非线性规划

——理论与算法

〔美〕M. S. 巴扎拉 C.M. 希蒂 著

王化存 张春柏 译

贵州人民出版社

Nonlinear Programming

Theory and Algorithms

M.S.Bazaraa & C.M.Shetty

John Wiley & Sons

1979

非线性规划

——理论与算法

〔美〕M.S.巴扎拉 C.M.希蒂 著

王化存 张春柏 译

责任编辑 唐光明

贵州人民出版社出版

（贵阳市延安中路5号）

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 23印张 494千字

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数1——2,250

书号13115·68 定价4.45元

译 者 序

非线性规划是运筹学中特别重要而又比较活跃的一个分支．随着电子计算机的日趋发展，以及工程设计、系统识别、管理科学等方面的不断深入，非线性规划的应用越来越广泛．

本书全面地介绍了非线性规划的理论和算法，主要包括三方面内容：凸集与凸函数；最优性条件与对偶性理论；各种算法及收敛性．与其他同类书相比，本书取材得当，论证严谨，结构紧密，且实例丰富，参考文献齐全，每章都有数值例子和图示说明．

本书不仅可以作为有关研究工作者、教师和学生的参考书，还可作为运筹学、管理科学、工业工程、应用数学和涉及分析最优化技术的工程学科方面的教科书。我们希望，这个中译本能对我国在非线性规划的理论方面与应用方面的发展有一定的推动作用．

在翻译过程中，本书得到了越民义教授的指导和鼓励，在此，表示衷心的感谢．

由于译者水平有限，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正．

1985年 8 月

DAA26/03

序　言

非线性规划是论述一个目标函数在等式约束和不等式约束之下的最优化问题。如果所有这些函数都是线性的，我们显然就得到一个线性规划。否则，就称之为非线性规划。由于线性规划中单纯形法的发展，以及高速计算机的出现，使得线性规划成为在各种不同领域中解决问题的一个重要工具。但是，许多实际问题，由于目标函数为非线性和（或）其中有一些约束函数为非线性，所以是不可能表示为一个线性规划的。在过去的20年中，人们为了有效地求解非线性问题付出了艰巨的劳动，使非线性问题得到了迅速的进展。本书则按照逻辑次序和自成体系的形式陈述这些发展。

本书分三个主要部分，分别论述凸分析、最优性条件和对偶性，以及计算方法。凸分析包括凸集和凸函数，它是学习最优化理论的重要内容。最优化的根本目标是研究求解所探讨的问题的有效的计算方法。最优性条件和对偶性不仅可用于研究终止准则，而且也可用以启发计算方法本身。

在本书的准备过程中，特别尽量做到自成体系，使它既适于作为课本又适于作为参考书。每章都列举数值例子和图示说明，以帮助读者理解所讨论的概念和方法。此外，每章还附有许多练习。这些练习包括：（1）简单数值问题——巩固课文中所讨论的内容；（2）引进新内容的一些问题——与课文讨论的内容有关；（3）理论性练习——供程度高的学生使用。每章末，提供了与课文内容有关的一些扩充材料，参

考材料和资料．这些资料及有关注释，对读者进一步研究是十分有益的．本书还包含了一个广泛的文献目录．

第 1 章列举了一些不同工程领域中所出现的问题的例子，这些例子可以看作是非线性规划．其中包括离散与连续最优控制问题，列举了生产与储存控制和公路设计的实例加以说明和讨论．另外，还列举了两杆桁架和两轴承颈设计的例子．从得到一个二次规划的最优解的观点讨论了电网的平衡条件．提出了水资源管理中出现的一个大型非线性模型．最后，讨论了出现在随机规划和选址理论中的非线性模型．

其余几章归为三个部分．第 1 部分由第 2 章和第 3 章组成，论述凸集和凸函数．第 2 章讨论凸集的拓扑性质，凸集的分离和支撑，多面体集，多面体集的极点和极方向，以及线性规划．第 3 章讨论凸函数的性质，包括次微分，凸集上的极大和极小．同时，还讨论了凸函数的推广及其相互关系，因为适合于凸函数的非线性规划的算法也可以用于更一般的包括拟凸函数和伪凸函数的函数类．

第 2 部分，包括4,5,6章，论述最优性条件和对偶性．第 4 章叙述经典的不等式约束和等式约束问题的Fritz John和Kuhn-Tucker最优性条件．第5章介绍约束品性这一课题．第 6 章论述Lagrange对偶性和鞍点最优性条件．讨论了对偶性定理，对偶函数的性质和求解对偶问题的方法．除了Lagrange对偶性外，在非线性规划中，还有一些其它的对偶公式，比如，共轭对偶性，极小-极大对偶性，代理对偶和对称对偶性等公式．在这些对偶性公式中，Lagrange对偶性在算法的发展方面看来是最有前途的．另外，从每一对偶性公式得到的结果是可以比较的．鉴于篇幅所限，在正

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

文中，我们只讨论Lagrange对偶性，而别的对偶公式仅仅放在练习中介绍。

第3部分，由第7到11章组成，既讨论求解无约束非线性规划问题的算法，又讨论求解有约束非线性规划问题的算法，第7章专门论述点到集映射的算法的收敛性定理。这些定理用于证明本书中后面所提出的算法的收敛性。此外，简短地讨论了评价算法的准则。第8章论述无约束函数的最优化。我们特别讨论施行线搜索的几种方法，以及多变量函数的极小化方法。既讨论使用导数的方法，又讨论不使用导数的方法，还讨论了基于共轭性概念的方法。第8到11章证明所提出的各种算法的收敛性。第7章简短地介绍收敛阶的概念，鉴于篇幅和课文程度所限而不作进一步追求。第9章讨论求解非线性规划的惩罚函数和障碍函数法。在这里，这些方法实质上是把原问题转化为一系列的无约束问题。第10章讨论可行方向法。在这章里，给定一个可行点，首先寻找一个可行的改进方向，然后，沿着这个方向，通过极小化目标函数，确定出一个新的改进的可行点。最初的方法是由Zoutendijk所提出，为了保证收敛性，后来由Topkis-Veinott作了修改。Rosen梯度投影法，Wolfe简化梯度法和Zangwill凸单纯形法都是可行方向法这一概念的重要补充，这些一并在第10章中讨论。第11章论述某些特殊的线性约束问题，这些问题可以通过稍加修改的线性规划的单纯形法求解。我们特别讨论二次规划，可分规划和线性分式规划。二次规划应用本章早先介绍的Lemke互补主元算法求解。

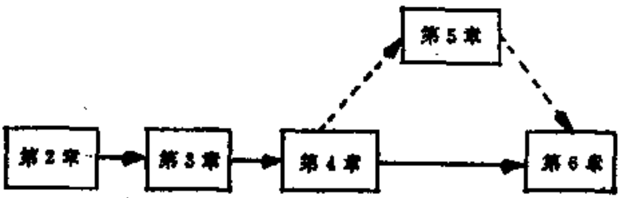
本书既可以用作非线性规划专题的参考书，也可以作为

运筹学、管理科学、工业工程、应用数学和涉及分析最优化技术的工程学科方面的教科书，本书内容需要的数学基础是，熟悉和掌握线性代数和微积分学的知识。为方便读者，附录A概括了本书通常使用的一些数学论题。

作为一本教科书，本书可用作下面详细叙述的最优化基础的教程和计算方法的教程。本书也可以用作包含这些内容的连续性教程。

1.最优化基础

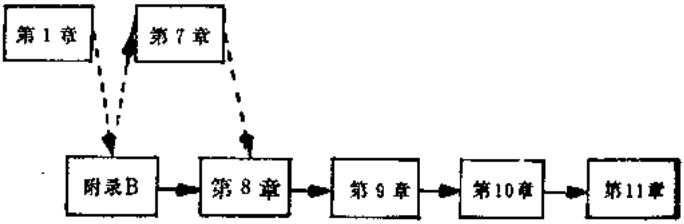
本教程是为应用数学的大学生和受过其它训练的大学毕业生而写的。下面的示意图，提出了所包括的内容，它包括相当于一个学期的教程。第 5 章关于约束品性可以略去而不失连续性，熟悉线性规划的读者也可以跳过2.6节。



2.非线性规划中的计算方法

本教程是为对求解非线性规划的算法感兴趣的大学毕业生而写的。下面的示意图，提出了所包括的内容，它包括相当于一个学期的教程。对收敛性分析不感兴趣的读者，可以跳过第 7 章和第 8 到第11章中关于收敛性的讨论。为方便读者，将学习第 8 到第11章中关于凸分析和最优性条件所必需

具备的最起码的基础知识，概括在附录B中．第1章给出的许多非线性规划问题的例子，对本教程提供了一个很好的引子，但若跳过本章也不失其连续性．



（以下略）

Mokhtar S.Bazaraa
C.M.Shetty

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

第1章

引　　言

工程师和运筹学工作者们往往都需要求解这样的问题．这些问题包括最优设计，稀有资源的最优分配方案，或者火箭运行的最优轨道等．过去，一系列的解决方案都认为是可以采用的．在工程设计中，例如，普遍都含有一个大的安全因子．然而，由于不断地竞争，仅仅提出一个可用的设计方案已不再妥当了．在另一种情况下，如象空间车辆设计，这种可采用的设计本身可能受到限制．因此，实际上需要回答这样一些问题：我们能够做到最有效地利用我们稀有的资源吗？我们能够获得一个最经济的设计吗？在可接受的限制之内我们在进行冒险吗？30年来，在这些问题的压力之下，由于人们不断地努力探讨，使得在最优化模型和最优化技术方面，取得了很迅速的发展．很幸运，随着大型快速计算机的出现，使得已经提出的最优化技术在使用方面有了坚实可靠的基础．

第二次世界大战后，由于技术的发展，求解问题的规模及复杂性迅速增加，这就是刺激人们对问题采用系统性研究的另一原因．工程师和管理工作者们都被要求研究同一问题的各个方面，以及它们错综复杂的相互关系．在一个系统被作为一个整体来观察之前，必须理解该系统各部分之间的相互制约关系．在研究该系统各部分之间的相互制约关系过程

中，把测量技术和检验我们假设的统计方法相结合是一个重要的方法。

运筹学研究的范围可以归属或至少部分归属于工业、商业、军事和政府活动中。为了扩大运筹学的研究途径和研究方法以帮助决策者作出决策，战后初期，运筹学在工业方面的应用主要局限在线性规划和统计分析的范围。在那个时期，有效的计算程序和计算机代码对处理这些问题是很有效的。本书论述非线性规划，包括最优解的特征和提出计算程序。

这一章我们引进非线性规划问题，并就这一问题的某些简单情形进行讨论。我们的目的仅仅是提出非线性规划问题的某些背景，而不打算作深入的讨论。

1.1 问题陈述和基本定义

考虑下面的非线性规划问题：

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min.} & f(x) & \\
\text{s.t.}^* & g_i(x)\leqslant 0 & i=1,\cdots,m \\
 & h_i(x)=0 & i=1,\cdots,l \\
 & & x\in X
\end{array}
$$

其中$f,g_1,\cdots,g_m,h_1,\cdots,h_l$是在$E_n$上定义的函数，$X$是$E_n$的子集，$x$是$n$元向量，其分量为$x_1,\cdots\cdots,x_n$。求解上面的问题，必须是寻求满足所有约束同时又使函数$f(x)$取极小的变量$x_1,\cdots,x_n$的值。

函数f通常称为目标函数或者判别函数。约束$g_i(x)\leqslant 0$

*s.t.是"subject to"的缩写，意思为"约束条件"或"受约束于"下同——译注。

$i=1,\cdots,m$中的每个称为不等式约束. 约束$h_i(x)=0$ $i=1,$ l中的每个称为等式约束. 满足所有约的束向量$x\in X$称为问题的可行解. 所有可行解的全体组成可行域. 非线性规划问题, 则是寻找一个可行点$\bar{x}$使得对每一可行点x有$f(x)\geqslant f(\bar{x})$. 这样的点$\bar{x}$称为该问题的最优解,或更简单地称为解.

不用说, 一个非线性规划问题可以表述为一个极大问题, 而不等式约束可以写成形式$g_i(x)\geqslant 0$ $i=1,\cdots,m$.在当目标函数是线性和包含集X的所有约束可以表示为线性不等式和(或)线性等式的特殊情形下, 上面的问题就称为一个线性规划。

为了说明起见, 考虑下面的问题:

$$\text{Min.}\quad (x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1^2-x_2^2-3\leqslant 0$$

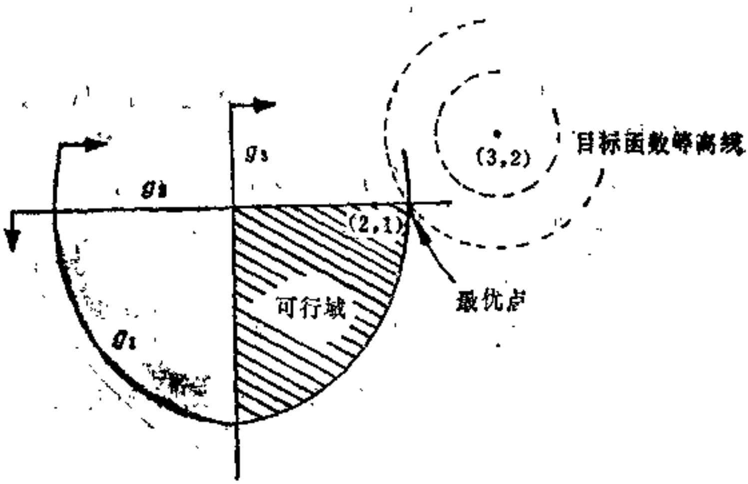


图1.1 非线性问题的几何解答

$$x_2-1\leqslant 0$$

$$-x_1\leqslant 0$$

目标函数和三个不等式约束是

$$f(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

$$g_1(x_1,\ x_2)=x_1^2-x_2-3$$

$$g_2(x_1,\ x_2)=x_2-1$$

$$g_3(x_1,\ x_2)=-x_1$$

图1.1说明可行区域. 这问题就是在可行区域上寻找使得$(x_1-3)^2+(x_2-{}_2)^2$为最小的点，注意，$(x_1-3)^2+(x_2-2)^2=c$上的点(x_1,x_2)是表示以(3,2)为中心，$\sqrt{c}$为半径的圆. 此圆称为目标函数取值c的等高线. 由于我们希望极小化c，所以我们必须寻找与可行域相交且具有最小半径的圆. 正如图1.1所示，这一最小的圆是$c=2$并且与可行域在点(2,1)相交. 所以最优解出现在点(2,1)，其相应的目标值等于2.

为了寻找最优解，上面使用的方法是确定与可行域相交有最小目标值的目标等高线. 显然，这一求解问题的几何方法，仅仅对小问题适用，对多于两个变量或有复杂目标函数和约束函数的问题则是不实际的.

符号（略）

1.2　一些说明例子

这一节我们讨论一些可以建立非线性规划问题的例子，特别讨论如下几方面的最优化问题：

A．　最优控制

B．　结构设计

C. 机械设计

D. 电网络

E. 水资源管理

F. 随机资源分配

G. 设施位置

A. 最优控制问题

正如我们即将学习的一个离散控制问题可以表述为一个非线性规划问题。而且一个连续最优控制问题可以用一个非线性规划问题去逼近。因此，本书后面讨论的方法可以用来求解某些最优控制问题。

离散最优控制

考虑一个持续K时期的固定时间的离散最优控制问题。在时期k的开始，该系统用状态向量y_{k-1}表示。在时期k末，控制向量u_k按照下面的关系把该系统的状态从y_{k-1}改变到y_k：

$$y_k = y_{k-1} + \Phi_k(y_{k-1}, u_k)$$

给出初始状态y_0，应用控制序列$u_1\cdots$，u_k能够得到一状态向量序列y_1，$\cdots y_k$，这些状态向量称之为轨道。这个过程如图1.2所示。

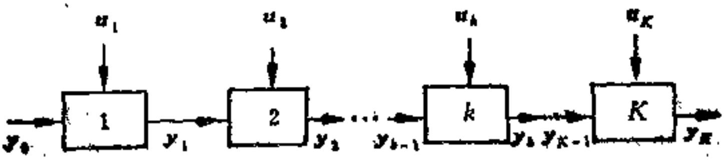


图1.2 离散控制系统说明

控制序列$u_1,\cdots,u_k$和状态向量序列$y_0,y_1,\cdots,y_k$称为可

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c