高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

# 概 率 论

甘以炎 编

高等教育出版社

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

# 概 率 论

甘 以 炎 编

高 等 教 育 出 版 社

## 内容提要

本书的内容共分六章，包括集合论初步与排列组合，随机事件及其概率，概率的运算法则，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理.

每章的开头有学习要点，每章之末有小结. 各章都配备了适量的思考题，练习题，习题及阶段测验题. 习题大部给了答案，便于读者复习和自我检查.

本书可作为函授教材和自学用书.

高等学校函授教材
（兼作高等教育自学用书）

概 率 论

甘[illegible]炎 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.125 字数 160,000

1983年12月第1版 1984年8月第1次印刷

印数 00,001—20,250

书号 13010·0963 定价 0.82 元

# 前　言

这本教材是根据1981年12月教育部召开的高等工业学校函授教学工作会议审订的高等工科学校《工程数学函授教学大纲(草案)》(工科各专业试用)的“概率论”部分编写的，主编是彭旭麟，编者是甘以炎.

1982年12月在武汉召开了《概率论》初稿审稿会议，与会代表认真审阅了全书，并就书的结构、选材和文字叙述提出了十分中肯的意见.在此基础上编者又对全书作了全面修改.为此谨向审查人沈恒范(主审，吉林工业大学)、江先荣(东北工学院)、陈世雄(华南工学院)、盛承懋(马鞍山钢铁学院)、刘锐宽(阜新矿业学院)等同志表示衷心感谢.

由于水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望读者提出宝贵意见，以便进一步修改.

主编　彭旭麟

编者　甘以炎

1983年8月

# 说　明

本书是高等工科函授教育30学时的概率论教材．由于学时的限制，只能介绍概率论的基本知识和必要的基本运算技能，使读者对处理随机现象的基本思想和方法有所了解，为学习有关专业内容和进一步学习数理统计提供必要的基础．全书分六章．

第一章是预备知识，包括集合论与排列组合方面的基本知识，如果读者已经学过这些内容，就可将这一章作为复习材料．

第二、三两章介绍随机事件及其概率，概率的运算法则．在教材处理上，首先直观地叙述随机事件，并讨论事件之间的关系与运算，然后再用样本空间的子集来描述事件，目的是使读者便于接受而又不降低课程的要求．条件概率及事件的独立性是两个重要的概念，利用它们，我们就能比较容易地解决许多概率问题的计算．

随机事件及其概率是本书的重点内容之一．

第四章介绍随机变量及其概率分布的概念．包括离散型的随机变量及其概率函数，连续型随机变量及其概率密度函数，二维随机变量的联合分布及边缘分布．而一维随机变量及其概率分布，特别是二项分布，正态分布也是本书的重点内容之一．

第五章介绍随机变量的数字特征，包括数学期望及其性质，方差及其性质，相关矩与相关系数．重点是数学期望与方差．

第六章介绍大数定律与中心极限定理，这一章的内容在理论和应用方面都是很重要的．中心极限定理的证明，因为较难就未给出．

在每章的开头有学习要点，每章之末有小结．学习要点指出

该章的主要内容和要注意的问题．小结包括该章的基本内容与基本要求，有学习方法、解题方法的指导，也谈到相关内容的对比、联系与区别．当然，安排的这些项目特别是小结，只供读者参考，希望读者在学完一章之后，按自己的体会独立地写出小结．

全书安排有一定数量的思考题，练习题，习题和阶段测验题．

有些容易混淆的概念，易于疏忽的问题，放在思考题中，以引起读者注意，并希望能引导读者思考问题．

附在有关节、段之后的练习题一般比较简单，与所学内容的关系比较直接，供复习完各节、段之后即时巩固所学内容之用．

至于安排在各章之后的习题，其中有些具有综合的性质，有些则要读者自己判断，该题与哪些内容有关，应该用什么方法去解决．

阶段测验题，可供读者自己检查掌握内容的程度．

安排以上各类习题的主要目的在于巩固和加深所学的内容，培养分析问题、解决问题的独立工作能力，是整个课程的重要组成部分．要按时、按量完成．但应先基本搞懂所学内容，对定理、公式应初步了解适用条件及用法后，再动手做题．切忌在尚未了解基本内容之前就急于解题，更不要只注意做习题而不重视课文学习．

练习题，习题中有少量打“*”的题目．这些内容主要是为了扩大知识面而设，可以略去，不会影响其它内容的学习．

书末附有答案，较难的题给出了提示．

编　者

1983.7.31.

# 目　录

# 引　言

## 1　概率论研究的对象

现实世界存在着两类现象，一类是所谓确定性现象．例如，在一个标准大气压下，把纯水加热到100°C，水必然沸腾；在同样大气压下，把纯水加热到 50°C 时，水必然不沸腾．象这类在一定条件下，重复进行试验，它的结果是确定的(或者必然发生，或者必然不发生)现象，称为确定性现象．这类现象我们比较熟悉，研究这类现象所用的数学工具是我们已学过的代数、几何、微积分等．除了确定性现象外，人们还发现存在另一类现象——非确定性现象．这类现象和上面所说的确定性现象不同．其特点是在一定条件下，重复进行试验，其结果未必相同．即在每次试验中，某一结果可能发生也可能不发生("发生"有时也说"出现"，今后这两个词都用)．例如抛一枚硬币，一切可能的结果有二：字朝上(今后称出现正面)或图朝上(今后称出现反面)．在一次试验中，"出现正面"这个结果可能发生也可能不发生．其它如新生婴儿可能是男孩也可能是女孩；自动车床上加工出来的零件，可能是合格品也可能是次品等等．

对于上述非确定性现象，从表面上看，试验将产生什么结果纯属偶然，似无规律可言．其实不然，虽然在个别试验中，试验的结果呈现出不确定性．但人们经过长期实践并深入研究之后，发现在相同条件下，多次重复进行试验的结果，却呈现出某种规律性——所谓统计规律性．例如抛一枚形状对称、质地均匀的硬币一次，出现正面与否，试验之前是无法预言的，但多次重复抛这枚

硬币，出现正面的次数约占一半．又如气体是由数目众多的气体分子组成的，这些分子以很快的速度进行剧烈的运动，在运动的过程中相互碰撞而改变其动量和方向，因而每个分子的运动轨道、速度都是不确定的．但从宏观看来，气体对器壁的压力却是稳定的．在一定的条件下有多种可能的结果发生，事前不能预言将出现哪种结果，但大量重复试验的结果却呈现统计规律性，这类现象称为随机现象．概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

## 2　概率论的应用

概率论的理论与方法已广泛应用于工业、农业、医学、军事和科学技术以及公用事业中．例如：

（1）抽样验收　工厂生产的产品在出厂时都要进行检查和验收．如果工厂生产的一批产品中，次品数较少，符合国家标准，就认为这批产品合格，允许出厂；如果次品数太多，超过了国家标准，就不允许出厂．怎样进行检查和验收呢？把产品百分之百的进行检查，统计其中的次品数，决定该产品的优劣，这好象是很准确、可靠的，然而这是难以做到的．因为有些产品一经检查就被破坏而不能再使用，例如检查灯泡的寿命，炮弹的质量等．有些产品检查时虽没有被破坏，例如测量螺帽的直径，但这类产品的数量很大，逐个检查需要耗费大量的人力、物力和时间．因此产生了抽样验收的办法．抽样验收就是应用概率论知识，制定抽样检查方案，根据这个方案，从一批产品中抽取一部分样品进行检查，由其中次品数的多少推断整批产品的质量是否合格．

（2）质量控制　抽样验收是对已生产出的产品，通过抽样检查以推断整批产品的质量的问题．质量控制则是在生产过程中，随时抽样检查，看生产是否正常．当发现产品质量有下降趋势时，

及时研究原因，采取措施，以减少次品率，使生产正常.

(3) 公用事业的设置 各种公用事业如百货公司的零售点，医院，电话局等等都可看成是服务单位；而百货公司的顾客，医院的病人，要求打电话者则是服务对象. 这些服务单位的数目总是有限制的，服务对象一般是随机地使用这些单位. 如果设立的服务单位过多，就会使成本提高，造成浪费；如果服务单位太少，又会使服务对象长期等待而产生拥挤现象. 如何合理地确定这些服务单位的数目，便是一个很重要的问题，要解决这些问题也要用到概率论的知识.

(4) 可靠性问题 在由元件组成的系统中，元件能正常工作的概率称为这元件的可靠性. 系统能正常工作的概率称为系统的可靠性. 在一个系统的运行过程中，总希望它较长期间不发生故障；然而某些故障又不可避免地迟早会发生. 为此，通常采用一些措施，例如，为系统准备一些备用件，以便当系统发生故障时，将备用件代替损坏了的元件，来提高系统的可靠性. 但是备用件如果太多，系统的重量、体积、费用都会增加. 怎样在允许的重量、体积和费用范围内，恰当地配置备用件，才能使系统的可靠性最大？这也是一个要用概率论知识解决的问题.

此外，运用概率论方法可以进行气象预报，水文预报及地震预报，在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等.

### 3 概率统计方法的特点

前面已经提到，随机现象的统计规律是通过大量的重复的观察或试验来认识的. 因此，一次试验结果的不确定性和大量重复试验所呈现的统计规律性这一对矛盾的对立和统一，是我们认识随机现象时应着重掌握的. 关于这一点，读者在第六章学习应用实际推断原理对随机现象进行分析和推断时，将会有所体会.

# 第一章 预 备 知 识

[**学习要点**] 这一章介绍集合的概念、运算及排列组合.

对于集合，应着重掌握集合的“和”、“积”、“余”三种运算，要分清互不相交集合与互余集合这两个概念.

对于排列组合，要注意它们的区别，并熟悉计算公式。会正确运用加法原理及乘法原理.

## §1.1 集　　合

### 1 集合的概念

我们把具有某种特定性质的事物的全体，称为**集合**，简称**集**. 所谓“某种特定性质”，是指我们有一定的规则或办法，据此可以对任一事物，判断它是属于这个集合还是不属于这个集合. 任何事物，或者属于这个集合，或者不属于这个集合. 二者必居其一且仅居其一. 属于某一集合的事物称为这个集合的元素.

例如：某学院的全体学生；某车间一天生产的产品；能被 2 整除的自然数的全体等等都是集合. 但是，如果所说的是：“非常大的数”或者“与某点 $P$ 邻近的点”，则这样的数或点不能成为集合. 因为所给出的规则是模糊的，我们不能据此确定某数或某点是否属于该集合.

通常以大写的拉丁字母 $A$、$B$、$X$…等表示集合，以小写拉丁字母 $a$、$b$、$x$…等表示元素. $a$ 是 $A$ 的元素，我们就说 $a$ 属于 $A$ 或说 $a$ 在 $A$ 中，并记为 $a\in A$. 否则，就说 $a$ 不属于 $A$ 或说 $a$ 不在 $A$ 中，并记为 $a\overline{\in}A$.

在讨论集合时，重复的元素只算一个，例如由 1, 2, 2, $-1$ 组成的集合，和由 1, 2, $-1$ 组成的集合是同一集合.

如果一个集合只有有限个元素，则称这个集合为**有限集合**；如果有无限多个元素，则称为**无限集合**. 当一个集合中的诸元素能与全体自然数构成一一对应关系时，则称这个集合为**可数(列)集合**. 所谓可数，就是指集合的元素可以编上号码，哪一个是第一个元素，哪一个是第二个元素，…. 或者说可以象自然数那样，一个接一个地数出来. 例如全体奇数组成的集合就是可数的，我们可以一个接一个地数出来：第一个奇数是 1，第二个奇数是 3，……，第 $n$ 个奇数是 $2n-1$，…等等. 无限集合中有很多是不可数的，例如由 0 与 1 之间的一切实数组成的集合就是不可数的. 这里只指出上述这个结论，其证明可在实数理论中找到.

集合的表示法有两种，一是列举法，一是描述法.

把集合的全部元素列出来，外加花括弧，用这办法表示集合，称为**列举法**. 例如 $\{1, 2, -1\}$ 表示由 1, 2, $-1$ 三个数组成的集合. 这个集合也可写成 $\{1, -1, 2\}$, $\{2, -1, 1\}$ 等等，即与元素出现的顺序无关. 有时为了书写简单，不写出全部元素而用省略写法. 例如由 1 至 1000 的全部正整数组成的集合，可省写为 $\{1, 2, \cdots, 999, 1000\}$. 为避免引起误解，可在上下文加以说明.

列举法有很大的局限性，元素的个数虽然只有有限个，但如果这个数目很大，要一个一个都列举出来，实际上也是做不到的. 例如由不超过 $10^{10}$ 的奇数组成的集合，其元素有 50 亿个，要把它们全部写出来，得用多少时间，多少纸张！何况有很多集合，其元素是不可数的，根本无法一一罗列出来.

更常用的是用列出规定这个集合特定性质 $P$ 的办法来表示集合，这就是描述法. 例如 $A=\{x|P\}$，花括弧中竖线前的 $x$，是 $A$ 中元素的通用符号，而竖线后的 $P$ 则是 $x$ 所具有的性质. 于是，由

区间[1, 2]内的一切实数组成的集合可表示为$\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$；由方程 $x^2-2x-3=0$ 的根组成的集合可表示为 $\{-1, 3\}$，也可表示为 $\{x|x^2-2x-3=0\}$．有时为了叙述简便，常常略去竖线及竖线前的字母 $x$．例如 $N=\{$全体正整数$\}$，$R=\{$全体实数$\}$等．

**2　集合之间的关系和运算**

**定义 1**　设有 $A, B$ 两个集合，如果 $A$ 的一切元素都是 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**．记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．$A\subset B$ 又称为 $A$ 包含于 $B$，或称 $B$ 包含 $A$．例如 $N=\{$全体正整数$\}$，$R=\{$全体实数$\}$，则 $N\subset R$；又如 $A=\{(x, y)|x=y\}$，$S=\{$平面上的一切点$\}$，则 $A\subset S$．

不含任何元素的集合称为**空集**，用符号$\varnothing$表示．例如由方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集合是一个空集．规定空集$\varnothing$是任何集合 $A$ 的子集，即$\varnothing\subset A$．

今后在同一问题中所讨论的集合，除特别声明者外，都认为是某一集合$\Omega$的子集，并把$\Omega$称为**空间**．

在讨论集合时，往往用"**文(Venn)氏图**"帮助理解集合的概念和运算结果．所谓文氏图是用一正方形表示空间 $\Omega$，正方形内的点表示$\Omega$的元素，$\Omega$ 的子集用正方形中一条或多条封闭曲线围成的图形内部或外部来表示．

由定义，$A\subset A$．还可看到，如果 $A\subset B$，且$B\subset C$，则有 $A\subset C$．即包含关系具有传递性（如图 1-1）．

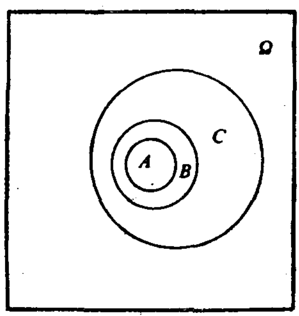


图　1-1

**定义 2**　两个集合 $A, B$，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 $A, B$ **相等**，记为 $A=B$．

两集合相等，就是指它们由相同的元素组成.

**例 1** 设 $A=\{1,-1\}$, $B=\{x\mid x^2-1=0\}$, 则 $A=B$.

**例 2** 设 $A=\{$偶数$\}$, $B=\{x\mid \sin\frac{x\pi}{2}=0, x>0\}$, 则 $A=B$.

**定义 3** 设 $A$, $B$ 是两个集合，若集合 $C$ 包含 $A$ 与 $B$ 中的一切元素，且不包含其它元素，则称 $C$ 是 $A$ 与 $B$ 的**和(并)集**，记为 $C=A\cup B$(如图 1-2).

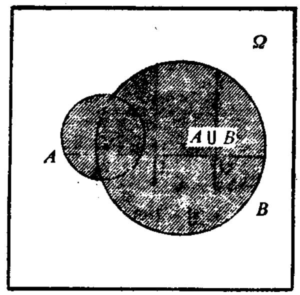


图 1-2

由定义可知 $C$ 的元素或为 $A$ 的元素或为 $B$ 的元素，换言之，$C$ 的元素至少属于 $A$, $B$ 之一.

**例 3** 设 $A=\{$正有理数$\}$, $B=\{$正无理数$\}$, 则 $A\cup B=\{$正实数$\}$.

**例 4** 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$, 则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$.

**例 5** 设 $A=\{$湖北人$\}$, $B=\{$中国人$\}$, 则 $A\cup B=B$, 因为每个湖北人都是中国人.

**例 6** 设 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$, $B=\{$实数 $x\mid x^2+1=0\}$, 则 $A\cup B=A$. 因为 $B$ 是空集.

**例 7** 设 $A=\{x\mid -\infty<x<3\}$, $B=\left\{x\mid -\infty<x<\frac{1}{2}\right\}$, 则 $A\cup B=\{x\mid -\infty<x<3\}=A$, 因为 $B\subset A$.

**例 8** 设 $A=\{(x,y)\mid 1<x<2\}$, $B=\{(x,y)\mid 2<y<4\}$ 则 $A\cup B=\{(x,y)\mid 1<x<2$ 或 $2<y<4\}$, 如图 1-3 的阴影部分.

集合的和可推广到有限个或可数无限多个集合的情形. $n$ 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 缩写为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 它包含

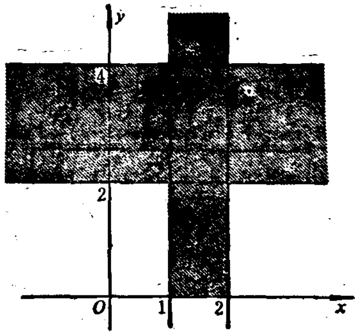


图 1-3

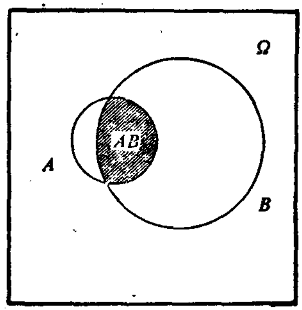


图 1-4

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的一切元素，且不包含其它元素. 类似地 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可数无限多个集合 $A_i(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$的和.

**定义 4** 设 $A, B$ 是两个集合，若集合 $D$ 包含 $A$ 与 $B$ 的一切公共元素，且不包含其它元素，则称 $D$ 是 $A$ 与 $B$ 的积(**交或通**)**集**，记为 $D=A\cap B$ 或 $D=AB$(如图 1-4).

由定义可知 $D$ 的元素既属于 $A$ 又属于 $B$.

**例 9** 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$，则 $AB=\{4, 5, 6\}$.

**例 10** 设 $A=\{x \mid -\infty<x<3\}$，$B=\{x \mid -1<x<+\infty\}$，则 $AB=\{x \mid -1<x<3\}$.

**例 11** 设 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}, B=\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ 则 $AB$ 是图 1-5 的阴影部分.

**例 12** 设 $A=\{(x, y) \mid 1<x<2\}$，$B=\{(x, y) \mid 2<y<4\}$，则 $AB$ 是图 1-6 中矩形的内部(阴影部分).

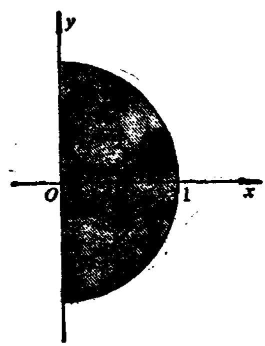


图 1-5

集合的积可推广到有限个或可数无限多个集合的情形．诸集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，缩写为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，它包含 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 的一切公共元素，且不包含其它元素．类似地，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可数无限多个集合 $A_i(i=1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 的积．

**定义 5** 若 $A, B$ 两集合没有公共元素，即若

$$AB=\varnothing$$

则称 $A, B$ **互不相交**（如图 1-7）．

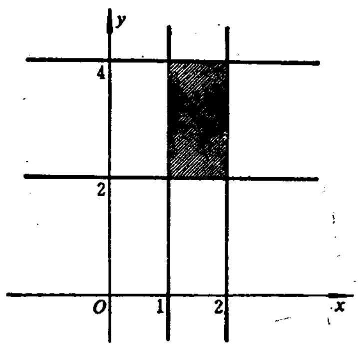


图 1-6

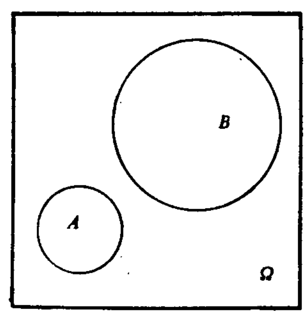


图 1-7

**例 13** 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{5, 6, 7, 8\}$，则 $A$，$B$ 互不相交．

**例 14** 设 $A=\{x \mid 1<x<2\}$，$B=\{x \mid 3<x<4\}$，则 $A, B$ 互不相交．

若集合 $A_1, A_2, \cdots$，中任意两个集合都不相交，即

$$A_iA_j=\varnothing \qquad (i \neq j, i, \ j=1, 2, \cdots,)$$

则称 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相交．

**例 15** 设 $A_k=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x<\frac{1}{2^k}\right\}$，$k=1, 2, \cdots$，则 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相交．

**定义 6** 设 $A, B$ 是两个集合，若集合 $E$ 包含属于 $A$ 而不属于