$

$$\alpha(x,y,\tau)=\alpha(\vec{r}-\vec{C}_g\tau) \tag{43}$$

即在无科氏力时，重力波波包沿局地群速度 $\vec{C}_g$ 传播，和按运动学方法导出的结果一致。若 $f\neq 0$，则由式(40)可知，一般有 $\mathrm{D}_g\alpha/\mathrm{D}\tau\neq 0$，这说明科氏力作用使得波包还有缓慢的弥散。不过，$O(F)=O(\varepsilon)$，故 $O(\mathrm{D}_g\alpha/\mathrm{D}\tau)\leqslant O(\varepsilon)$，且当 $O(U,V)=O(\varepsilon)$ 时，甚至有 $O(\mathrm{D}_g\alpha/\mathrm{D}\tau)\leqslant O(\varepsilon^2)$。亦即弥散速率不大，运动学方法的结果仍近似正确。

为了讨论波包能量的变化，还要将式(41)化为

$$\frac{D_g N}{D\tau} + N\left(\frac{\partial C_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{gy}}{\partial y}\right) = NG \tag{44}$$

$$N \equiv \frac{|\phi_0|^2}{\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}} \tag{45}$$

$$\begin{cases} G = G_1 + G_2 + G_3 \\ G_1 = \left(\dfrac{F^2}{\xi^2}\right)\dfrac{D_g}{D\tau}[\ln\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}] \\ G_2 = F\xi(mV - nU) \\ G_3 = -2mnF\bar{\phi} \end{cases} \tag{46}$$

设在 τ 时刻波包占领区域 S'，即在 S' 之外 $u_0 = v_0 = \phi_0 = 0$，不妨取 S' 就是全区域 S，将式(44) 沿 S 积分，就有

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\iint_S N\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S NG\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{47}$$

因为波列压力场能量为 $\mu^{-2}|\phi_0|^2/2$，动能为$(|u_0|^2+|v_0|^2)/2$，故快波波列有能量 e_0

$$\mu^2 e_0 = \frac{1}{2}[\mu^2(|u_0|^2+|v_0|^2)+|\phi_0|^2] = \frac{\xi^2}{\mu^2(m^2+n^2)}|\phi_0|^2 \tag{48}$$

而快波波包总能量为

$$E_0 = \iint_S e_0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \frac{\xi^2}{\mu^4(m^2+n^2)}|\phi_0|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{49}$$

于是式(47)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\iint_S e_0\frac{\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}}{\xi^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S NG\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{50}$$

式(50)可称为波包广义能量变化方程。

若 $F=0$，则 $G=0$，由式(50)得广义能量守恒。在非均匀气流中，由于 m^2+n^2 等有变化，故由广义能量守恒却可导致波包能量改变。若 $F\neq 0$，一般有 $G\neq 0$，科氏力作用使得广义能量也不守恒。不过，由于 G_3 常可消去，而$O(G_1,G_2)\leqslant O(\varepsilon^2)$。故由此而引起的广义能量的改变不大(若不消去$G_3$，则有$O(G_3)=O(\varepsilon)$)，但$\sqrt{m^2+n^2}$ 的时间变率为$O(U,V)$。当$O(\bar{u},\bar{v})=O(1)$时，$O(U,V)=O(\varepsilon)$，故波包能量变化主要由波长变化所决定，即由大尺度流场的结构所决定。而科氏力作用(通过 G) 则再给以补加的变化。

记 $\eta\equiv\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}$，则有

$$\frac{\sqrt{\mu^2(m^2+n^2)}}{\xi^2} = \frac{\eta}{F^2+\eta^2},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\eta}{F^2+\eta^2}\right) = \frac{F^2-\eta^2}{F^2+\eta^2}$$

因 $O(F)=O(\varepsilon)$，故若波长不特别长，总有 $F^2-\eta^2<0$，$\mathrm{d}[\eta/(F^2+\eta^2)]/\mathrm{d}\eta<0$。故若略去$G$的影响，平均而言，波长变短伴随有 e_0 增大。即快波在传播过程中，波动发展(总能量增加)伴随着波长变短；波动衰减(能量被基流吸收)伴随着波长变长。

上述规律可以解释实际大气中的情况。由此可知，重力波只当波长较短时才比较显著，由局部区域扰动所形成的波长较长的快波波幅非常小。

重力波发展时，波长变得越来越短，振幅又变得比较大，此时必须进一步计入非线性

项以及湍流作用，于是波动易于破碎而成湍涡。因此，在大气中大振幅的重力波很难维持较长时段。

在文献[1]中对一些具体情况进行过仔细分析，其中还计入 G 的作用，结果表明：当快波波包顺风入射到气旋内强风区时，能量大部分被气旋场吸收。在旋转大气的涡旋群中，快波的传播常常要碰到上述条件，所以在实际大气中重力波只在局部地区和较短时段内才比较显著。

四、慢波波包随时间的演变

按式(17)′，可得慢波的群速度$\vec{C}_g^{(1)}$为

$$C_{gx}^{(1)}=U,\quad C_{gy}^{(1)}=V \tag{51}$$

慢波波形基本上顺风以速度(U,V)传播。波形的畸变只由气流的不均匀所导致的局地几何形变所决定。

以后我们将 $\vec{C}_g^{(1)}$ 和ξ_1,σ_1 等简记作$\vec{C}_g,\xi,\sigma$。由式(51)可知，$\mathrm{D}_g/\mathrm{D}\tau=\mathrm{D}/\mathrm{D}\tau$。将慢波的$a,b,\xi$等代入式(27)，再令 $\phi_0=|\phi_0|\mathrm{e}^{i\alpha}$，就得到慢波波包包络线的位移公式和振幅变化公式：

$$\frac{\mathrm{D}_g\alpha}{\mathrm{D}\tau}=\frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}\tau}=\frac{F^2}{\mu^2}(mU+nV) \tag{52}$$

$$\left(m^2+n^2+\frac{F^2}{\mu^2}\right)\frac{\mathrm{D}_g|\phi_0|}{\mathrm{D}\tau}+|\phi_0|\frac{\mathrm{D}_g}{\mathrm{D}\tau}\left(m^2+n^2+\frac{F^2}{\mu^2}\right)=-|\phi_0|\left[\left(m^2+n^2+\frac{F^2}{\mu^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] \tag{53}$$

由于 $O(F)=O(\varepsilon)$，故由式(52)可见，慢波波包在局部地区的弥散的量级$\leqslant O(\varepsilon^2)$[甚至$\leqslant O(\varepsilon^3)$，若$O(U,V)=O(\varepsilon)$]，比快波还要小。

为了分析慢波波包能量的变化，还要将式(53)变换如下：

$$\frac{\mathrm{D}_gQ_0}{\mathrm{D}\tau}=-Q_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{54}$$

$$\frac{\mathrm{D}_gQ_0^2}{\mathrm{D}\tau}=-2Q_0^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{55}$$

其中

$$Q_0=-\left(m^2+n^2+\frac{F^2}{\mu^2}\right)|\phi_0| \tag{56}$$

当ϕ_0 和 m,n 为实常数时，准地转近似下的位涡度的绝对值就是

$$\left|\left(\Delta-\frac{F^2}{\mu^2}\right)\phi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}\right|=|Q_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ny)}| \tag{57}$$

这就是 Q_0 的意义，不妨称Q_0为位涡度。式(54)和式(55)说明Q_0和平方位涡度Q_0^2的随波个别微商与其自身和基流的辐合$[-(\partial U/\partial x+\partial V/\partial y)]$成正比。基流辐散使之减小，辐合使之增加，但量级为$O(\varepsilon^2)$（因在科氏力作用下$O(\partial\bar{u}/\partial x+\partial\bar{v}/\partial y)=O(\varepsilon)$）。

再将式(55)沿 S 积分，得