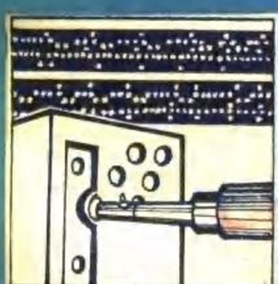
高等学校试用教材

弹性与塑性力学

——例题和习题——

清华大学徐秉业 主编



机械工业出版社

高等学校试用教材

弹性与塑性力学

——例题和习题——

清华大学徐秉业　主编

机械工业出版社

弹 性 与 塑 性 力 学

—— 例 题 和 习 题 ——

清华大学徐秉业　主编

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16・印张 40 ・ 插页 2 ・字数986千字

1981 年 2 月北京第一版・1981 年 2月北京第一次印刷

印数 0,001—9,500 ・定价 4.20 元

*

统一书号：15033・5016

前　言

本书是根据1978年4月在天津召开的高等学校一机部对口专业座谈会的精神及1978年11月在杭州召开的高等院校固体力学专业教材编审会议上所通过的大纲编写的。

弹性与塑性力学是一门技术基础课程。它推理严谨，相对于材料力学求解所得的结果更接近于实际，应用范围更为广泛。学习和掌握它既能掌握一定的解决工程技术问题的基础知识，又能培养分析问题和解决问题的能力。近年来，本课程受到了理工科院校有关专业越来越多的重视。

在目前使用的教材中，例题和习题都比较少，有的教材甚至根本没有习题。由于缺少典型示范的例题，又缺少独立训练用的习题，因而影响了初学者理解和掌握本课程的基本理论和基本方法。为了提高这门课程的教学质量，我们编写了这本例题和习题。

本书主要是为初学这门课程的读者而编写的。为了介绍每一章的主要内容，并给出解题所必需的公式，在各章的前面都有理论概述部分。全书分二十一章共有八百余题，其中例题和有提示的习题各占四分之一左右，其余为习题，每题都附有答案。为适应不同的教学需要，书中也包括少部分难度较高的例题和习题，读者可根据不同的需要选择使用。本书除供力学专业的大学生和研究生使用外，也可供其他工科专业的大学生和研究生使用，并可供力学教师和有关工程技术人员参考。

本书主编是清华大学副教授徐秉业。具体编写分工为：一、二、三、四、五、七章由刘信声同志编写，六、八、十一、十二章由孙学伟同志编写，九、十三、十四、十五章由黄炎副教授编写，十、十六、十七、十八、十九、二十、二十一章由徐秉业编写。

担任本书主审工作的浙江大学林钟祥同志对全书进行了认真、细致的审查，提出了许多宝贵的修改意见。浙江大学王景美同志也审阅了部分初稿。在编写过程中，还得到了浙江大学、西安交通大学、大连工学院、华东水利学院等单位有关同志的支持和帮助。最后由第一机械工业部教材编辑室孙祥根同志对本书进行了全面的校订工作，对提高本书质量作出了很大的努力。作者对以上同志表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中一定会有不少错误和不妥之处，诚恳地希望读者给予批评指正。

符 号 表

A	面积
D	板的抗弯刚度，常数
E	杨氏模量
F	力
F_x、F_y、F_z	表面力直角坐标分量
F_r、F_θ、F_z	表面力柱坐标分量
G	剪切弹性模量
I_y、I_z	截面对 y 或 z 轴的惯性矩
I_p	截面极惯性矩
I_1、I_2、I_3	应力第一、第二、第三不变量
I'_1、I'_2、I'_3	应变第一、第二、第三不变量
J_1、J_2、J_3	应力偏量第一、第二、第三不变量
K	体积弹性模量
L	功
L^*	余功
M	弯矩，力矩
M_y、M_z	在 xz 或 xy 平面内的弯矩
M_t	扭矩
M_s	初始屈服弯矩
M_e	弹性极限弯矩
M_p	塑性极限弯矩
N	轴向力
P	集中外力
Q	剪力，热量
R	杆的半径
R_A、R_B	支反力
S_y、S_z	截面对于 y 轴或 z 轴的静矩
S_1、S_2、S_3	主应力偏量
T	温度
U	总应变能
U^*	总应变余能
U_v	体积变形应变能
U_f	形状变形应变能
V	体积
V	垂直反力
W	单位体积应变能，单位体积单位时间热源散热量
$\dot{W}$	塑性变形功率
W^*	单位体积应变余能
W_y、W_z	截面抗弯系数
Z	Westergaard 应力函数
a、b	椭圆半径，柱或盘的内外半径
a	正方形的边长
$b(y)$、$b(z)$	高度为 y 或 z 的截面宽度
c	材料的比热
d	柱体的直径
d_i、d_e	柱体的内、外直径
e_{ij}	应变偏量分量
f_x、f_y、f_z	单位体积力分量
g	重力加速度
h	矩形截面的高度，相对导热系数
l	杆的长度
m	质量
l、m、n	外法线方向余弦
n	安全系数，外法线
p	表面正压力
q	分布载荷
p_i、p_e	内压力、外压力
q	均布载荷
r、θ、z	柱坐标
t	时间，厚度
u、v、w	直角坐标中的位移分量
v	速度
u_r、u_θ、u_z	柱坐标中的位移分量
u、w	轴对称位移分量
u^c、v^c、w^c	几何许可位移
u_r、u_θ、u_ϕ	球坐标中的位移分量
w	挠度
x、y、z	直角坐标
θ	体积应变，转角，单位长度扭转角
Θ	应力第一不变量
Φ、ψ、χ	应力函数
α	热膨胀系数
γ	比重，散热系数，剪应变
γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}	直角坐标剪应变分量
$\gamma_{r\theta}$、$\gamma_{\theta z}$、γ_{zr}	柱坐标中剪应变分量

$\gamma_{r\theta}$、$\gamma_{\theta\phi}$、$\gamma_{\phi r}$	球坐标中剪应变分量
δ_{ij}	Kronecker 符号
ε	正应变
ε_ν	方向余弦为 ν 线段的正应变
ϵ	对数应变(自然应变)
ε_x、ε_y、ε_z	直角坐标中正应变分量
ε_r、ε_θ、ε_z	柱坐标中正应变分量
ε_r、ε_θ、ε_ϕ	球坐标中正应变分量
ε_1、ε_2、ε_3	主应变分量
ϵ_H	颈缩时应变
ε_i	应变强度
ξ、η	平面曲线坐标分量
$\varkappa$	椭圆长短轴半径之半或厚壁筒内外半径之比
λ	Lamè 常数，柔度
λ	Levy-Mises、Prandtl-Reuss 理论的比例系数
μ	波桑比，内摩擦角
μ_σ、μ_ε	应力及应变的 Lode 参数
ρ	密度
ρ	杆的曲率半径
ρ	弹塑性分界半径
ρ_r、ρ_θ	板的主曲率半径
ρ_x、ρ_y	板的曲率半径
σ_x、σ_y、σ_z	直角坐标中的正应力分量
σ_r、σ_θ、σ_z	柱坐标中的正应力分量
σ_r、σ_θ、σ_ϕ	球坐标中的正应力分量
σ_e	弹性极限
σ_i	应力强度
σ^*	折算应力
σ_s	屈服极限
σ_t	真应力
σ_b	强度极限
σ_ν	外法线为 ν 截面上的正应力
σ_R	残余应力
τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}	直角坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta z}$、τ_{zr}	柱坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta\phi}$、$\tau_{\phi r}$	球坐标中的剪应力分量
τ_1、τ_2、τ_3	主剪应力
τ_ν	外法线为 ν 截面上的剪应力
ϕ	总扭转角
ω	角速度
ω_p	极限转速
σ_0	平均应力，八面体正应力
τ_0	八面体剪应力
ε_0	八面体正应变
γ_0	八面体剪应变
ψ	扭转翘曲函数
ν	外法线

目　　录

第一篇　弹性力学部分

第二篇 塑性力学部分

第一篇　弹性力学部分

第一章　应 力 分 析

理 论 概 述

一、一点的应力状态

1．在任意 x、y、z 直角坐标系中，可用九个应力分量表示一点的应力状态，其中有三个正应力 σ_x、σ_y、σ_z 以及六个剪应力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{yx}、τ_{zy}、τ_{xz}。

表示物体一点应力状态的九个应力分量组成应力张量。九个应力分量是应力张量的分量。应力张量记作

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{pmatrix}$$

上式等号右端中，以 σ_x、σ_y、σ_z 为主对角线的两侧，其对称的分量是相等的。亦即，应力张量是对称张量。

2．受已知载荷作用的物体中，通过已知点的任意斜截面上的总应力在坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned}p_{\nu x}&=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}\\ p_{\nu y}&=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy}\\ p_{\nu z}&=l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

式中　l、m、n 是法线为 ν 的斜截面的方向余弦。

斜截面上总应力在法线方向上的分量(正应力)和切线方向上的分量(剪应力)为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\nu&=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+n^2\sigma_z+2lm\tau_{xy}+2mn\tau_{yz}+2nl\tau_{zx}\\ \tau_\nu&=\sqrt{p_\nu^2-\sigma_\nu^2}\end{aligned}\right\}\tag{1-2}$$

式中　$p_\nu^2=p_{\nu x}^2+p_{\nu y}^2+p_{\nu z}^2$。

3．当坐标轴变换时，应力分量的变换公式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x'}&=l_1^2\sigma_x+m_1^2\sigma_y+n_1^2\sigma_z+2l_1m_1\tau_{xy}+2m_1n_1\tau_{yz}+2n_1l_1\tau_{zx}\\ \sigma_{y'}&=l_2^2\sigma_x+m_2^2\sigma_y+n_2^2\sigma_z+2l_2m_2\tau_{xy}+2m_2n_2\tau_{yz}+2n_2l_2\tau_{zx}\\ \sigma_{z'}&=l_3^2\sigma_x+m_3^2\sigma_y+n_3^2\sigma_z+2l_3m_3\tau_{xy}+2m_3n_3\tau_{yz}+2n_3l_3\tau_{zx}\\ \tau_{x'y'}&=l_1l_2\sigma_x+m_1m_2\sigma_y+n_1n_2\sigma_z+(l_1m_2+m_1l_2)\tau_{xy}\\ &\quad+(m_1n_2+n_1m_2)\tau_{yz}+(n_1l_2+l_1n_2)\tau_{zx}\\ \tau_{y'z'}&=l_2l_3\sigma_x+m_2m_3\sigma_y+n_2n_3\sigma_z+(l_2m_3+m_2l_3)\tau_{xy}\\ &\quad+(m_2n_3+n_2m_3)\tau_{yz}+(n_2l_3+l_2n_3)\tau_{zx}\\ \tau_{z'x'}&=l_3l_1\sigma_x+m_3m_1\sigma_y+n_3n_1\sigma_z+(l_3m_1+m_1l_3)\tau_{xy}\\ &\quad+(m_3n_1+n_3m_1)\tau_{yz}+(n_3l_1+l_3n_1)\tau_{zx}\end{aligned}\right\}\tag{1-3}$$

式中　新坐标轴 x'、y'、z' 与原坐标轴 x、y、z 之间夹角的余弦 l、m 和 n 如下表所示。

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

4．当斜截面上只有正应力，而没有剪应力，则作用于该面上的总应力就是主应力。为了求出主应力 σ_1、σ_2、σ_3，利用公式

$$\left.\begin{aligned} l(\sigma_x-\sigma)+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}=0 \\ l\tau_{xy}+m(\sigma_y-\sigma)+n\tau_{zy}=0 \\ l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n(\sigma_z-\sigma)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

因为 l、m、n 不能同时为零，所以式(1-4)的系数行列式必须为零。将此行列式展开，得

$$\sigma^3-\sigma^2I_1+\sigma I_2-I_3=0 \tag{1-5}$$

式中　I_1、I_2 和 I_3 分别叫作应力张量的第一、第二和第三不变量，且

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$
$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2$$
$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2$$

三次方程(1-5)称为该应力状态的特征方程，它的三个根 σ_1、σ_2、σ_3 是实根，即所求的主应力。主应力是通过一点所有各个截面上正应力中的最大值和最小值(绝对值)。

若通过一点所引出的三个互相垂直的平面上只作用着主应力，则这些面称为主平面。主平面的法线方向称为主方向。将所求得的三个主应力依次代入式(1-4)的任意两个方程，并利用关系式 $l^2+m^2+n^2=1$，即可求得三个主平面的三组方向余弦。

5．在与主方向成 45° 角的平面上，剪应力取驻值，其大小为

$$\left.\begin{aligned} \tau_3=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \\ \tau_1=\pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \\ \tau_2=\pm\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

若主应力 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则最大剪应力为

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

6．取坐标面与主平面相重合，在坐标系中作八个斜截面，使它与主平面成等角倾斜，这八个面形成一个正八面体。在八面体的面上的正应力和剪应力分别为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0&=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \\ \tau_0&=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \\ &=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} \\ &=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

八面体面上的正应力 σ_0 也称为物体中一点的平均正应力。

当物体中一点的三个主应力相等，且为 σ_0 时，这点的应力状态用下列应力张量来表示

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

上式称为应力球形张量。

将任意应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 减去再加上球形应力张量，得

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}=\begin{pmatrix} \sigma_x-\sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

上式中第一个张量称为应力偏斜张量，或简称应力偏量，以 $\boldsymbol{S}_{ij}$ 表示，其中九个分量称为应力偏量的分量。

在一般情况下，应力张量可以表示为应力偏斜张量和应力球形张量之和。

二、平衡(运动)方程

1．在直角坐标中，由所研究的物体中取出无穷小的正六面体的平衡(运动)方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f_y=0\left(=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\left(=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式中　f_x、f_y、f_z 是单位体积的体积力在坐标轴上的投影。

当物体处于运动状态时，考虑到惯性力，平衡方程(1-8)的右端不等于零，而应当等于括号内的量。

力矩平衡条件给出互相垂直平面上剪应力相等的结果，即

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

该结果在任何正交坐标系中都是正确的，因此，一点的应力状态可由六个应力分量确定，而平衡方程则为三个。

2．在柱坐标 r、θ、z 中的平衡(运动)方程是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+f_\theta=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+f_z=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

3．在球坐标 r、θ、φ 中的平衡(运动)方程是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}[2\sigma_r-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)+\tau_{\varphi r}\operatorname{ctg}\varphi]+f_r=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}[3\tau_{r\theta}+2\tau_{\varphi\theta}\operatorname{ctg}\varphi]+f_\theta=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\right) \\ &\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}[3\tau_{r\varphi}+(\sigma_\varphi-\sigma_\theta)\operatorname{ctg}\varphi]+f_\varphi=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

三、边界条件

若物体表面单位面积上的面力分量为 F_x、F_y、F_z，则力的边界条件可表示为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}=F_x \\ l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{zy}=F_y \\ l\tau_{xz}+m\tau_{yz}+n\sigma_z=F_z \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

当物体表面上仅给出面力的合力时，可以利用圣维南(Saint-Venant)原理，将合力变换成静力等效(主向量相同，对于同一点的主矩也相同)的分布力，在远离该表面处可以不考虑这种变换对应力分布的影响。

§1-1 一点的应力状态

1-1 试证明应力的三个主方向互相垂直。

提示：为证明 σ_1 的作用面 1 和 σ_2 的作用面 2 互相垂直，可将面 1 的方向余弦 l_1、m_1、n_1 和面 2 的方向余弦 l_2、m_2、n_2 分别代入式(1-4)，进行适当运算整理后可得

$$(\sigma_2-\sigma_1)(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)=0$$

若 $\sigma_2\neq\sigma_1$，则有

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

该式表示面 1 与面 2 互相垂直。同样可以证明面 2 与面 3，面 3 与面 1 也互相垂直。

1-2 试证明由式(1-5)求得的主应力 σ_1、σ_2、σ_3 为实根。

提示：利用前题中得到的公式：

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

若 σ_1 为复根，则 σ_2 与它共轭，面 2 的方向余弦 l_2、m_2、n_2 将是 l_1、m_1、n_1 的共轭复数。这样，上面等式左端的三项均为正值，这是不可能的。

1-3 试列出任意截面上剪应力的表达式，并以主应力和被研究的截面相对于主平面的方向余弦来表示。

答案：$\tau_\nu^2=l^2m^2(\sigma_1-\sigma_2)^2+m^2n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+n^2l^2(\sigma_3-\sigma_1)^2$。

1-4 若在直角坐标中任意一点的应力分量以 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 来表示，试证：

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

是与坐标方向无关的常数，而且有

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$

同时，以下两个量

$$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2$$

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2$$

也是与坐标方向无关的不变量。

1-5 已知 $\sigma_x=\sigma_1$，$\sigma_y=\sigma_2$，$\sigma_z=\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ 试求与 xy 平面垂直的任意斜截面上的正应力和剪应力。

答案：$\sigma_\nu=l^2\sigma_1+m^2\sigma_2$　　$\tau_\nu=lm(\sigma_1-\sigma_2)$。

1-6 在物体中的某一点，所有正应力分量都等于零，即 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=0$，其余三个剪应力分量中的一个为零(如 $\tau_{xy}=0$)，试求该点的主应力。

答案：$\sigma_1=\sqrt{\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2}$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\sigma_1$。

1-7 物体中某点的应力分量是：$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$，$\sigma_z=200a$，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=100a$，试求该点的主应力。

答案：$\sigma_1=273a$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-73a$。

1-8 试以主应力表示与三个应力主轴成等角倾斜面(正八面体)上的应力分量，并证明它们是坐标变换时的不变量。

解：取σ_1、σ_2、σ_3的方向为坐标轴x、y、z的方向。正八面体面的方向余弦为$l=m=n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。在图1-1中有：$\sigma_x=\sigma_1$，$\sigma_y=\sigma_2$，$\sigma_z=\sigma_3$，剪应力分量全为零。将应力分量代入式(1-1)，得

$$p_x=\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}},\quad p_y=\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}},\quad p_z=\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

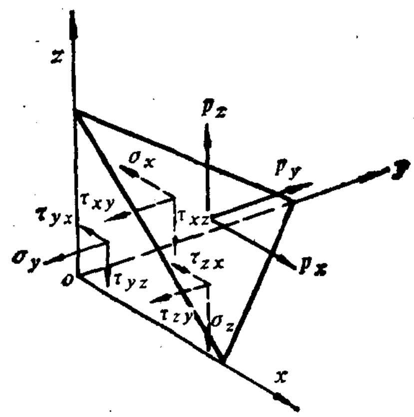


图 1-1

以σ_0表示正八面体面上的正应力，τ_0表示剪应力，则合力为

$$p_0=\sqrt{\sigma_0^2+\tau_0^2}=\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}$$

而σ_0和τ_0分别为

$$\sigma_0=lp_x+mp_y+np_z=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}I_1$$

$$\tau_0=\left[\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-\frac{1}{9}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}[2I_1^2-6I_2]^{\frac{1}{2}}$$

由计算结果可知，正八面体面上的应力分量是不变量。

1-9 一点的主应力如下：

(a) $\sigma_1=75a$，$\sigma_2=50a$，$\sigma_3=-50a$

(b) $\sigma_1=50a$，$\sigma_2=50a$，$\sigma_3=-100a$

试求正八面体面上的总应力、正应力及剪应力。

答案：(a) $p_0=59.5a$，$\sigma_0=25a$，$\tau_0=54.1a$

(b) $p_0=70.7a$，$\sigma_0=0$，$\tau_0=70.7a$。

1-10 已知物体某点的应力分量为$\sigma_x=50a$，$\sigma_y=0$，$\sigma_z=-30a$，$\tau_{xy}=50a$，$\tau_{yz}=-75a$，$\tau_{zx}=80a$。试求方向余弦为$l=\dfrac{1}{2}$、$m=\dfrac{1}{2}$和$n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的面ν上的总应力、正应力及剪应力。

答案：$p_\nu=111.5a$，$\sigma_\nu=26a$，$\tau_\nu=108.5a$。

1-11 已知物体某点的应力分量为$\sigma_x=50a$，$\sigma_y=80a$，$\sigma_z=-70a$，$\tau_{xy}=-20a$，$\tau_{yz}=60a$，$\tau_{zx}=0$。试计算主应力值，并求出主方向。

解：首先求出应力不变量为

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=60a$$

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=-9100a^2$$

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2=-432000a^3$$

代入式(1-5)，得

$$\sigma^3-60a\sigma^2-9100a^2\sigma+432000a^3=0$$

为了计算的方便，引进如下表达式

$$\frac{\sigma}{100a}=x$$

则上式成为
$$x^3-0.6x^2-0.91x+0.432=0$$

再对上式进行变量替换 $x=y+\frac{0.6}{3}=y+0.2$ 以消去二次项，得

$$y^3-1.03y+0.234=0$$

上式的判别式为

$$\Delta=\left(\frac{0.234}{2}\right)^2+\left(-\frac{1.03}{3}\right)^3=-0.0267<0,$$

故有三个实根，可用三角解法求得，为此引进一个辅助角 φ，令

$$\cos 3\varphi=-\frac{0.234}{2\sqrt{\left(\frac{1.03}{3}\right)^3}}=-0.582,$$

即 $3\varphi=125°36'$，而 $\varphi=41°52'$，因此有

$$y_1=2\sqrt{\frac{1.03}{3}}\cos 41°52'=0.873$$

$$y_2=2\sqrt{\frac{1.03}{3}}\cos(41°52'+120°)=-1.1104$$

$$y_3=2\sqrt{\frac{1.03}{3}}\cos(41°52'+240°)=0.241$$

由此得 $x_1=1.073, x_2=-0.914, x_3=0.441$。如令 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则得 $\sigma_1=107.3a$，$\sigma_2=44.1a$，$\sigma_3=-91.4a$。

为检查所得结果的正确性，可计算应力的第三不变量 $I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3=-432000a^3$，该值与前面所得结果一致。

将所得三个主应力值依次代入式(1-4)中的任意二式，并利用关系式：$l^2+m^2+n^2=1$，就可以得到三个主平面的三组主方向余弦分别为 0.314，-0.900，-0.303；0.948，0.282，0.146；-0.048，0.337，-0.940。

为了检查所得结果的正确性，可以利用任意两个垂直的主方向必须满足 $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ 的条件。将上面的结果代入后，可以发现，所得到的结果是满足这种要求的。

1-12 已知物体某点的应力分量分别为

(a) $\sigma_x=100a$, $\sigma_y=50a$, $\sigma_z=-10a$, $\tau_{xy}=40a$, $\tau_{yz}=30a$, $\tau_{zx}=-20a$

(b) $\sigma_x=50a$, $\sigma_y=0$, $\sigma_z=-30a$, $\tau_{xy}=50a$, $\tau_{yz}=-75a$, $\tau_{zx}=80a$

(c) $\sigma_x=a$, $\sigma_y=-a$, $\sigma_z=a$, $\tau_{xy}=0$, $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=-a$

试计算主应力和最大剪应力。

答案： (a) $\sigma_1=122.2a$, $\sigma_2=49.4a$, $\sigma_3=-31.7a$, $\tau_{max}=77.0a$

(b) $\sigma_1=99.3a$, $\sigma_2=58.8a$, $\sigma_3=-138a$, $\tau_{max}=118.6a$

(c) $\sigma_1=2a$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-a$, $\tau_{max}=1.5a$。

1-13 已知物体中某点的应力分量为 $\sigma_x=0$, $\sigma_y=2a$, $\sigma_z=a$, $\tau_{xy}=a$, $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=2a$。试求作用在通过此点,方程为 $x+3y+z=1$ 的平面上法向应力和切向应力的数值。

提示和答案: 若平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$, 则其方向余弦为

$$l=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad m=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad n=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

应力分量为 $\sigma_\nu=2.636a$, $\tau_\nu=0.771a$。

1-14 已知物体中某点的应力分量为 $\sigma_x=200a$, $\sigma_y=0$, $\sigma_z=-100a$, $\tau_{xy}=400a$, $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=300a$。试求作用在通过此点, 且平行于方程为 $x+2y+2z=6$ 的平面上, 沿 x、y、z 方向的三个应力分量。

答案: $p_{\nu x}=533a$, $p_{\nu y}=133a$, $p_{\nu z}=33a$。

1-15 已知物体某点 $(x_0、y_0、z_0)$ 的应力分量为 $\sigma_x=100a$, $\sigma_y=50a$, $\sigma_z=-100a$, $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。试求作用于方程为 $(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0$ 的面上的正应力和剪应力。

答案: $\sigma_\nu=16.7a$, $\tau_\nu=85.0a$。

1-16 已知物体某点的应力分量为 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}, 而 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。 试求主应力以及通过 z 轴并与 x 轴成 α 角的面 (图 1-2) 上的正应力和剪应力。

答案:
$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_\nu=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+\tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$\tau_\nu=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha。$$

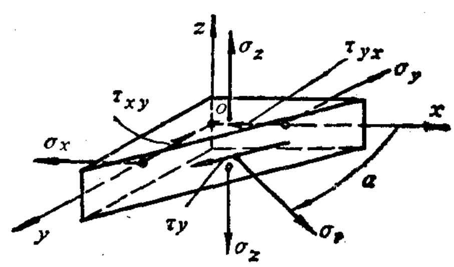


图 1-2

1-17 已知物体中某点的应力分量为 $\sigma_x=100a$, $\sigma_y=200a$, $\sigma_z=300a$, $\tau_{xy}=-50a$, $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。试求主应力、主剪应力、八面体剪应力及主应力作用面的方向。

答案: $\sigma_1=220.7a$, $\sigma_2=79.3a$, $\sigma_3=300a$

$\tau_1=110.4a$, $\tau_2=39.7a$, $\tau_3=70.7a$

$\tau_0=91.3a$

(0, 0, 1), (0.924, 0.383, 0), (0.383, 0.924, 0)。

1-18 已知圆柱体在轴向拉力、弯矩及扭矩的作用下,圆柱表面上某点的应力分量为 $\sigma_r=0$, $\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=0$, $\sigma_z=a$, $\tau_{z\theta}=2a$, $\sigma_\theta=0$。试求该点的主应力。

答案: $\sigma_1=1.56a$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-2.56a$。

1-19 当应力偏量的分量和主应力偏量的分量分别为

$$S_x=\sigma_x-\sigma_0,\ S_y=\sigma_y-\sigma_0,\ S_z=\sigma_z-\sigma_0$$
$$S_1=\sigma_1-\sigma_0,\ S_2=\sigma_2-\sigma_0;\ S_3=\sigma_3-\sigma_0$$

试证明,应力偏量不变量为

$$J_1=0,\quad J_2=-\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2+S_3^2),\quad J_3=\frac{1}{3}(S_1^3+S_2^3+S_3^3)$$

而主应力偏量的分量 S_1、S_2、S_3 可由方程

$$S^3-J_2S-J_3=0$$

求根得到,其中

$$J_2=-(S_yS_z+S_zS_x+S_xS_y)+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2$$
$$J_3=S_xS_yS_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-(S_x\tau_{yz}^2+S_y\tau_{zx}^2+S_z\tau_{xy}^2)。$$

提示：取应力偏量行列式为零的条件即可得到 $S^3-J_2S-J_3=0$。

1-20 如 I_1、I_2、I_3 为应力张量的第一、二、三不变量，J_2、J_3 为应力偏量的第二、三不变量。试证明：

$$J_2=\frac{1}{3}I_1^2-I_2$$

$$J_3=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{2}{27}I_1^3$$

证：首先计算 J_2，得

$$J_2=\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_0)^2+(\sigma_2-\sigma_0)^2+(\sigma_3-\sigma_0)^2]=\frac{1}{2}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-3\sigma_0^2]$$
$$=\frac{1}{3}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1] \tag{1}$$

式中 $\sigma_0=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}I_1$

其次计算 $\frac{1}{3}I_1^2-I_2$，得

$$\frac{1}{3}I_1^2-I_2=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$
$$=\frac{1}{3}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1] \tag{2}$$

由式(1)和(2)可知，等号的右端相同，因此，得

$$J_2=\frac{1}{3}I_1^2-I_2$$

最后计算 J_3，得

$$J_3=(\sigma_1-\sigma_0)(\sigma_2-\sigma_0)(\sigma_3-\sigma_0)$$
$$=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_0(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)+\sigma_0^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)-\sigma_0^3$$
$$=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{1}{9}I_1^3-\frac{1}{27}I_1^3=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{2}{27}I_1^3$$

即
$$J_3=I_3-\frac{1}{3}I_1I_2+\frac{2}{27}I_1^3。$$

1-21 试证明如下关系式：

$$\tau_0=\sqrt{\frac{2}{3}J_2}$$
$$\tau_0=\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2+2(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}。$$

1-22 当 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$ 时，如令 $\mu_\sigma=\dfrac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$，试证明：

$$\frac{\tau_0}{\tau_{max}}=\frac{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}}{3}$$

且该值在 0.816～0.943 之间。

提示：利用以下关系式进行证明

$$\tau_0=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2}$$

$$\tau_1=-\frac{1+\mu_\sigma}{2}\tau_{\max},\quad \tau_2=\tau_{\max},\quad \tau_3=-\frac{1-\mu_\sigma}{2}\tau_{\max}。$$

1-23 已知物体中某点的主应力为 σ_1、σ_2、σ_3。试求剪应力为极值时的方向余弦及主剪应力的表达式。

解：取 x、y、z 轴的方向与 σ_1、σ_2、σ_3 的方向一致。由式(1-2)得

$$\tau_\nu^2=l^2\sigma_1^2+m^2\sigma_2^2+n^2\sigma_3^2-(l^2\sigma_1+m^2\sigma_2+n^2\sigma_3)^2 \tag{1}$$

利用关系式 $l^2+m^2+n^2=1$，消去式(1)中的 n，得

$$\tau_\nu^2=l^2\sigma_1^2+m^2\sigma_2^2+(1-l^2-m^2)\sigma_3^2-[l^2\sigma_1+m^2\sigma_2+(1-l^2-m^2)\sigma_3]^2 \tag{2}$$

取 $\dfrac{\partial}{\partial l}(\tau_\nu^2)=0$，$\dfrac{\partial}{\partial m}(\tau_\nu^2)=0$，得

$$\left.\begin{aligned}2l\sigma_1^2-2l\sigma_3^2-2[l^2\sigma_1+m^2\sigma_2+(1-l^2-m^2)\sigma_3](2l\sigma_1-2l\sigma_3)=0\\2m\sigma_2^2-2m\sigma_3^2-2[l^2\sigma_1+m^2\sigma_2+(1-l^2-m^2)\sigma_3](2m\sigma_2-2m\sigma_3)=0\end{aligned}\right\}$$

将上两式化简，得

$$\left.\begin{aligned}l\left[l^2(\sigma_1-\sigma_3)+m^2(\sigma_2-\sigma_3)-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\right]=0\\m\left[l^2(\sigma_1-\sigma_3)+m^2(\sigma_2-\sigma_3)-\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right]=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

若 $l=m=0$，则 $n=\pm1$。

若 $l=0$，则 $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$n=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

若 $m=0$，则 $l=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$n=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

用同样的方法消去 m 和 l，最后得到如下表所列的方向余弦的六组解答。

l	0	0	±1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
m	0	±1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n	±1	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

表中前三列所定的平面是开始所设的主平面，在这些面上剪应力为零。后三列所决定的平面是包含三个主轴之一，并与其余两个主轴成45°角的平面。将方向余弦数代入式(1)，得

$$\left.\begin{aligned}\tau_3=\pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\\\tau_1=\pm\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\\\tau_2=\pm\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

1-24 已知物体中某点的主应力为 σ_1、σ_2、σ_3。试说明用莫尔圆图解法确定空间应力状态的方法，并证明该方法的正确性。

解：在法线为 ν 的平面上，正应力以 σ_ν 表示，剪应力以 τ_ν 表示，法线 ν 与主轴1、2、3的