51.61
SPW
2
306151

微积分

下册

〔美〕迈克尔·斯皮瓦克 著
张毓贤 严敦正 译
杨慰祖 校

人民教育出版社

微积分

306151

微积分

下册

[美] 迈克尔·斯皮瓦克 著
张毓贤 严敦正 译
杨慰祖 校

人民教育出版社

306151

出 版 说 明

本书根据美国 W. A. Benjamin, Inc. 出版的 M. Spivak 著《Calculus》1967 年版译出.

中译本分上、下两册出版，上册内容主要为基础知识、导数和积分，下册内容主要为无穷序列、无穷级数和作为结束语的实数理论初步.

本书概念严密，叙述清楚，并配有大量习题. 习题中部分题解编入每章习题后的“选题解答”中，其余全部题解编入《〈微积分〉补充题解》另册出版.

本书可作为理工科高等院校微积分课程的教学参考书.

微 积 分

下 册

〔美〕迈克尔·斯皮瓦克 著

张锦贤 严敦正 译

杨慰祖 校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山东新华印刷厂德州厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.25 字数 190,000

1981年2月第1版 1981年10月第1次印刷

印数 00,001—12,000

书号 13012·0583 定价 0.73 元

目　　录

第四部分　无穷序列和无穷级数……………………………………463
第十九章　用多项式函数的近似……………………………………464
*第二十章　e是超越的……………………………………503
第二十一章　无穷序列……………………………………515
第二十二章　无穷级数……………………………………536
第二十三章　一致收敛和幂级数……………………………………569
第二十四章　复数……………………………………599
第二十五章　复变函数……………………………………620
第二十六章　复变数幂级数……………………………………640
第五部分　结束语……………………………………670
第二十七章　域……………………………………671
第二十八章　实数的构造……………………………………680
第二十九章　实数的唯一性……………………………………696
建议读物……………………………………704
符号表……………………………………717

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第四部分　无穷序列和无穷级数

代数分析中最值得注意的级数之一是:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x^n+\cdots$$

当m是正整数时该级数是有穷的,如所周知,它的和可以表示为$(1+x)^m$. 当m不是非负整数时,该级数变成无穷,并且它将随着数m和x取这个或那个值而收敛或发散.在这种情形下,人们写出同一等式

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$$

……这是假定,每当级数收敛时总会出现这个数值等式,可是这一点还从来没有被证明过.

耐尔斯·亨瑞克·阿贝耳

第十九章　用多项式函数的近似

在某种意义上讲“初等函数”一点也不初等．如果 p 是一个多项式函数，

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

那么对于任何数 x，$p(x)$都能够容易地计算出来．对于象 sin，log 或 exp 这样的函数，情况就完全不是这样．目前为了近似地求出 $\log x=\int_1^x 1/t\,dt$，我们必须计算某个上和或下和，还必须弄确实把这样一个和作为 $\log x$时所包含的误差不太大．计算$e^x=\log^{-1}(x)$ 会更困难：我们必须对于 a 的许多值算出 $\log a$，直到找出一个数 a，使 $\log a$ 近似地等于 x 为止——那么 a 就近似地等于 e^x．

在这一章中，我们将得出一些重要的理论结果，对于许多函数 f 而言，这些结果将把 $f(x)$的计算简化为多项式函数的计算．这种方法依赖于求出密切近似于 f 的多项式函数．为了推测一个恰当的多项式，首先对多项式函数本身进行比较彻底的考察，是有帮助的．

假设

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

注意到系数 a_i 能用 p 及其各阶导数在 0 处的值来表示是有趣的，并且对于我们的目的是很重要的．首先，注意到

$$p(0)=a_0.$$

微分 $p(x)$的原式，得

$$p'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}.$$

所以

$$p'(0)=p^{(1)}(0)=a_1.$$

再次微分，我们得

$$p''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3x+\cdots+n(n-1)\cdot a_nx^{n-2}.$$

所以

$$p''(0)=p^{(2)}(0)=2a_2.$$

一般地，我们有

$$p^{(k)}(0)=k!a_k \text{ 或 } a_k=\frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

如果我们约定 $0!=1$，并回想起记号 $p^{(0)}=p$，那么这个公式对于 $k=0$ 也成立。

如果我们从一个被写为“$(x-a)$的多项式”的函数 p

$$p(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$$

开始，那么同样的讨论将证明

$$a_k=\frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

现在假定 f 是这样的一个函数(不一定是多项式)，使得

$$f^{(1)}(a),\cdots,f^{(n)}(a)$$

都存在。设

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ 0\leqslant k\leqslant n,$$

并规定

$$P_{n,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n.$$

多项式 $P_{n,a}$ 称为 **f 在 a 处的 n 阶泰勒多项式**。(严格地讲，我们应当用更复杂的符号，如 $P_{n,a,f}$，以便指出它与 f 的依赖关系；这个更严谨的记号有时是有用的。)泰勒多项式被定义为使得

$$P_{n,a}^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\text{ 对于 } 0\leqslant k\leqslant n;$$

事实上，它显然是具有这种性质的次数 $\leqslant n$ 的唯一的多项式。

虽然 $P_{n,a,f}$ 的系数似乎以一种相当复杂的方式依赖于 f，但是

一些最重要的初等函数却有极简单的泰勒多项式. 首先考虑函数 sin. 我们有

$$\sin(0)=0,$$
$$\sin'(0)=\cos 0=1,$$
$$\sin''(0)=-\sin 0=0,$$
$$\sin'''(0)=-\cos 0=-1,$$
$$\sin^{(4)}(0)=\sin 0=0.$$

从此继续下去，导数以 4 为周期重复出现. 数

$$a_k=\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}$$

是

$$0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},0,-\frac{1}{7!},0,\frac{1}{9!},\cdots$$

所以 sin 在 0 处的 $2n+1$ 阶泰勒多项式 $P_{2n+1,0}$ 是

$$P_{2n+1,0}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(当然，$P_{2n+1,0}=P_{2n+2,0}$).

cos 在 0 处的 $2n$ 阶泰勒多项式 $P_{2n,0}$ 是(计算留给你们)

$$P_{2n,0}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

exp 的泰勒多项式特别容易计算. 因为对于所有的 k,

$$\exp^{(k)}(0)=\exp(0)=1,$$

所以它在 0 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,0}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

log 的泰勒多项式必须在某个 $a\neq0$ 处计算，因为 log 在 0 处甚至连定义都没有. 标准的选择是 $a=1$. 于是

$$\log'(x)=\frac{1}{x},\quad \log'(1)=1;$$

$$\log''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad \log''(1)=-1;$$

$$\log'''(x)=\frac{2}{x^3},\ \log'''(1)=2;$$

一般地

$$\log^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k},$$

$$\log^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

所以 log 在 1 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,1}(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

研究函数 $f(x)=\log(1+x)$ 往往是更方便的. 在这种情况下，我们可以取 $a=0$. 我们有

$$f^{(k)}(x)=\log^{(k)}(1+x),$$

于是

$$f^{(k)}(0)=\log^{(k)}(1)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

因此，f 在 0 处的 n 阶泰勒多项式是

$$P_{n,0}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

还有一个其泰勒多项式也很重要的初等函数——arctan. 其导数计算如下

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad \arctan'(0)=1;$$

$$\arctan''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\qquad \arctan''(0)=0;$$

$$\arctan'''(x)=\frac{(1+x^2)^2\cdot(-2)+2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}.$$

$$\arctan'''(0)=-2.$$

这种费力的计算显然是不行的．然而，在我们更仔细地考察过泰勒多项式的性质之后，arc tan 的泰勒多项式将会容易求出——虽然泰勒多项式 $P_{n,a,f}$ 只是被定义得使它与 f 在 a 处具有相同的前 n 阶导数，但 f 和 $P_{n,a,f}$ 之间的关系实际上要深得多．

关于 f 和 f 的泰勒多项式之间的一种更密切关系的一丝形迹，可通过考察一阶泰勒多项式

$$P_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

揭示出来．注意到

$$\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a).$$

现在按 $f'(a)$ 的定义，我们有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=0.$$

换言之，当 x 趋近于 a 时，差 $f(x)-P_{1,a}(x)$ 不仅变小，而且实际上甚至与 $x-a$ 相比也是变小的．图 1 绘出 $f(x)=e^x$ 和 f 在 0 处的一阶泰勒多项式

$$P_{1,0}(x)=f(0)+f'(0)x=1+x$$

的图形．图上还绘出 f 在 0 处的二阶泰勒多项式

$$P_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x+\frac{x^2}{2}$$

的图形．当 x 趋近 0 时，差 $f(x)-P_{2,0}(x)$ 似乎比差 $f(x)-P_{1,0}(x)$ 变小得更快．照这样叙述，这个断言是很不严谨的，我们现在准备给它一个确定的意思．我们刚才已经注意到，一般说来

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{1,a}(x)}{x-a}=0.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

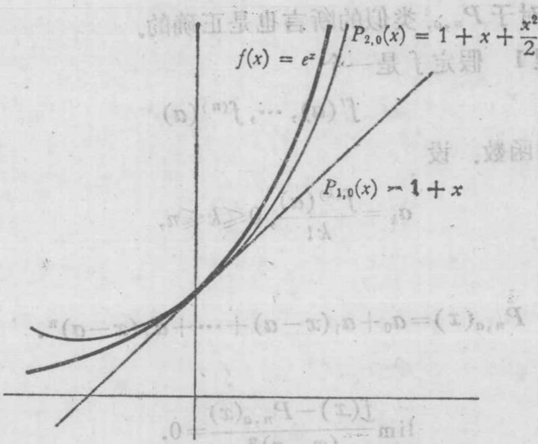


图 1

对于 $f(x)=e^x$ 和 $a=0$，这意味着

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_{1,0}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x}=0.$$

另一方面，不费力地两次应用罗必塔法则就能证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此，当 x 趋近于 0 时，虽然 $f(x)-P_{1,0}(x)$ 与 x 相比在变小，但它与 x^2 相比却不变小．对于 $P_{2,0}(x)$，情况就完全不同；额外的一项 $x^2/2$ 正好提供恰当的补偿：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0.$$

这个结果对于一般情形仍然是对的——如果 $f'(a)$ 和 $f''(a)$ 存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{2,a}(x)}{(x-a)^2}=0;$$

事实上，对于 $P_{n,a}$，类似的断言也是正确的．

定理1 假定 f 是一个

$$f'(a), \cdots, f^{(n)}(a)$$

都存在的函数．设

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}, 0\leqslant k\leqslant n,$$

并定义

$$P_{n,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n.$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

证明 明确地写出 $P_{n,a}(x)$，我们得到

$$\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(x)-\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

引入新函数

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

和

$$g(x)=(x-a)^n$$

是有帮助的．现在我们必须证明

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

注意到

$$Q^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\quad k\leqslant n-1,$$

$$g^{(k)}(x)=n!(x-a)^{n-k}/(n-k)!.$$

于是

$$\lim_{x\to a}[f(x)-Q(x)]=f(a)-Q(a)=0,$$

$$\lim_{x\to a}[f'(x)-Q'(x)]=f'(a)-Q'(a)=0,$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to a}[f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)]$$

$$=f^{(n-2)}(a)-Q^{(n-2)}(a)=0,$$

而且

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}g'(x)=\cdots=\lim_{x\to a}g^{(n-2)}(x)=0.$$

因此我们可以应用罗必塔法则 $n-1$ 次，得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-Q^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}.$$

因为 Q 是一个 $n-1$ 次多项式，所以它的 $n-1$ 阶导数是一个常数；事实上，$Q^{(n-1)}(x)=f^{(n-1)}(a)$. 因此

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{n!\,(x-a)},$$

而按 $f^{(n)}(a)$ 的定义，末尾的这个极限是 $f^{(n)}(a)/n!$. ▌

定理 1 的一个简单推论使我们能够把第十一章所讲的关于局部最大和最小的判别法完善起来. 如果 a 是 f 的一个临界点，则根据十一章定理 5，函数 f 当 $f''(a)>0$ 时在 a 处有一个局部最小值，而当 $f''(a)<0$ 时在 a 处有一个局部最大值. 如果 $f''(a)=0$，则得不出任何结论，但可以想到，$f'''(a)$ 的符号也许会给出更进一步的信息；而当 $f'''(a)=0$ 时，$f^{(4)}(a)$ 的符号也许是重要的. 更一般地，我们可以问，当

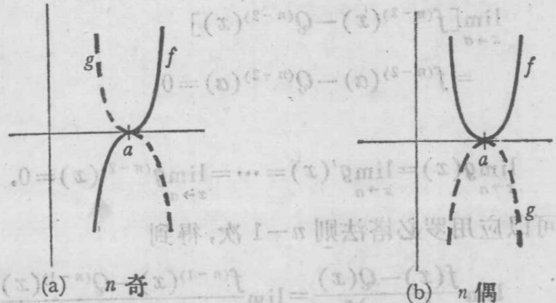
$$(*)\quad \begin{aligned}&f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\\&f^{(n)}(a)\neq 0\end{aligned}$$

时会出现什么状况. 假使这样的话，其状况可通过考察满足(*)的函数

$$f(x)=(x-a)^n,$$

$$g(x)=-(x-a)^n$$

推测出来. 注意到(图 2), 如果 n 是奇数, 则 a 对于 f 或 g 既不是



(a) n 奇　　　　(b) n 偶

图 2

一个局部最大点也不是一个局部最小点. 另一方面, 如果 n 是偶数, 则具有正的 n 阶导数的 f 在 a 处有一个局部最小值, 而具有负的 n 阶导数的 g 在 a 处有一个局部最大值. 在所有满足(*)的函数中, 这些大概是最简单而有用的; 然而它们仍然正确地表示出一般的情况. 事实上, 下面的证明的全部要点是, 在由定理 1 说清楚了的那种意义上说, 满足(*)的任何函数非常象这些函数中的一个.

定理 2　假定

$$f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f^{(n)}(a)\neq 0.$$

(1) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(a)>0$, 则 f 在 a 处有一个局部最小值.

(2) 如果 n 是偶数且 $f^{(n)}(a)<0$, 则 f 在 a 处有一个局部最大值.

(3) 如果 n 是奇数, 则 f 在 a 处既无局部最大值也无局部最小值.

证明　不失一般性, 我们可以假定 $f(a)=0$, 因为当以 $f-$

$f(a)$代替 f 时，定理的假设和结论都不受影响．这样，因为 f 在 a 处的前 $n-1$ 阶导数为 0，所以 f 的泰勒多项式 $P_{n,a}$ 是

$$P_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

于是，定理 1 指出

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

因此，当 x 充分接近 a 时，则

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}\text{和}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\text{有相同的符号.}$$

现在假定 n 是偶数．在此情形中，对于所有的 $x\neq a$ 有

$$(x-a)^n>0.$$

因为对于充分接近 a 的 x，$f(x)/(x-a)^n$ 和 $f^{(n)}(a)/n!$ 有相同的符号，所以对于充分接近 a 的 x，$f(x)$本身和 $f^{(n)}(a)/n!$ 有相同的符号．如果 $f^{(n)}(a)>0$，这就意味着对于接近 a 的 x 有

$$f(x)>0=f(a).$$

因此，f 在 a 处有一局部最小．对于 $f^{(n)}(a)<0$ 的情形，可用类似的证明．

现在假定 n 是奇数．和前面相同的论证证明，若 x 充分接近 a，则

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}\text{总具有同一的符号.}$$

但是对于 $x>a$ 有$(x-a)^n>0$，而对于 $x<a$ 有$(x-a)^n<0$．所以 $f(x)$对于 $x>a$ 和 $x<a$ 有着不同的符号．这就证明 f 在 a 处既没有局部最大，也没有局部最小．▌

虽然定理 2 将解决几乎所有在实践中出现的函数的局部最大

和最小的问题，但在理论上确有它的局限性，因为$f^{(k)}(a)$对于所有的k可以都等于0. 对于在0处有最小值的函数(图3(a))

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

和对于在0处有最大值的这个函数的负函数(图3(b))，都会发生这种情况. 另外(图3(c))，如果

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -e^{-1/x^2}, & x<0,\end{cases}$$

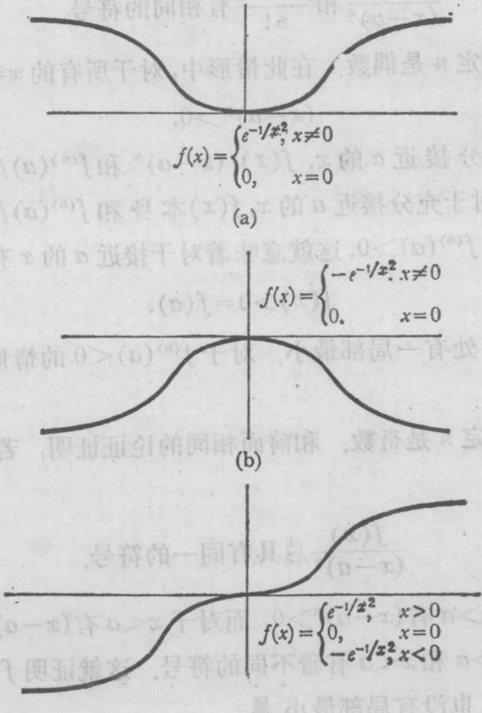


图 3

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com