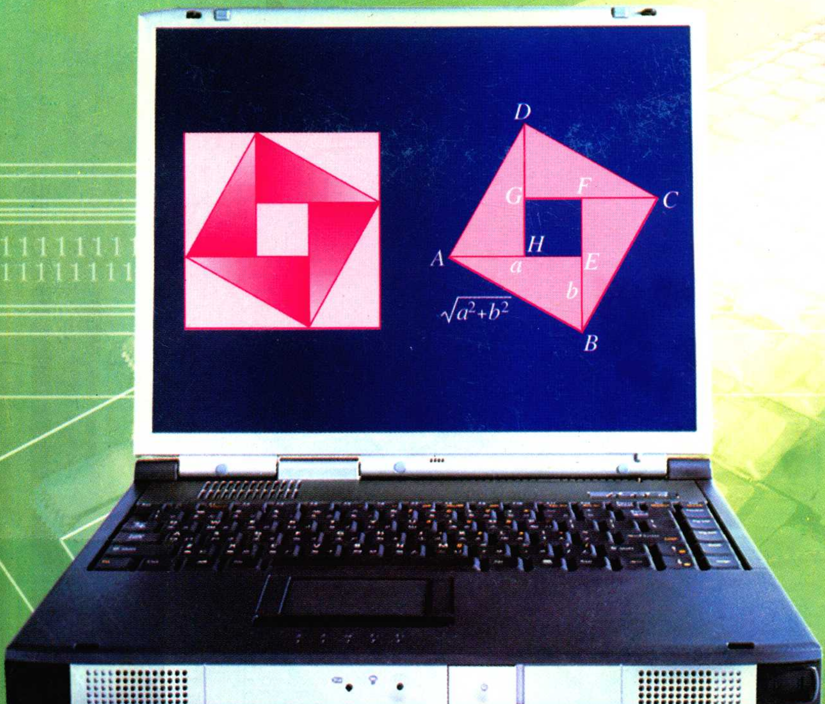
经全国中小学教材审定委员会
2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

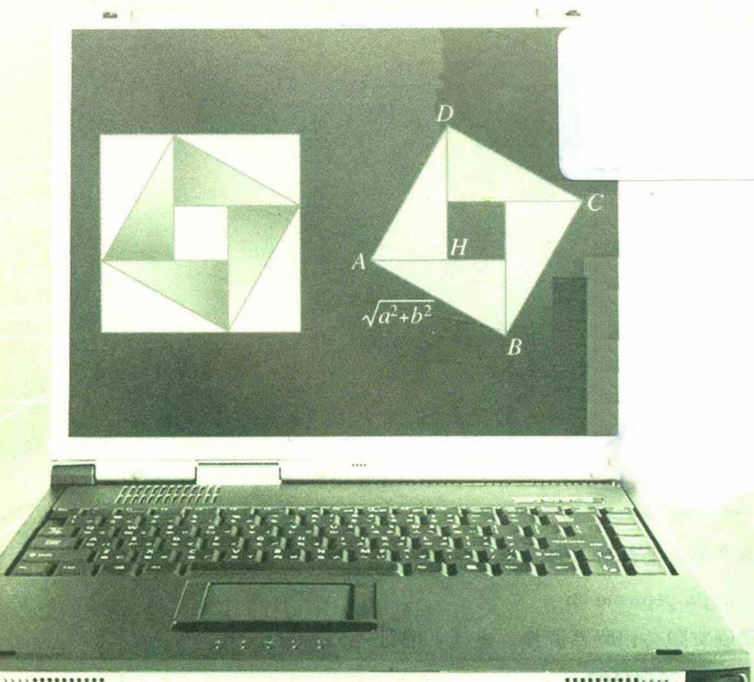
A版

普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书　数学 5　必修　A 版
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　版　人民教育出版社
　　　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　址　http://www.pep.com.cn
重　印　河北省出版总社有限责任公司
发　行　河北省新华书店
印　刷　河北新华联合印刷有限公司
版　次　2007 年 1 月第 3 版
印　次　2017 年 6 月第 1 次印刷
开　本　890 毫米×1240 毫米　1/16
印　张　7.25
字　数　155 千字
印　数　1-187,600 册
书　号　ISBN 978-7-107-17709-5
定　价　11.70 元（含光盘）
冀价管〔2016〕86 号　冀价审〔2017〕109165　全国价格举报电话：12358

如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与河北新华联合印刷有限公司联系调换。电话：0311-85538083
邮购电话：400-707-5816；0311-66720366　投诉电话：0311-88641102

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：李建华
主要编者：俞求是　李建华　宋莉莉　薛　彬　郭玉峰　张炜卓　杨照宇
责任编辑：俞求是
美术编辑：王俊宏
设　　计：王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，她是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构与探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西

强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

学数学趁年轻. 同学们，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

本册导引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书. 本书是高中数学必修课程5个模块中的一个，包括解三角形、数列与不等式等三章内容.

三角形是最基本的几何图形，三角形中的数量关系是最基本的数量关系，有着极其广泛的应用. 我们将在以前学习的有关三角形、三角函数和解直角三角形知识的基础上，通过对于任意三角形边角关系的研究，发现并掌握三角形中的边长和角大小之间的数量关系，并运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

数列可以看成一种特殊的函数，是反映自然规律的一种基本数学模型. 数列在计算机技术中扮演着重要角色. 我们将通过对日常生活中大量实际问题的分析，建立等差数列和等比数列这两种数列模型，探索并掌握它们的一些基本数量关系，感受这两种数列模型的广泛应用，并利用它们解决一些实际问题.

不等关系与相等关系都是客观存在的基本数量关系，是数学研究的重要内容. 建立不等观念、处理不等关系与处理等量问题是同样重要的. 在本模块中，学生将通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值；学习一元二次不等式的基本解法，并能解决一些实际问题；能用二元一次不等式组表示平面区域，并会解决一些简单的二元线性规划问题；认识基本不等式及其简单应用；认识不等式、方程及函数之间的联系.

学习始于疑问. 在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动中，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的从具体到抽象、从特殊到一般的抽象概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础.

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考才能真正学会数学，同时应当掌握科学的思维方法. 在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是蕴涵在数学知识中的数学思想方法，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使同学们学会数学思考与推理，不断提高数学思维能力.

学习的目的在于应用. 在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念本质的理解，认识数学知识与实际的联系，并学会用数学知识和方法解决一些实际问题. 另外，我们还开辟了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为同学们提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究.

祝愿同学们通过本书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在用数学解决实际问题的能力等方面都有较大提高，并培养更浓厚的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识.

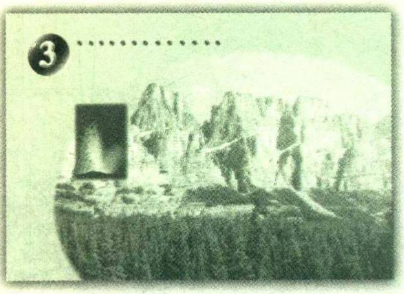
本书部分常用符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\sin^2 x$	$\sin x$ 的平方
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\mathbf{N}^*$	正整数集
a_n	数列$\{a_n\}$的第 n 项
S_n	数列前 n 项的和
d	等差数列的公差
q	等比数列的公比
$>$	大于
$<$	小于
$\geqslant$	大于或等于
$\leqslant$	小于或等于

1

天文观测，航海和地理测量
是人类认识自然的重要方面，解三
角形的理论在其中发挥了重要作用.

目录



第一章 解三角形

在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事.明月高悬，我们仰望夜空，会有无限遐想，不禁会问，遥不可及的月亮离地球究竟有多远呢？

1671 年，两个法国天文学家测出了地球与月球之间的距离大约为 385 400 km. 他们是怎样测出两者之间距离的呢？

在数学发展历史上，受到天文测量、航海测量和地理测量等方面实践活动的推动，解三角形的理论得到不断发展，并用于解决许多测量问题.

在初中,我们已经能够借助于锐角三角函数解决有关直角三角形的一些测量问题.在实际工作中我们还会遇到许多其他的测量问题，这些问题仅用锐角三角函数就不够了，如：

1. 怎样在航行途中测出海上两个岛屿之间的距离？

2. 怎样测量底部不可到达的建筑物的高度？

3. 怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔高度？

4. 怎样测出海上航行的轮船的航速和航向？

这些问题的解决需要我们进一步学习任意三角形中边与角关系的有关知识.

在本章中我们要学习正弦定理和余弦定理,学习应用这两个定理解三角形，并解决实际测量中的一些问题.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

探究

我们知道，在任意三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系．我们是否能得到这个边、角关系准确量化的表示呢？

在$\triangle ABC$中，如果已知$\angle A$所对的边BC长为a，$\angle B$所对的边AC长为b，$\angle C$所对的边AB长为c，我们研究$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，a，b，c之间有怎样的数量关系．

由于我们不容易直接得到一般三角形中边和角的关系，所以，我们先考虑直角三角形这种特殊情形．

如图 1.1-1，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C$是最大的角，所对的斜边c是最大的边，要考虑边长之间的数量关系，就涉及到了锐角三角函数．根据正弦函数的定义，

$$\frac{a}{c}=\sin A,$$

$$\frac{b}{c}=\sin B.$$

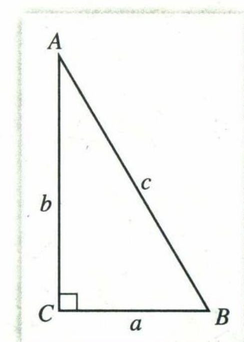


图 1.1-1

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又$\sin C=1$，所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

那么，对于一般的三角形，以上关系式是否仍然成立呢？

如图 1.1-2，当$\triangle ABC$是锐角三角形时，设边AB上的高是CD，根据三角函数的定义，

$$CD=a\sin B,$$

$$CD = b\sin A,$$

所以

$$a\sin B = b\sin A,$$

得到

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

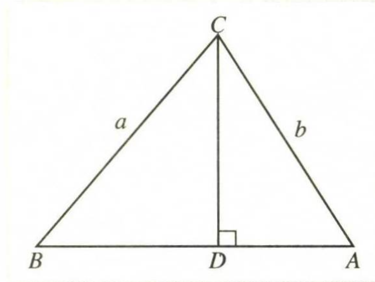


图 1.1-2

同理，在$\triangle ABC$中，

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

探究

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，以上等式仍然成立吗？
是否可以用其他方法证明正弦定理？

从上面的讨论和探究得到以下定理.

正弦定理 (law of sines)　在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

正弦定理指出了任意三角形中三条边与对应角的正弦之间的一个关系式. 由正弦函数在区间上的单调性可知，正弦定理非常好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

一般地，把三角形的三个角 A，B，C 和它们的对边 a，b，c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做**解三角形** (solving triangles).

思考

我们利用正弦定理可以解决一些怎样的解三角形问题呢？

分析正弦定理可知，如果已知三角形的任意两个角与一边，由三角形内角和定理，可以计算出三角形的另一角，并由正弦定理计算出三角形的另两边；如果已知三角形的任意两边与其中一边的对角，应用正弦定理，可以计算出另一边的对角的正弦值，进而确定这个角和三角形其他的边和角.

例 1　在$\triangle ABC$中，已知 $A=32.0°$，$B=81.8°$，$a=42.9$ cm，解三角形.

解： 根据三角形内角和定理，

$$C = 180° - (A + B)$$

$$=180°-(32.0°+81.8°)$$
$$=66.2°.$$

根据正弦定理，

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{42.9\sin 81.8°}{\sin 32.0°}\approx 80.1(\text{cm});$$

根据正弦定理，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{42.9\sin 66.2°}{\sin 32.0°}\approx 74.1(\text{cm}).$$

例2 在△ABC 中，已知 $a=20$ cm，$b=28$ cm，$A=40°$，解三角形（角度精确到1°，边长精确到 1 cm）.

解：根据正弦定理，

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{28\sin 40°}{20}\approx 0.8999.$$

因为 $0°<B<180°$，所以 $B\approx 64°$，或 $B\approx 116°$.

(1) 当 $B\approx 64°$时，

$$C=180°-(A+B)\approx 180°-(40°+64°)=76°,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 76°}{\sin 40°}\approx 30(\text{cm});$$

(2) 当 $B\approx 116°$时，

$$C=180°-(A+B)\approx 180°-(40°+116°)=24°,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 24°}{\sin 40°}\approx 13(\text{cm}).$$

练习

1. 在△ABC 中，已知下列条件，解三角形（边长精确到 1 cm）：
   (1) $A=45°$，$C=30°$，$c=10$ cm；
   (2) $A=60°$，$B=45°$，$c=20$ cm.
2. 在△ABC 中，已知下列条件，解三角形（角度精确到 1°，边长精确到 1 cm）：
   (1) $a=20$ cm，$b=11$ cm，$B=30°$；
   (2) $c=54$ cm，$b=39$ cm，$C=115°$.

1.1.2　余弦定理

探究

如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角，根据三角形全等的判定方法，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形.

我们仍然从量化的角度来研究这个问题，也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角的问题.

先考虑怎样计算出三角形第三条边的长. 这就是要研究如何用已知的两条边及其所夹的角来表示第三条边的问题.

如果已知三角形的两边的长 $BC=a$，$AC=b$，边 BC 和边 AC 所夹的角是 C，我们要设法找出已知的 a，b 和 C 与第三条边 c 之间的一个关系式，或用已知的 a，b 和 C 表示第三条边 c 的一个公式.

思考

联系已经学过的知识和方法，我们从什么途径来解决这个问题呢？

由于涉及边长问题，我们可以考虑用向量的数量积，或用解析几何中的两点间距离公式来研究这个问题.

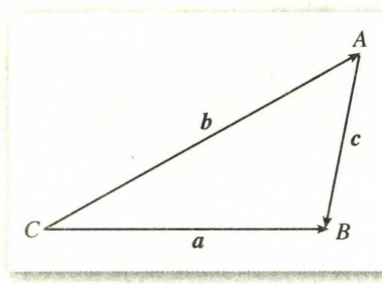


图 1.1-3

如图 1.1-3，设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，那么

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

所以

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

同理可以证明：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

在这个证明中，你感到向量运算的威力了吗？

于是，得到以下定理：

余弦定理（law of cosines）　三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去