



# 数学世界的 探奇之旅

[英] 布赖恩·克莱格——著  
(Brian Clegg)

胡小锐——译

The Uncanny  
Relationship  
of  
Mathematics  
and  
the Physical  
World

品读数学与人类的浪漫故事

在丰富多彩的现实世界中，  
探寻数学的秘密和魔力，

ARE  
NUMBERS  
REAL?

中信出版集团

+

# 数学世界的 探奇之旅

[英] 布赖恩·克莱格——著  
(Brian Clegg)

胡小锐——译



ARE  
NUMBERS  
REAL?

## 图书在版编目 ( CIP ) 数据

数学世界的探奇之旅 / ( 英 ) 布赖恩·克莱格著 ;

胡小锐译. --北京: 中信出版社, 2017.10

书名原文: Are Numbers Real ?

ISBN 978-7-5086-8033-0

I. ①数… II. ①布… ②胡… III. ①数学-普及读  
物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字 ( 2017 ) 第 199309 号

Are Numbers Real?: The Uncanny Relationship of Mathematics and the Physical World

Text Copyright © 2016 by Brian Clegg

Published by arrangement with St. Martin's LLC.

Simplified Chinese translation copyright © 2017 by CITIC Press Corporation

ALL RIGHTS RESERVED

本书仅限中国大陆地区发行销售

## 数学世界的探奇之旅

著 者: [英] 布赖恩·克莱格

译 者: 胡小锐

出版发行: 中信出版集团股份有限公司

( 北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029 )

承 印 者: 北京画中画印刷有限公司

开 本: 880mm × 1230mm 1/32

版 次: 2017 年 10 月第 1 版

京权图字: 01-2017-0697

书 号: ISBN 978-7-5086-8033-0

定 价: 49.00 元

印 张: 9.5 字 数: 180 千字

印 次: 2017 年 10 月第 1 次印刷

广告经营许可证: 京朝工商广字第 8087 号

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题, 本公司负责调换。

服务热线: 400-600-8099

投稿邮箱: author@citicpub.com

献给

吉莲、丽贝卡和切尔西

当把数学原理应用于现实时，它们是不确定的；当它们确定时，又不适用于现实。

——阿尔伯特·爱因斯坦，《相对论杂谈》（1922）



第1章 虚拟的“居民”？ / 001

第2章 史前人类的计数系统 / 015

第3章 毕达哥拉斯：万物皆是数字 / 031

第4章 欧几里得：几何定理的完美证明 / 051

第5章 阿基米德：用沙粒填满宇宙 / 063

第6章 斐波那奇：阿拉伯数字的登场 / 073

第7章 培根：数学是自然科学的钥匙 / 093

第8章 高斯：神通广大的虚数 /109

第9章 牛顿：微积分与宇宙观 /117

第10章 卡尔达诺：概率与“水晶球” /133

第11章 麦克斯韦：关于电磁波的数学方程组 /161

第12章 康托尔：让一众科学家挠头的无穷大 /177

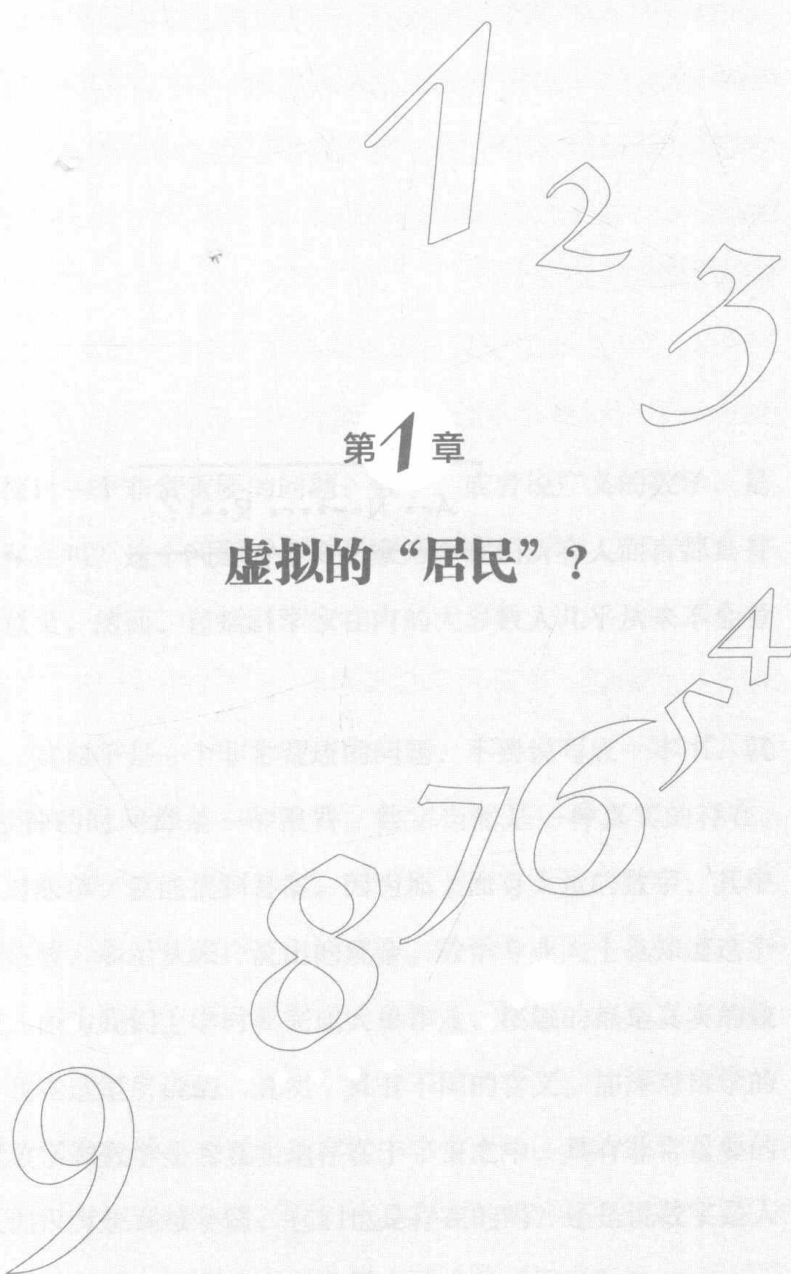
第13章 爱因斯坦：量子物理与抽象数学 /211

第14章 诺特：对称之美与隐形恶龙 /235

第15章 数学的力量？ /261

致谢 /283

注释 /285



# 第1章

## 虚拟的“居民”？

---

Are Numbers Real?

---

本书将探讨一个非常重要的问题：数字，或者说广义的数学，是一种真实的存在吗？这个问题对于科学家乃至我们所有人而言都具有非常重要的意义。然而，包括科学家在内的大多数人几乎从来不会考虑这个问题。

乍一看，这似乎是一个非常荒唐的问题，不要说写成一本书，就是考虑 30 秒钟的时间都是一种浪费。数字当然是一种真实的存在。看一眼银行对账单，就能找到答案，因为那上面有大量的数字，其中大多数都是负数，表示从账户流出的现金。数学专业人士也知道这个问题的答案，因为我们上学时要完成大量作业，接触的都是真实的数字。但是，我在这里所说的“真实”具有不同的含义。加深对科学的理解，确定数字和数学是否真实地存在于宇宙之中，具有非常重要的意义。在人们没有想到数字前，它们也是存在的吗？还是说数字是人类的重要发明，是一个重要的虚幻世界中的虚拟“居民”？

我们知道，数学可以完全脱离现实，与现实世界不发生任何本质上的联系。事实上，数学家一直是这样做的。数学（mathematics或maths）的最终目的就是制定一系列规则，帮助我们完成整个过程并最终得出某个结果。在定义这些规则时，我们可以使其与我们对现实世界的观察结果保持一致，也可以根据我们的意愿，让它与现实世界截然不同，以产生怪诞而美妙的效果。有的数学家就喜欢这种遨游另类世界的梦幻之旅。

举一个简单的例子。现实世界有三个空间维度（然而，物理学的弦理论试图结合考虑重力等自然力，要求空间具有9个或10个维度），但是空间有1、2、4、79个还是5 000个维度，对于数学而言都不是问题。“大魔群”这个数学概念深受数学界的欢迎，该群的元素是在196 883维空间中旋转。在研究“大魔群”时，我们难免会想起《绿野仙踪》中那句非常经典的话：“托托，我觉得我们现在已经不在堪萨斯了。”

尽管数学家在研究这些群时，考虑的都是纽结这种非常普通的内容，但是他们对纽结的定义与我们系鞋带时打的绳结没有任何相似之处。出于便利实用的考虑，这些数学家规定他们用来打结的“绳索”必须头尾相接，形成一个不间断的环。我们知道现实世界的绳结是不一样的，虽然数学家（他们不是非常关注世俗生活）也知道两者之间的不同，但是他们并不在乎，因为他们有权制定这样的规则。

同样的道理，我们也可以设计一个数学系统，并规定 $2 + 2 = 5$ 。这个等式在现实世界行不通，但是在设计一个数字系统时，完全可以

给出这样的定义。数学上有一个常用的系统，叫作时钟算术，可以将  $2 + 2$  的值定义为 0 或者 1。在这个系统中，数字并不是一直累加，而是像钟表上的数字一样，达到某个特定值就会重新变为 0。的确，这些数字与现实世界存在某种相似性。从名称可以看出，时钟算术与时钟有相似之处。例如，在 12 小时制的钟面上， $9 + 6 = 3$ 。与传统的计数方式相比，这种运算可以更好地表示循环变化。这个例子说明两个问题：第一，数学具有任意性；第二，下定义时必须谨慎。尽管钟表上的数字 9 与数山羊时的数字 9 有某些相同之处，但两者是不一样的。

反过来，从现实世界这个角度来看，即使没有丰富的数学知识，我们也能走好自己的人生旅程。长久以来，绝大多数人都是这样生活的。一些非常简单的算术就像是预先编写的程序一样。比如，在碗中放入一个东西，然后再放一个，又悄悄地把第二个藏回手心。这时候，无论是狗还是小孩，在看到碗中只有一个东西时，都会感到惊讶。对于哺乳动物而言，“ $1 + 1 = 2$ ”似乎是一个初级的程序。毫无疑问，这也是一个非常重要的程序，因为在面对超过一个敌人时，它可以帮助你计算取胜的可能性。其余的数学知识，大多是后来我们不断获取的。然而，数学的重要意义已经得到了证明。

如果没有数学，在现代文明中占有重要地位的科学与技术几乎都会化为泡影。数学贯穿于我们的生活当中，我们不仅在日常活动（如商店中发生的交易）中要用到数学，在了解疾病分布或者选举结果的影响力时也离不开数学。数学是一门非常重要的学科，它可以帮助我

们理解周围世界的基础结构和原理，因此我们必须好好掌握这门学科。但是，遗憾的是，很多人发现数学非常难学，甚至觉得学数学是一件很痛苦的事，因此千方百计地逃避这门学科。2012年，英国有一篇关于世界数学日的文章指出：

我们还知道，很多成年人就是不喜欢数学，也不知道为什么要学习数学。在说到自己“数学学得不好”时，很多人一脸坦然，毫无羞愧之意。这种状况在世界其他地区并不多见。英国人对待数学的消极态度从孩童时期便开始了。有人认为，很多孩子在7—9岁时会遭遇对数学兴趣减退、成绩下降的问题，而且绝大多数孩子从此一蹶不振。他们的兴趣会发生转移，觉得数学枯燥乏味，到最后，他们会彻底放弃数学……随后，这个过程还会继续发生，兴趣不足与信心缺乏的问题又由父母传递给下一代。（斗胆提出一个问题：是不是也有老师参与其中呢？）

文章指出，英国人对待数学的态度尤其消极。而我认为，不仅在美国，在全世界很多地区都能看到同样的问题。其实，厌恶数学的态度古已有之。415年，奥古斯丁<sup>①</sup>说：“我们面临的危险……是数学家与魔鬼订立了契约，他们要玷污人类的灵魂，把人类牢牢地羁押在地狱之中。”显然，他在几何课上也没有找到多少乐趣。（这句话有一定的误导性。通常而言，奥古斯丁对学习数学是持支持态度的。引言中

---

<sup>①</sup> 奥古斯丁（354—430），古罗马基督教思想家，教父哲学的重要代表人物，著有《忏悔录》《论自由意志》《论三位一体》等。——译者注

的“数学家”一词其实应该译为“占星家”，但是，从中仍然可以看出很多人对数学持有消极态度。）

然而，如果教学方法得当，数学不仅学起来其乐无穷，而且在应用时可以发挥巨大的作用。数学的乐趣来源于数学难题和各种娱乐活动。当你的大脑为解决数学难题而飞速运转时（比如说，数学告诉你无穷大也有大有小），你就能深刻体会到数学的乐趣了。

在处理日常生活中的简单事务时，我们也许不需要掌握很多数学知识，而绝大多数人除了掌握一点儿算术知识以外，就对数学一无所知了。但是，在科学家和工程师努力了解事物的作用原理，并在此基础上构建产品时，数学就成了一个功能强大的工具，可以为他们提供灵感。没有数学，人们就难以理解自然世界并做出各种预测；没有数学，我用来写作本书的计算机以及为我们现代生活提供便利的其他科技也将不复存在。

首先，数学与自然界的运行规律密切相关。例如，数字与可触知对象可以相互匹配。但是，随着时间的推移，数字与现实逐渐分离开来。文艺复兴时期，数学家逐渐意识到他们是在玩一个规模巨大的游戏，他们可以自行制定规则，然后推动游戏的进程，并观察最终的结果。从此以后，理论数学就如脱缰野马般奔腾而去，只剩下应用数学与现实世界继续保持着密切的联系。数学家的想法与他们创建的数学世界，有时具有实际应用价值，有时则与实际生活没有任何联系。这两个不同结果的出现具有随机性（现在，这种情况也基本没有发生很大的变化）。这个大型游戏有一个奇怪的特点：一方面，它是完全开

放的；另一方面，它又表现出极强的限制性。数学研究覆盖哪些范围、可以制定哪些规则，全部取决于你，但是，一旦这些规则被认可，你就必须遵守。数学的世界里没有欺骗。

当我们考虑数字和现实的本质时，如果思维过于刻板，数学隐藏在深层次的随机性就有可能导致问题的发生。2015年，英国上诉法院（该法院的等级在英国法院系统中高居第二位）的三名法官在审理一个案件时，需要判断数字“1”的确切含义。当然，他们的判断与我们大多数人（甚至大多数的数学专业人士）的理解是不一样的。

这个案件是两家制药公司因为某种可以降低伤口敷料感染风险的化学溶液产生了纠纷，但是，令人意想不到的是，判决结果却导致英国法律修改了对数字“1”的定义。康维德公司生产的一种“浓度为1%—25%”的银基溶液受到专利保护，而它的竞争对手施乐辉公司生产的竞争产品是浓度为0.77%的银基溶液。后者认为，自己的产品不在竞争对手的专利保护范围之内。

早在2013年，这起纠纷就已经进入了审判程序。当时的法院认为，康维德专利保护范围下限中的“1”并不是表示“1”这个数值（即一个对象）。他们采用了一种在化学界比较常见但是在数学界并不多见的方法，认为这个值表示的是由两个有效数字界定的范围。根据这种“有效数字”规则，该一审法院认为0.95—1.5之间的所有数值都可以表示成“1”，而这种简单不对称的定义表明，施乐辉的产品没有触犯法律。上诉法院对这个说法感到不满，他们倾向于更为常见的

就近取整法，也就是说，他们认为“1”代表0.5—1.499 9之间的任意数值。这个判决结果让施乐辉陷入了困境，也说明数学上的决定具有随机性。

除非我们坚定地认为1不多不少正好是1，否则“1”就会有不同的定义。因此，在律师看来，“1—25”的范围中包括0.5。上诉法院法官克里斯托弗·克拉克说：“语言学家可以认为‘一’表示‘正好是一，既不能多，也不能少’。但是，对于经常从事艺术活动的人而言，这个字在不同的语境里可以突破整数的限制，表示一个数值范围。”他的这番话并没有多少意义，因为我们都不清楚他到底是怎么想的。

长期以来，数学家在处理数学问题时一直表现出明显的创造性（在这一点上，他们与律师截然不同）。有的公司为了开发新产品，允许员工尝试各种各样的想法和技术。在大多数情况下，他们不会生产出与商业世界有关的产品，但是他们偶尔也会推陈出新，设计出完美的新产品。数学家的研究与之有几分相似。比如，在他们开始研究负数的平方根（参见第8章），也就是虚数时，他们实际上是将数学这个游戏推向了新的发展路径。但是，随着事情的发展，他们为这些神奇的数字制定的各种规则，却在物理学和工程技术等领域发挥了巨大的作用。

在引入虚数的概念之前，没有哪一位科学家或者工程师能够做出这样的预言：“我们希望求得负数的平方根，因为它可以帮助解决我们所面临的问题。”同样，在设想出虚数之前，数学界也没有人会这

样想：“我们怎么解决摆在物理学家面前的这个问题呢？”数学家在提出新的概念以及制定一套相应的规则之后，通常不会很认真地考虑他的行为会引发哪些后果。但是，一段时间之后，各种应用就会应运而生。

总的来说，在 19 世纪之前，只要不是严重缺乏数学天赋，任何人都可以比较熟练地掌握数学这门基础的自然科学。根据我的经验，只要能学会分数的运算（很多人怎么都学不会，而且人数之多，实在令人吃惊），你就可以学会包括微积分基础（这门课程从名称上看似似乎挺简单，但其实难度不小）在内的所有内容。但是，到了 19 世纪，数学领域发生了两个变化，从此以后，普通大众与科学之间就多了一道鸿沟。

第一个变化是，人们在数学中使用的方法越来越复杂，学生必须在课后投入大量的时间，才能掌握这些方法。比如，你可以随便挑选一篇现代物理方面的论文，文章中可能至少会有一个在中学数学中学不到的数学方法。爱因斯坦在研究广义相对论时，需要别人帮助他解决数学上的问题。这件事一点儿都不奇怪，因为数学本身非常难，超出了爱因斯坦的能力范围。他是自然科学领域的大师，但数学却是他比较陌生的领域。

让数学变得曲高和寡的第二个变化是它与科学研究的关系发生了逆转。在 19 世纪之前，数学一直是为科学研究提供服务的，但是到了 20 世纪，数学逐渐占据了主导地位。例如，人们从数学中的对称性出发，试图将自然界中各种作用力的研究统一起来，但是，随着研