上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 85

一维守恒型方程(组)的熵耗散格式

● 作 者： 李 红 霞

● 专 业： 计 算 数 学

● 导 师： 茅 德 康

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 85

一维守恒型方程(组)的熵耗散格式

● 作 者： 李 红 霞

● 专 业： 计 算 数 学

● 导 师： 茅 德 康

图书在版编目(CIP)数据

2005年上海大学博士学位论文.第2辑/博士论文编辑部编.—上海：上海大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-81118-367-2

Ⅰ.2… Ⅱ.博… Ⅲ.博士—学位论文—汇编—上海市—2005 Ⅳ.G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第180878号

2005年上海大学博士学位论文

——第2辑

上海大学出版社出版发行
(上海市上大路99号 邮政编码200444)
(http://www.shangdapress.com 发行热线66135110)
出版人：姚铁军
*
南京展望文化发展有限公司排版
上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销
开本890×1240 1/32 印张274.25 字数7641千
2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷
印数：1～400
ISBN 978-7-81118-367-2/G·490 定价：980.00元(49册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2005)

Entropy Dissipating Scheme for Hyperbolic Systems of Conservation Laws in One Space Dimension

Candidate: Li Hongxia
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Mao Dekang

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	陈恕行	教授，复旦大学	200433
委员：	贺力平	教授，上海交通大学	200030
	王中庆	教授，上海师范大学	200234
	盛万成	教授，上海大学	200444
	王翼飞	教授，上海大学	200444
导师：	茅德康	教授，上海大学	200444

评阅人名单：

舒其望	教授，美国布朗大学	
王靖华	教授，中科院系统科学研究院	100080
江　松	研究员，北京应用物理与计算数学研究所	100088

评议人名单：

徐承龙	教授，同济大学	100871
贺力平	教授，上海交通大学	200030
盛万成	教授，上海大学	200444
贺国强	教授，上海大学	200444

答辩委员会对论文的评语

李红霞同学的博士论文《一维守恒型方程(组)的熵耗散格式》设计了一种 Godunov 型的高分辨率格式。此格式通过引入数值熵设计了一种计算分片线性重构的方法,这是此格式和传统的 Godunov 型格式的不同之处。格式的特点之一是利用数值熵来计算重构函数的斜率。从而引入粘性以稳定计算。

对于一般的熵函数,作者分析了格式的精度。论文用数值实验来表明通过合理的设计格式中的熵耗散因子及重构过程,可消除计算中多余的数值粘性,从而改善光滑解的长时间计算性态及线性间断的分辨率。作者设计了两种熵耗散因子及重构解函数的方法,并用大量的数值实验来验证格式的准确性。

该博士论文选题前沿,富有挑战性,论文论述清晰,书写流畅。从论文可以看出,作者对双曲守恒方程组的数值方法的研究状况及相关知识有较全面的掌握,数学基础扎实,有较强的科研能力。答辩委员会一致认为这是一篇优秀的博士论文,建议授予博士学位。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过李红霞同学的博士学位论文答辩，建议授予博士学位。

答辩委员会主席：陈恕行

2005年9月2日

摘　要

本文讨论的是一维双曲守恒律方程(组),我们给出了一种设计高分辨率格式的方法。此格式是 Godunov 型的,用的是分片线性重构。与传统的 Godunov 型格式不同的是此格式在计算过程中不仅计算数值解还计算了数值熵。在每个网格中线性重构函数的斜率是根据熵耗散得到的,它要求此网格上重构函数熵的网格平均应与此网格上的数值熵相等。数值解是根据有限体积法(finite-volume)求得的,同时数值熵计算的时候格式中有一熵耗散项,它在计算过程中耗散熵。通过这种方式为数值计算引入了适当的粘性,稳定了计算。

在[25]中,我们对于特殊的熵函数分析了格式的精度。本文中对于一般的熵函数,我们分析了格式的精度,格式在远离极值点处为二阶精度,在极值点附近为一阶精度。因为格式与传统的守恒型格式不同,所以我们给出了它的相容性定义和 Lax-Wendroff 定理,定理说明如果用我们的数值格式求得的数值解收敛,则它一定收敛到方程的满足熵条件的弱解。

设计这样一种格式的一个重要动机是期望用此类格式来克服守恒型方程组的数值模拟中线性特征场上的数值耗散问题。为此对于线性传输方程,我们用不带熵耗散函数的格式进行了一些数值实验,以研究数值熵对消除线性耗散问题的作用。在此研究的基础上,我们设计了两种格式,一种格式中我们仍给线性方程或方程组的线性特征场以一定的熵耗散以稳

定计算。另一种格式中我们保持线性方程或方程组的线性特征场上的熵守恒,同时为数值解的重构设计了一种所谓的“极大值减少极小值增”(Minimums-Increase-and-Maximums-Decrease或MIMD)斜率控制因子以消除间断附近的非物理振荡。

最后我们分别给出了用带线性熵耗散的格式和不带线性熵耗散但在数值解的重构中运用了MIMD斜率控制因子的格式进行数值实验,包括单个方程的和方程组的。从中我们可看出熵耗散因子是如何抑制非物理的振荡的,以及格式对计算的有效性。

关键词 守恒律,数值熵,熵耗散因子,数值耗散,MIMD斜率控制因子

Abstract

In this paper, we are concerned with hyperbolic conservation laws in one space dimension. We describe a method to design high resolution schemes for the equations. The designed scheme is of Godunov-type with piecewise-line reconstruction. Different from all other Godunov-type schemes for the conservation laws, our scheme computes not only the numerical solution but also an approximation to the entropy, called numerical entropy. In the scheme the reconstruction of solution is performed by requiring the cell-average of the entropy of the reconstructed solution to be equal to the numerical entropy in each grid cell. Both the numerical solution and numerical entropy are computed in a finite-volume fashion while the computation of the latter involves a so-called entropy dissipation term, which simulates the variation of the entropy. In doing so, the numerical dissipation is introduced in the scheme to stabilize the computation.

The definition of consistency of the schemes is given and a Lax-Wendroff theory for the scheme is also given, which says that if the numerical solution converges, it converges to an entropy solution of the orginal equation.

Since a major motivation of designing this kind of scheme

is to try to overcome the numerical dissipation in the linearly degenerated characteristic field in the system case, we conduct a numerical study of the scheme without entropy dissipation term on the linear advection equation to investigate the way in which the numerical entropy eliminates the linear dissipation. Based on this study, we designed two schemes of the type. In one of the schemes, certain entropy dissipation term is still involved in the computation of the entropy in the linearly degenerated characteristic field; thus, the numerical entropy is not coservative there. In the other scheme, we set the entropy dissipation in the linear field to be zero so that the numerical entropy is conservative in this field. We then design a so-called "Minimums-Increase-and-Maximums- Decrease" (MIMD) slope-limiter in the reconstruction step of the scheme to eliminate the non-physical oscillation then caused.

Finally, numerical examples of the schemes with the linear entropy dissipation and the scheme without the linear entropy dissipation but using the MIMD slope limiter in the reconstruction for both scalar conservation laws and the Euler system of gas dynamics are presented to show how the entropy dissipation term suppresses nonphysical oscillations near discontinuities and to illustrate the efficiency of the scheme.

Key words: conservation law, numerical entropy, entropy dissipation term, numerical dissipation, MIMD slope-limiter

目　录

第一章 引 言

随着计算机科学技术的飞速发展，计算流体动力学自20世纪60年代中期已形成一门独立的学科分支，成为研究流体运动规律、解决很多工程实际问题的三大手段（理论、实验和计算）之一。计算流体动力学（Computational Fluid Dynamics，简称CFD）是利用计算机和数值方法求解满足定解条件的流体动力学方程（组）以获得流动规律和解决流动问题的专门学科。而守恒型方程（组）及其数值方法作为计算流体动力学的一个重要的组成部分也得到了快速的发展。它所关心的是对具有如下形式的守恒型方程组

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1.1}$$

进行数值模拟。该守恒型方程（组）是由物理定律的积分形式得到的。其在工程技术领域有着很广泛的应用，很多重要的物理和力学现象都可归结为守恒型方程组。其中最著名的是Euler方程组(2.26)，它是由物理中的（质量、动量、能量）三大守恒定律得到的，是空气动力学的基本方程组，其在航空、航天及大气科学等领域中都有着很广泛的应用。

守恒型方程（组）(1.1)是拟线性双曲型方程（组）。对于它，无论所给的初值及边值条件如何光滑，它的解都会产生间断，而且间断既可以产生（自发生激波）又可以消失。另外解还有连续部分，它可以是简单波，如压缩波、稀疏波等。间断在物理和力学中就对应着激波和切向间断。激波在流体动力学中有着双重的重要性，它既是人们关心的一种物理现象，又是求解流体动力学方程（组）时需加以关注的数学特性。以上的这些特性给求解流体动力学方程组带来了数学上的和数值模拟上的困难。通常人们所使用的数值方法是在假设解

是光滑的前提下设计的。当解产生间断时，如果仍然用求光滑解有效的数值方法来求间断解，则往往会在间断附近出现非物理的振荡或间断磨损。数值解在间断附近出现非物理的振荡是因为算法非线性不稳定，而在间断处有磨损是因为在间断附近算法含有过多的粘性影响了精度。因此设计既稳定又是高阶精度的算法是守恒型方程(组)数值方法所需要面临的问题。

求解方程组(1.1)的一类重要的数值方法为间断捕捉法。间断捕捉法的特点是：在计算的过程中不考虑间断的存在而在整个流体的任何地方都用几乎同样的数值格式，借助方法所固有的数值耗散性效应(或者数值粘性效应)，自动地捕获到所要计算的间断，它期望间断在数值解中表现为很窄的过渡层。该类方法的思想比较简单，便于编写程序。古典的人工粘性法以及各种具有数值耗散性的有限差分方法都属于此类。

一阶单调格式，如 Lax-Friedrichs 格式、Godunov 格式尽管在计算过程中不会出现非物理振荡，并且能保证非线性稳定性，但是在求解中尤其是间断附近不能保证很满意的精度，会出现对间断解的严重磨损。高阶格式，如 Lax-Wendroff 格式，在计算过程中会出现非物理振荡从而影响计算。因此在设计高阶格式的时候，需引入保证非线性稳定性的机制，以控制间断附近的非物理的振荡，实现计算的稳定性。这些机制为格式引入恰当的耗散或数值粘性。当解光滑时这些耗散项是网格大小的高阶量，当解发生间断时它为 $O(1)$。这些年来，人们建立了很多高分辨率(high-resolution)的格式，它们在解的光滑区域具有高阶精度，在间断附近为很陡的结构而非振荡(见[4,5,10-13,15,21,29,30,33,35,36,39,41-43]和本文参考文献中的其他文献)。

众所周知，众多有物理背景的守恒型方程组都具有熵，它是一个有实际意义的物理量，而且是检验一个解是否是物理解的标准。由此，在守恒型方程组的数值方法的研究之中，格式是否满足一定的熵条件，也是一个十分关心的问题，并由此引发了很多研究。一阶的

Lax-Friedrichs 格式、Godunov 格式都是满足熵条件的,见[20,21]。另外,也有一些高阶的格式满足熵条件,如见[2]。然而,在所有这些格式中,计算的都只是数值解,它是对精确解的逼近。在讨论熵条件时,数值熵都是依赖于数值解的,在格式中它们并没有被作为一个独立的量来计算。另外,熵条件也只是被视为一种重要的性质,希望在设计格式时能保留它。

在本文中,我们将给出一个有限体积差分格式。然而和所有以往的格式不同的是我们所设计的格式不仅计算了数值解,同时还计算了数值熵,它是对解的熵函数的逼近,这是一个在格式中独立计算的量。数值解和数值熵都是按有限体积法(finite-volume)的方式计算的,详见本文第三章。但是和解不同,解的熵函数可能不守恒,例如跨过非线性间断时。因此数值熵的计算过程中伴随着一个所谓的熵耗散函数,它模拟了时空网格上熵变化。从本文后面的讨论(见第三章)可看出熵耗散函数能为计算引入一定的数值粘性,从而能耗散数值解以起到稳定计算的作用。这个熵耗散函数在我们的格式中起着重要的作用,它的设计好坏直接影响到了格式的质量。

然而人们可能要问,当今我们已有如此之多的高分辨有限体积格式,并已发展了众多设计高分辨格式的有效方法,诸如 TVD、ENO、WENO、NT……等等,现在设计如上所述的格式,其意义何在?为了回答这一问题,我们得先来看一下,目前对守恒型方程组的数值模拟中还存在哪些问题。

如前所述,所有的有限体积差分格式都引入了数值粘性以稳定计算。但这带来的负面效应是间断都被磨损了。激波由于两边有压力差,在数学上表现为其两边的特征线走向激波,因此它们的磨损情况还不是很严重,其还是可以接受的。然而对于切向间断或二维流动中的滑移线,由于它们两边没有压力差,因此其数值磨损的程度就严重得多。它们会以 $O(\sqrt{h})$ 的速率随时间的增长不断地磨损。一个典型的情况如图 1.1 所示。这儿所考虑的微分方程为

$$u_t + u_x = 0 \tag{1.2}$$