

高等学校试用教材

动态信号分析和仪器

华中理工大学 周舒梅 编

GAO DENG XUE
XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

高等学校试用教材

动态信号分析和仪器

华中理工大学 周舒梅 编

机械工业出版社

前 言

随着科学技术的进步及生产的发展,信号分析技术在各工程技术领域中的应用越来越广。为了适应这一发展的形势,把测试技术引向更深入更宽广的境地,全国高等工业学校电磁测量技术与仪表专业指导委员会决定将《动态信号分析与仪器》列入专业课程,并于1985年12月通过了该课程的教学大纲。

本书是根据该教学大纲的要求编写的。前面两章介绍了动态信号分析所必需的基础知识及基本理论;第三章详细讨论应用基本理论分析实际的确定性信号的方法;第四章对随机信号分析方法和基本理论做了简要的介绍;第五章介绍了一些主要的信号分析仪器。

动态信号分析技术理论性较强,实际应用又极为丰富。本书从专业的实际需要出发,在对基本理论进行了必要阐述之后,还列举了较多的实例以加强对基本概念的理解及提高应用信号分析技术的能力。

本书由湖南大学仪表教研室李孝文副教授主审。参加审稿会议的有哈尔滨工业大学电测仪表教研室赵新民教授、中国计量学院无线电教研室焦治平副教授、华中理工大学机械测试技术教研室卢文祥副教授。在编书过程中得到了天津电子仪器厂研究所马成良等高级工程师的关心并提供资料,还得到了华中理工大学自控系汪素尊副教授的帮助,在此一并致以谢意。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正。

编者

1988.7.于华中理工大学电力系

目 录

第一章 绪论	1	§ 3-5 由频谱计算时域波形	120
§ 1-1 信号与系统概述	1	§ 3-6 信号波形畸变分析	124
§ 1-2 信号分析的系统及内容	2	§ 3-7 快速卷积	127
§ 1-3 信号数字分析法的优点	4	习题	131
§ 1-4 信号分析技术应用概述	4	第四章 随机信号分析	133
§ 1-5 几种典型的信号	5	§ 4-1 随机信号的统计描述	133
习题	8	§ 4-2 相关函数及功率谱密度函数	141
第二章 信号分析的基础	9	§ 4-3 线性系统对随机信号的响应	151
§ 2-1 信号的时域分析	9	§ 4-4 统计特征量的估值误差	154
§ 2-2 信号的频域描述	18	§ 4-5 平均值估计	156
§ 2-3 傅里叶变换的基本性质	25	§ 4-6 相关函数估计	159
§ 2-4 卷积及卷积定理	37	§ 4-7 功率谱估计	163
§ 2-5 采样定理	41	§ 4-8 系统特性测试	172
§ 2-6 z 变换	49	§ 4-9 随机信号分析过程的一般性讨论	178
§ 2-7 离散傅里叶变换 (DFT)	56	习题	182
§ 2-8 快速傅里叶变换 (FFT)	62	第五章 动态测试仪器	184
§ 2-9 系统特性描述	72	§ 5-1 扫频信号发生器	185
§ 2-10 滤波器	86	§ 5-2 伪随机信号发生器	188
习题	92	§ 5-3 激振设备与振动试验系统	194
第三章 信号的频谱分析	95	§ 5-4 磁带记录器	197
§ 3-1 有限长信号的频谱分析	95	§ 5-5 数字存储示波器	201
§ 3-2 无限长信号的频谱分析	98	§ 5-6 频谱分析仪	204
§ 3-3 离散频谱分析的参数选择及细化 分析	106	§ 5-7 频率响应分析仪	210
§ 3-4 窗平滑技术	110	习题答案	214
		参考文献	217

第一章 绪 论

§ 1-1 信号与系统概述

动态信号是指幅值随时间而变化的各种信号，它一般简称为信号。动态信号广泛存在于自然界及工程领域之中，表现出事物在物理、化学、生物及各种工程领域中的变化现象，是物质运动的一种表现形式。例如，机械振动产生力信号、位移信号及噪声信号；喉部及口腔运动产生语音信号；大脑、心脏运动产生脑电及心电信号；电气网络参数变化产生电磁信号等。可见信号的产生形式是多种多样的，随时间变化的形式更是千变万化，且在随时间变化的动态规律中蕴含着其自身特征的丰富信息，所以信号是信息的表现形式，通过对信号的分析可以认识和获取这些信息，达到认识事物及改造事物的目的。

为了便于分析研究，人们从各种不同的角度对信号进行分类。

1. 确定性信号与随机信号 根据随时间变化形式是否有规律出发，信号可分为确定性信号与随机信号。信号随时间的变化服从于某种确定规律，能用确定的数学函数描述，对任一确定的时刻 t_0 ，信号有确定的函数值，就称之为确定性信号，例如，我们所熟悉的正弦信号。相反，如果信号不能用数学表达式严格确定，对一确定的时刻 t_0 的信号值不能预测，带有随意性，这种信号称之为随机信号。随机信号在客观世界中也是大量存在的，例如噪声。此外，信号在传递过程中可能受到某种偶然因素的严重干扰，使原来的确定性信号也带有一定的不确定性而成为随机信号。

2. 周期信号与非周期信号 根据信号随时间变化的规律是否周期地重现出发，信号可分为周期信号与非周期信号。对于周期信号，只要给出此信号在任一周期内的变化过程，便可确定它在所有其他时间内的规律性，而非周期信号不具有这种特性。

为了便于读者掌握起见，现将自然界中常见的三种信号示例于图 1-1 中。

3. 模拟信号与数字信号 根据信号的幅值及时间变量的取值是否连续出发，信号又可分为模拟信号与数字信号。模拟信号是指时间变量 t 和信号 $x(t)$ 值的变化都是连续的（当然其中可能包括有限几个间断点），可以取值于某一范围内的任意数值，因此，模拟信号又称为连续时间信号。而数字信号中的时间变量及信号值只能取某些离散值。在自然界中存在的原始信号大多数具有连续的模拟形式，而计算机及其他数字电路中的信号则具有数字

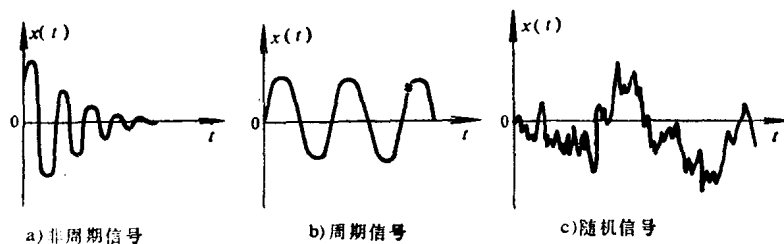


图1-1 三种动态信号

的形式，它们一般是模拟信号经过采样及量化处理形成的。

根据能量的特点，信号还可分为能量信号及功率信号。一般称信号存在于有限时间内，其能量有限的信号为能量信号，将信号存在于无限长时间内且能量为无限大，不能从能量方面考察只能用平均功率来描述的信号称为功率信号。显然，周期信号是功率信号，而只存在于有限时间内的非正弦信号是能量信号。

信号是时间的函数，它包含的全部信息量都体现在时间特性之中，如信号持续的时间长度及波形变化的速率。除了时间函数的形式外，信号也可以表示成以频率为变量的函数形式，即频域描述。在频域中，按频率的高低将信号中各频率分量的幅值与相位排列成频谱。每一信号的频谱都有一有效的频率范围，这个范围称为信号的频带，显然，信号的频带宽度与信号的时间特性是有关系的。

在信号分析中，信号是分析的直接对象，但信号总是依附于某个实际物理系统而存在并在系统内或系统间传递的，因此，与信号相关联的另一重要概念是系统。所谓系统，是指许多相互关联而又相互作用的事物组成的具有某种特定功能的整体。系统的形式是多种多样的。一般来说，系统可分为物质性的及非物质性的。自然界以及各种工程领域内存在的系统是物理性的，而政治经济结构及生产管理等系统是非物理性的。本书所涉及的系统是指前者。它们具有各种可能的形式，如运行中的各种机器、车辆，充满活力的生物体，各种复杂的网络或电气设备，以及完成转换与测量的各种传感器和仪器等。不论何种系统，它们内部充满各种信号，这些信号也携带着系统的信息，但从输入输出的角度来看，系统都承担着信号的转换及传递的任务，这可用图 1-2 所示的方框图表示。

图中方框表示某种系统； $x(t)$ 为输入信号，称为激励， $y(t)$ 为输出信号，称为系统的响应。系统特性的影响包含在激励产生的响应之中，因此，通过对某种激励下系统响应的研究，可了解系统的特性。可见对系统特性的研究是离不开信号分析的。

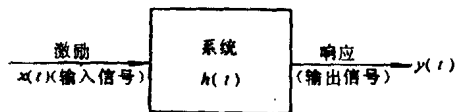


图1-2 系统的方框图

系统可分为连续时间系统及离散时间系统。连续时间系统是与连续时间信号相联系而工作的，与数字信号相联系并处理数字信号的系统称为离散时间系统。在实际情况中，常把连续时间系统和离散时间系统联合运用的，这种系统称为混合系统。

§ 1-2 信号分析的系统及内容

信号分析的目的是各种各样的，一般来说，它可概括为两个主要方面：其一是分析信号本身的特性及频率结构，例如，分析信号波形参数，信号中包含的频率分量；另一方面是分析信号所依附的系统的动态特性，以了解系统在各种信号(包括干扰)输入时所具有的品质，作为进一步改善系统及其设计基础。

以前，信号分析主要通过模拟式分析仪器进行。随着数字计算机的迅速发展，现代信号



图1-3 信号分析的系统

分析,一种是以计算机为核心的专用数字式信号分析仪器,另一种是采用通用计算机,以软件方式来进行信号分析。尽管以上两种方式在形式上有所差别,但信号分析的基本手段和方法是基本一致的。信号分析的系统可用图 1-3 来描述。

一、信号分析系统的组成

1. 传感器单元 它将待分析的物理量转化为电信号(电压、电流或其他电参数)的形式。这些物理量通常是电量、温度、压力、位移、速度、加速度及流量等。

2. 预处理单元 一般信号在被采样之前须经预处理,如放大、滤波等。信号采样之前的低通滤波常称为抗混淆滤波,它将信号的频带限制在一定的范围内。

3. 采样保持(S/H)及模数转换(A/D)单元 通过模数转换器A/D将模拟信号 $x(t)$ 在时间上离散化及幅值上量化成数字信号 $x(n)$,以便计算机处理。实际中模数转换器的型式有多种,在信号分析中要求选用转换速度快及转换精度比较高的器件,例如常采用逐次逼近反馈编码原理的A/D器件。

模数转换的过程是用一定位长的二进制数表示一个信号值的过程,常称为量化。量化过程中不可避免地会出现量化误差,量化误差反映了A/D模数转换器的精度。为了保证模数转换过程的精度,在转换过程中,被转换的输入信号应该不变或变化很小,其变化所引起的误差不应超过A/D器件的量化误差。对于信号变化快而A/D器件转换速率不够高的情况,须在A/D转换器之前加一采样保持器(S/H),以起到对信号的跟踪又在转换期间保持A/D器件输入不变的作用。

4. 信号分析单元 通常由计算机来完成,这是信号分析的中心环节,分析内容随具体任务而定,取决于信号分析的目的。

5. 数模转换单元D/A D/A转换器将计算机的分析处理结果以模拟量的形式输出,提供波形显示或其他用途。

二、信号分析的主要内容

信号分析的内容十分广泛,它包括对信号的时域特性及频域特性的分析,也包括对信号所依附的各种形式的系统特性的分析。从信号分析的基本方法及手段出发,可将信号分析的主要内容概括如下:

1. 谱分析 信号分析的基本方法之一是将时域信号通过某种变换使信号的本质表现得更清晰,例如,通过傅里叶变换以频域的形式来描述信号,比在时域内描述具有更简明清晰的特点,更能揭示信号的本质内容。特别是快速傅里叶算法发明之后,频谱分析的应用更为开阔。因此,通过傅里叶变换分析信号的频谱(包括幅值谱及功率谱)来认识信号的频率结构是信号分析的重要内容。

2. 相关分析 当信号被强烈的随机干扰所混杂甚至淹没时,将信号做相关分析,利用确定性信号的规律性将其从干扰中分离出来,或者利用信号间的相关性求取信号传输系统的特征参数和动态特性。

3. 滤波处理 根据某种目的和技术指标设计一系统,对信号进行加工处理使其变成所希望的形式。例如,削弱信号中多余的内容或滤除混杂在信号中的噪声干扰,或者通过滤波变换将信号变成一种容易分析及识别的形式。

总的来说,通过各种分析技术,将信号中所包含的内容揭示出来,以达到各种实用的目的,这就构成动态信号分析的内容。

§ 1-3 信号数字分析法的优点

随着数字计算机的普遍应用, 信号分析主要采用数字的形式。虽然在各工程领域中的信号一般是模拟的, 将它转换成数字信号的形式再分析, 必须经过采样量化的过程, 使问题复杂化, 但从整体来看, 与模拟分析方式比较, 数字方式具有一系列的优点, 从而成为信号分析的主要形式和动态分析仪器的的发展方向。

一般来说, 信号的数字分析法具有以下优点:

1. 功能的高度综合性 现代的数字信号分析仪器或装置几乎都是微计算机化的。其装置结构及硬件很相似, 但分析功能可能很不相同, 因为功能主要通过软件实现。在一个仪器内可设置许多种功能软件, 存放在体积很小的存贮器中以供选用, 一台现代的信号分析仪器可提供几十种测量项目。能充分地、高效地利用硬件及软件资源是以计算机为基础的仪器具有的特点, 这是一般模拟电路很难达到的。

2. 高度灵活性 微机化仪器的操作或调节一般通过键盘等以人机对话的方式进行, 操作十分方便。若想调整参数或修改功能, 一般只要修改程序就行了, 硬件电路可不改动或改动很少。这种高度灵活性对研制特别有利。因为研制时调试工作主要集中于软件, 可在计算机上进行仿真研究, 不会导致许多硬件设施的改动, 可以节省时间及资金。

3. 高精度 模拟电路所能实际达到的精度是很有限的, 要将测量精度提高一个数量级往往不太容易, 而且精度的长期稳定性不易保证, 因为模拟器件容易受温度等环境条件的影响。而数字设备的精度决定于字长及设计方案。在实现方面没有大的困难, 而且一旦确定下来, 精度不易受环境条件的影响, 因此容易实现高精度。

4. 可靠性 数字电路易于大规模集成化。例如, 一片功能很强的单片计算机, 其功能相当于一台带接口的单板微计算机, 只要稍做扩展就可以作成一台微机化仪器, 完成复杂的信号处理功能。由于硬件数及外接线少, 大大加强了仪器的可靠性。

当然, 相对模拟电路来说, 数字仪器比较复杂, 一般也比较贵。此外对有些仪器来说, 完成测量的时间还不如模拟式仪器。然而随着集成电路工艺的发展及计算水平的提高, 这些问题是会得到逐步解决的。

§ 1-4 信号分析技术应用概述

信号分析处理技术首先是在无线电、通信等领域中发展起来的, 因为那里有各种各样的信号(如语音、图象、声纳及雷达信号)要探测、传送及分析处理。然而, 现在信号分析技术已经不局限于上述范围, 而在其他各个领域内广泛应用起来, 因为信号本来就以不同的形式出现在各个工程领域之中。

不同领域的信号分析有自己独特的内容。在电力工程领域内就拥有大量的动态信号需要分析, 其中有电量的及非电量的、周期的及非周期的。分析及研究这些信号具有重要的意义。例如电力网络中由于存在许多大的非线性负荷(如进行电解反应的电冶及电化工厂), 使电网电压及电流的波形发生畸变, 产生大量的高次谐波, 这些高次谐波对电力网络的安全经济运行非常不利, 分析并谋求减少这些高次谐波对电力网络以高质量状态运行具有重要意义。

义；又如，电工领域中有许多重大设备（如发电机厂的发电机组及变电站的变压器等），在运行过程中产生的各种信号表征着设备的运行状态，从信号中分析及抽取表征运行工况的特征参数，与正常工况下的参数进行对比，可以判断设备的运行状况是否有故障，这比盲目地定期检修要优越得多。若将诊断技术引入产品设计及过程控制之中，必将对产品的质量起着重要的作用。设备故障诊断技术实际上就是信号分析处理与模式识别相结合而发展的一种高技术。

近几年来，信号分析与处理技术在生物工程领域中得到了迅速的发展。通过传感器将脑电、心电、脉电、肠鸣及血流等许多生物电信号收集并进行分析，对疾病的研究及临床诊断起了重要作用。近几年发展起来的断层摄影（CT）技术就是把信号处理技术用于医学工程的典型例子。它利用射线或超声波从不同角度对人体进行扫描，获得人体内部各个断层的密度信息，通过对这些信号的加工处理，最后将人体内部各部分以清晰的图象显示于屏幕上。

工程实际中常通过信号分析方法测试系统的动态特性。例如通过对汽车激励响应的分析，可了解汽车的动特性；通过对车身各振动信号的分析，可了解振动传输通道的特性并用以检测车辆的故障部位；信号分析还是研究建筑结构动特性的重要手段，通过对建筑物在某地激振或自然力作用下振动信号的分析，可以确定建筑物的自振频率及振型。

信号分析技术也广泛应用于非电量测量。例如，利用信号分析可以测量运动物体的速度，测量管道中运动物体的流速及飞行目标离地面的高度或飞行速度等。

信号分析必须依靠分析仪器进行。反过来，信号分析技术的应用又推动了动态分析仪器的的发展。由于信号出现在各个工程领域，对信号分析仪器的需要是广泛的，这使得信号分析的理论与技术大有用武之地。特别是微计算机进入测量仪器领域，为信号分析仪器的研制及应用开辟了广阔的前景。随着大规模集成电路的发展，国外生产了各种信号处理芯片，如快速傅里叶变换芯片、语言处理芯片等，这些芯片的应用将使信号分析仪器的研制推进一步。

信号分析技术是一门理论性及技术性都比较强的学科分支，它既自成体系又与许多学科有着紧密的联系，其应用是极为广泛的。信号分析技术给人们提供了一有力的工具，通过它，人们可以了解各工程领域中复杂的信号现象，去辨识系统，去开拓各种信号分析应用的广阔天地。

§ 1-5 几种典型的信号

为了加强对信号波形特点的认识，介绍以下几种典型的信号。

一、正弦信号

正弦信号通常指包括余弦信号在内的正弦信号，因为正弦信号与余弦信号仅在相位上相差 $\pi/2$ 。正弦信号表示为

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

式中 A 为振幅， ω 为角频率， θ 为初相位，波形如图 1-4 所示。

正弦信号是典型的周期信号，其周期 T_p 与角频率 ω 及频率 f 的关系为

$$T_p = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-1)$$

正弦信号与余弦信号可用复指数函数形式表示。由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (1-2)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \quad (1-3)$$

因而有

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (1-4)$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (1-5)$$

二、指数信号

指数信号的典型表达式为

$$x(t) = Ae^{at} \quad (1-6)$$

式中 A 表示 t 为 0 时信号的初始值, a 表示信号随时间变化的速率, 为实数。 a 越大, 信号变化越快。当 $a > 0$ 时, 信号值随时间以指数规律增加; 当 $a < 0$ 时, 信号值随时间以指数规律衰减。图 1-5 中给出了当 $a < 0$ 时的指数信号曲线, 图中 $A = 1$ 。

由图可见, 在 $t = 1/a = \tau$ 处, $x(\tau) = e^{-1} = 0.368$, 即信号值衰减到初始值的 36.8%。通常将 τ 称为指数信号的时间常数。

三、抽样函数

信号与系统理论中, 常把 $\sin t$ 与 t 之比的函数 $\sin t / t$ 定义为

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-7)$$

常称为抽样函数, 其波形如图 1-6 所示。

显然, 抽样函数是一偶函数, 其幅值沿正负时间两个方向衰减, 并在 $t = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2 \dots$ 的各点上其值为零。

$Sa(t)$ 函数与其类似的函数 $Sa(at) = \sin at / at$ 在以后的信号分析中经常遇到, 这里 a 是常数。

四、单位阶跃信号

单位阶跃信号的定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

如图 1-7 a 所示。如果单位阶跃函数的零点推迟到 $t = t_0$ 时刻, 如图 1-7 b 所示, 则得延时单位阶跃函数

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (1-9)$$

利用阶跃函数与延时阶跃函数可以表示如图 1-8 中的矩形脉冲波形信号

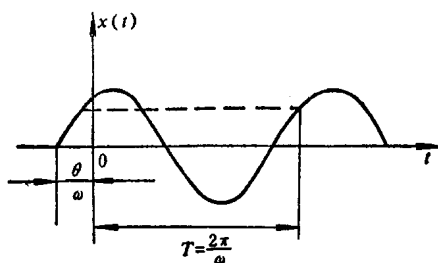


图1-4 正弦信号

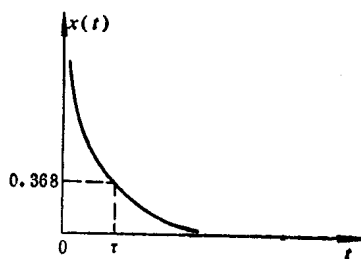


图1-5 指数衰减信号

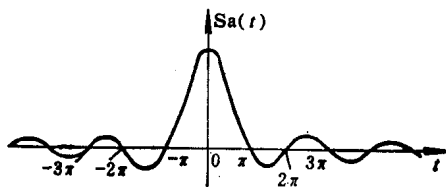


图1-6 抽样函数

$$x(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

利用阶跃信号的单边跳变特性, 可以方便地用数学形式描述各种信号的接入特性。例如在 $t = 0$ 时刻加入正弦信号, 可用下式表达

$$x(t) = \sin \omega t \cdot u(t)$$

五、单位冲激信号

冲激信号常用于描述作用时间极短而信号强度极大的许多物理现象, 如锤击、闪电现象等。对于图 1-8 所示的矩形脉冲信号, 脉宽为 τ , 若高为 $\frac{1}{\tau}$, 则其矩形面积为 $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$ 。当脉宽 τ 趋近于零时,

其脉冲幅度将趋于无穷大, 这种脉冲当 τ 趋于零时的极限值称为单位冲激函数, 又称“ δ 函数”, 记作 $\delta(t)$, 此处 $\delta(t)$ 为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

这种 δ 函数只在 $t = 0$ 点有一冲激, 其他各处函数值均为零。如果该矩形脉冲面积 (即强度) 为 A , 则冲激函数应表示为 $A\delta(t)$ 。

冲激函数其作用时间极短而幅值极大之特点, 还可以用不同的函数形式的极限来描述, 如图 1-9 所示的三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲及抽样函数, 当作用时间极短时其极限形式都可定义成冲激函数, 一般凡是满足以下三条性质的函数都可称为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。

$$(1) \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (1-11)$$

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \quad (1-12)$$

以上性质 (1)、(2) 描述了单位冲激函数的特点, 性质 (3) 描述了冲激函数的抽样特性 (也称为筛选特性), 它说明一连续时间信

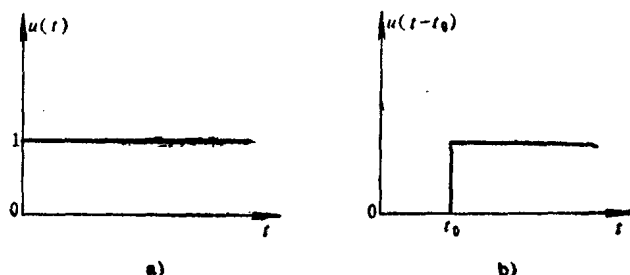


图1-7 单位阶跃函数

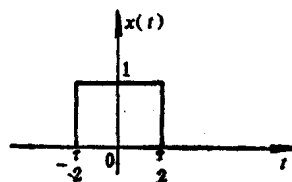


图1-8 矩形脉冲信号

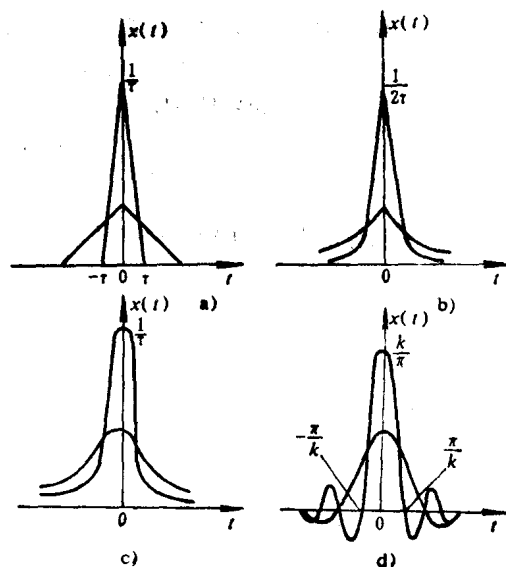


图1-9 三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲及抽样函数演变为冲激函数

号 $x(t)$ 与单位冲激信号 $\delta(t - t_0)$ 相乘并在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的时间内积分时, 就在 $t = t_0$ 的抽样时刻抽选出 $x(t_0)$ 。

此外, 冲激函数是偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-13)$$

这可简单证明如下:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) x(t) dt &= \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\tau) x(-\tau) d(-\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x(-\tau) d\tau = x(0) \end{aligned}$$

这和

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t) dt = x(0)$$

的结果一致, 可见式 (1-13) 成立。

单位冲激信号作为一种从实际冲激信号中抽象出来的理想脉冲信号, 它的数学性质使其在信号分析中起着十分重要的作用。

习 题

1-1 试简述下列概念的区别

- 1) 确定性信号与随机信号;
- 2) 周期信号与非周期信号;
- 3) 模拟信号与数字信号。

1-2 数字计算机中处理的信号是什么信号? 具有什么特点?

1-3 信号分析过程一般包含哪几个环节?

1-4 信号的数字分析方式与模拟方式相比有哪些优缺点?

1-5 信号 $x(t) = Ae^{-t/\tau}$ 中, τ 的意义何在? 如何求?

1-6 试用单位阶跃函数描述以下信号

$$x(t) = \begin{cases} A & t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

1-7 求抽样函数 $\text{Sa}(t) = \sin t / t$ 的零点, 试判断当 $a \rightarrow \infty$ 时它是否可看成 $\delta(t)$ 函数?

第二章 信号分析的基础

信号描述有三种方式：时域描述、频域描述及幅值域描述，可分别以时间 t 、频率 f 及幅值 x 为坐标变量来描述信号的变化规律。

信号的时域描述 $x(t)$ 是最常见的，它给出了信号随时间变化的规律。但是，信号所包含的内容在时域中往往表现得不清楚，而将 $x(t)$ 经过某种变换（如傅里叶变换）后，在变换域内信号的内容更清楚且容易识别，而且通过变换，信号的数学分析既方便又迅速，因此，信号的变换域分析是信号分析的重点内容。信号的幅值域分析主要是针对随机信号而言的。由于随机变量 X 幅值的不确定性及其相对概率的确定性，引入概率密度函数 $P(x)$ 来描述随机信号，显然它是以幅值 x 为自变量的函数。随机信号分析以 $P(x)$ 为基础对大量随机样本进行统计分析，由于它所具有的特殊性，其分析方法的详细讨论，将放在第四章中介绍。

§ 2-1 信号的时域分析

对时域信号 $x(t)$ 的分析研究，可包括信号分解及参数分析两方面。

一、信号的时域分解

信号分解是从不同的角度出发，利用叠加原理将信号分解为两个或多个分量之和，从而使信号所包含的时域特征更突出，或者使形式复杂的信号更便于分析。信号分解常有以下几种基本方式：

1. 交直流分解 将信号分解为直流分量 x_d 及交流分量 $x_a(t)$

$$x(t) = x_d + x_a(t) \quad (2-1)$$

其中直流分量为

$$x_d = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \bar{x}$$

显然它是与时间无关的分量，又称平均值，常用 $\bar{x}$ 表示；而交流分量

$$x_a(t) = x(t) - x_d$$

反映信号中随时间而交变的部分。交直流分解如图2-1所示。

实际中这种分解形式是很常见的。例如各种整流电路，为了获得信号中的直流成分，利用电感电容等对交流分量敏感的器件将交流分量减小或旁路；而在另一些问题中，感兴趣的可能是交变分量，因为许多信息都蕴含于交变分量之中，此时常将直流分量隔离，只获取交流分量。

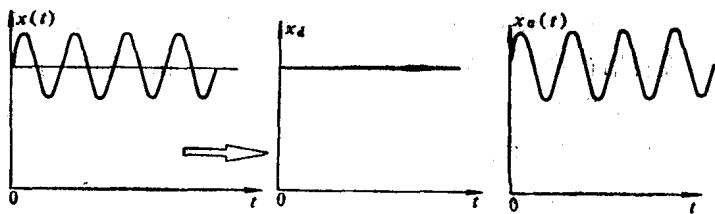


图2-1 信号的交直流分解

2. 偶奇分解 按照信号对纵轴的对称关系, 可将信号分解为偶分量与奇分量

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (2-2)$$

其中偶分量 $x_e(t)$ 与奇分量 $x_o(t)$ 分别定义为

$$x_e(t) = x_e(-t)$$

$$x_o(t) = -x_o(-t)$$

由式 (2-2) 及以上偶奇性质, 可得

$$x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t) \quad (2-3)$$

由式 (2-2) 及 (2-3) 可求得信号中的偶奇分量分别为

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

偶奇分量表示了信号对时间 t 反演过程中具有的不同对称关系, 如图2-2所示。这种不同的特点, 对信号的分析很有利。例如, 今后将会看到, 对于具有偶对称性质的时间信号, 其频谱将具有实数性质, 即各频率分量的相位为零。

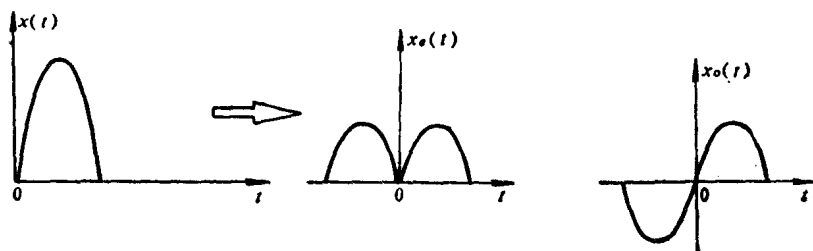


图2-2 信号的偶奇分解示意

3. 虚实分解 在描述某些变化过程的物理量时, 有时需要用复量来描述。例如, 交流电路中的电压与电流 $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, 在某种固定频率下, 信号具有幅值 A 及相位 φ 两个变量, 在电路理论中常用一复量来描述。

复量描述可具有直角坐标及极坐标两种形式。在直角坐标形式下, 实部用 $x_R(t)$ 表示, 虚部用 $x_I(t)$ 表示

$$x(t) = x_R(t) + jx_I(t)$$

用极坐标表示, 则为

$$x(t) = R(t)e^{j\varphi(t)}$$

其中

$$R(t) = \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \frac{x_I(t)}{x_R(t)}$$

这种分解形式实际中应用很广, 除了以上交流电路分析以外, 在测量中也常使用。例如分析旋转轴相对于回转中心的偏移运动时, 可在与轴径向相互垂直的 x 、 y 方向上各放置一传感器, 分别测出两个方向上的振动信号 x_I 与 x_R , 然后进行分析及综合, 就可求出轴心的轨迹, 如图2-3所示。

4. 窄脉冲叠加分解 对于以任意形式变化的复杂信号, 可以分解为许多不同时刻窄脉冲分量的叠加, 或者分解为不同时刻开始作用的阶跃信号的叠加, 从而利用已知的典型信号

的数学形式来表示。以下介绍按窄脉冲分解方式的分解法。

一信号 $x(t)$ 分解为许多窄脉冲分量之和, 如图2-4所示, 对于图中 t_1 时刻的窄脉冲, 可表示为

$$\Delta x(t_1) = [u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t)] \cdot x(t_1)$$

信号 $x(t)$ 则可表示为从 $t_1 = 0$ 到任意时刻 $t_1 = t$ 的许多个窄脉冲之和, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{t_1=0}^t \Delta x(t_1) \\ &= \sum_{t_1=0}^t [u(t - t_1) - u(t - t_1 - \Delta t)] x(t_1) \end{aligned}$$

以便进一步研究。

利用窄脉冲分解法, 使一具有任意变化形式的复杂信号可用基本的阶跃函数来表达, 在本章 §2-4 节中用卷积积分描述系统对任意信号 $x(t)$ 的响应时, 就利用了这种分解方法。

5. 正交函数分解法 以上信号虚实分解方法可理解为将一信号看成为一矢量, 并用相互正交的两个分量来描述。更一般地, 任一信号函数 $x(t)$ 可用一个正交函数集 $g_i(t)$ 来描述, 即

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(t) \quad (2-4)$$

式中 c_i 为正交函数 $g_i(t)$ 的权系数, 这些正交函数在区间 (t_1, t_2) 内应满足正交性

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = \begin{cases} K_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2-5)$$

式中 K_i 为常数。

当用有限的 n 个正交函数来描述信号 $x(t)$ 时, 式 (2-4) 就用以下近似式来表达

$$x(t) \approx \sum_{i=1}^n c_i g_i(t) \quad (2-6)$$

为使这种分解具有最佳的结果, 可利用误差最小的原则来确定式 (2-6) 中的系数 c_i 。用式 (2-6) 逼近 $x(t)$ 时具有的均方误差为

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{i=1}^n c_i g_i(t)]^2 dt \quad (2-7)$$

对于任意系数 c_i , 应使之满足最小误差条件

$$\frac{\partial \bar{e}^2}{\partial c_i} = 0$$

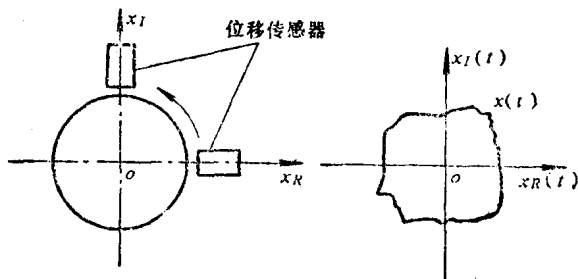


图2-3 轴心轨迹的分解测量

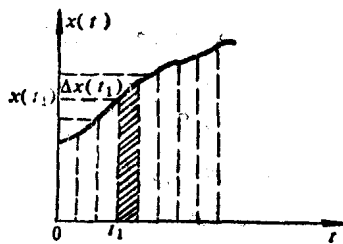


图2-4 信号分解为许多窄脉冲分量之叠加

将式 (2-7) 代入此式则为

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{i=1}^n c_i g_i(t)]^2 dt \right\} = 0$$

展开被积函数, 且注意到式 (2-5) 的正交性及对于不包含 c_i 的项求导的结果为零, 则上式变为

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [-2c_i x(t)g_i(t) + c_i^2 g_i^2(t)] dt \right\} = 0$$

即

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)g_i(t) dt = c_i \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt$$

于是, 可求出用正交函数分解时各展开系数

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)g_i(t) dt}{K_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-8)$$

它们为满足最小均方误差条件 (又称为最小二乘准则) 的结果。

将式 (2-8) 代入式 (2-7), 可得到正交分解的最小均方误差。将式 (2-7) 展开, 并利用正交条件式 (2-5), 则可得 n 项正交函数展开时的均方误差为

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 K_i \right] \quad (2-9)$$

如果将正交函数归一化

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = 1$$

则式 (2-8) 及 (2-9) 可表示为

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t)g_i(t) dt$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 \right]$$

满足式 (2-5) 正交条件的正交函数集有多种, 最基本和最常见的正交函数集是三角函数及复指数函数集。对于工程实际中周期为 T 的周期信号 $x(t)$, 可用 N 项三角函数或复指数函数展开。例如用三角函数 $\cos n\omega_1 t$ 及 $\sin n\omega_1 t$ ($n = 0, 1, 2 \dots N$) 展开时

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$(t_0 < t < t_0 + T_p)$$

式中展开系数 a_n 及 b_n 可用式 (2-8) 求得, 而展开式中基波角频率 $\omega_1 = 2\pi/T_p$ 。图 2-5 中表示一周信号 $x(t)$ 用三角函数分解的最简情况。

关于周期信号用复指数函数展开的具体分析见 § 2-2。

信号的正交分解思想使信号的时域分析方法大为开阔, 而且使分析的结果具有更普遍的

意义,在许多情况下能冲破某些传统方法带来的局限性。例如,在研究交流网络中某一支路电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 的关系时,可将电流 $i(t)$ 分解为相互正交的有功分量 $i_r(t)$ 及无功分量 $i_q(t)$ 之和,即

$$i(t) = i_r(t) + i_q(t) \quad (2-10)$$

其中有功分量 $i_r(t)$ 是与支路电压 $u(t)$ 波形相似且同相的时间函数,可写为

$$i_r(t) = c_1 u(t) \quad (2-11)$$

因而式 (2-10) 表示为

$$i(t) = i_r(t) + i_q(t) = c_1 u(t) + i_q(t)$$

其中系数 c_1 可由式 (2-8) 求得

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t) u(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} i(t) u(t) dt}{K_1} \quad (2-12)$$

从而可求得 $i_r(t)$ 。无功分量则为

$$i_q(t) = i(t) - i_r(t) \quad (2-13)$$

由于 c_1 满足正交条件,由此求得的 $i_q(t)$ 与 $i_r(t)$ 必定正交,这可证明如下:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} i_r(t) i_q(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} i_r(t) [i(t) - i_r(t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} i_r(t) i(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} i_r^2(t) dt \end{aligned}$$

将式 (2-11) 及 (2-12), 代入上式得

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} i_r(t) i_q(t) dt \\ &= c_1 \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt - c_1^2 \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \\ &= \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt \right]^2}{\int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt} - \left[\frac{\int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt} \right]^2 \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt = 0 \end{aligned}$$

以式 (2-11) 及式 (2-13) 定义的有功分量及无功分量为基础,可求出电路中其他的参数,这些参数将不受波形条件的约束,比以往传统方法所得的结果具有更明确的物理意义,其应用范围也将更为广阔[40]。

二、时域参数分析

时域函数 $x(t)$ 给出了信号随时间变化的规律,因而可求出任意时刻 t 的值。但在许多实际情况中并不需要了解信号的瞬时值及波形变化细节,只需了解某些表征信号时域特征的参数即可。例如,对由传感器收集的信号 $x(t)$,有时只要 $x(t)$ 的最大值不超过某一规定的极限值,就认为信号 $x(t)$ 所表示的工况是正常的,不必干预,只有当其超过规定值才对工况进行调整处理。此时,就只需测取信号的最大值即可。

对于时域波形参数的分析,因具体问题不同而有所差异,现介绍几种典型参数的分析方

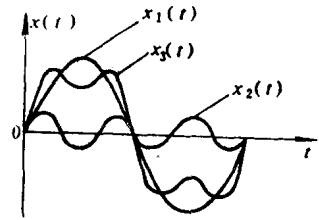


图2-5 信号分解为相互正交的三角函数