当代优秀专著丛书

分形-岩石力学导论

谢和平 著

科学出版社

1996

内 容 简 介

分形-岩石力学定义为在分形空间中考虑的岩石力学，或者说在岩石力学问题分析求解中考虑到分形的效应和影响。本书介绍了分形-岩石力学的数学基础，从空间、测度、维数、分形和分形空间入手，引入自相似和自仿射，多重分形和分形插值等概念，进而讨论了分形空间中的力学量和力学定律。重点介绍了岩石材料中的分形损伤，分形断裂（微观断裂、动静态分形裂纹扩展、疲劳裂纹的分形扩展、多重分形断裂等），岩土介质的分形孔隙和分形粒子，分形接触力学和分形节理（内表面）的理论和实验研究。

本书介绍内容是岩石力学学科一个全新的领域，可以作为从事应用数学、力学、岩土工程、采矿、地质等专业的高年级本科生、研究生的教材以及大专院校教师和研究院所科研人员的科研参考书。

当代优秀专著丛书

分形-岩石力学导论

谢和平　著

责任编辑　杨　岭

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1996年11月第一版　　开本：850×1168　1/32

1997年1月第一次印刷　　印张：12

印数：1－1 300　　字数：320 000

ISBN 7-03-005331-1/O・854

定价：24.00元

前　　言

当今世界，自然科学与技术以前所未有的速度发展，新兴学科层出不穷。近年来，耗散结构理论、协同论、突变论、混沌理论、渗流理论、分形几何等这些与非线性现象有关的新理论、新观点、新方法已不同程度地渗入到各个研究领域。特别值得注意的是分形几何自 1982 年形成以来，在岩石力学领域诸如矿物学、地质构造、岩石断裂、岩石破碎、岩石和土粒子的表面和孔隙率、地下水渗透、节理粗糙度以及石油勘探和地震预测等分支学科中，过去我们认为难以解释或难以解决的问题，现在均有分形研究的新成果。分形几何已成为岩石力学研究中解决复杂性问题和工程实际问题的一个非常有用的工具和方法，受到了国内外学术界的充分重视。

为了不断更新研究生教学内容，介绍科学技术发展的新领域，新成果，我们在国内外最早开设了"分形-岩石力学"(Fractals-Rock Mechanics)这门课程(1990 年 12 月至 1991 年 9 月在美国 Utah 大学，并列入该校教学计划)，并编写了这门课程的英文讲义。近几年在国内给研究生每年均开设了这门课程。本书就是在这本英文讲义的基础上修改、补充后形成的，主要介绍我们 1985—1995 在分形和岩石力学结合方面的系列研究成果。特别是增加了 1992 年以来我们在分形-岩石力学方面的一些深入的研究，其中也包括国内外同仁的部分研究结果。

全书共分六章。第一章是分形-岩石力学的数学基础，包括空间、测度与维数，分形和分形空间，分维及其量测方法，自相似和自仿射，随机分形，多重分形与小波变换，分形插值函数以及分形空间中的力学量和力学定律。第二章讨论了分形孔隙与分形粒子，主要介绍了孔隙介质的分形模型，分形孔隙特性和它们的分形量测方法，分形粒子和水土保持中的分形毛细管模型。第三章为分形损

伤力学，详细讨论了损伤与损伤力学，损伤演化的分形几何特征，材料损伤演化过程的分形机理，Weibull 模量与材料强度的分形性质，材料损伤演化过程中孔隙体积分维变化的测定及规律，以及分形损伤演化过程的计算机模拟。第四章重点介绍了分形断裂力学，包括断裂表面的分形特征和自相似性程度，微结构、微观断裂与分形，疲劳裂纹扩展和裂纹分叉的分形效应，多重分形断裂，分形破碎与能量耗散以及岩爆的分形特征和机理。第五章讨论了粗糙表面的分形接触力学行为。第六章详细介绍了分形节理研究进展及节理的分形理论模型，压剪过程中节理面的分形损伤及力学特性，以及分形节理的光弹性模拟分析。

分形-岩石力学作为一个新的交叉学科领域，还很不成熟，处于发展初期，新成果必将层出不穷。但愿这本书能起到抛砖引玉的作用。由于作者水平有限，书中难免存在谬误和不当之处，敬请读者批评指正。

本书介绍的大部分内容是作者 1985－1995 在分形-岩石力学领域的研究总结。在这段研究过程中得到了首批国家杰出青年科学基金、国家教委首批跨世纪优秀人才专项基金、国家教委博士点基金、煤炭科学基金、煤炭系统优秀回国人员基金、IET 教育基金和劳动人事部优秀回国人员基金等项目的资助，同时得到国内外采矿与岩石力学、数学和力学界前辈和同仁们：E. Stein 教授、P. D. Panagiotopoulos 教授、W. A. Kwasniewski 博士、W. G. Pariseau 教授、J. A. Hudson 教授、范维唐院士、郑哲敏院士、陈至达教授、龙期威研究员、黄克智院士、白以龙院士、孙钧院士、宋振骐院士、钱鸣高院士、刘天泉院士等的大力支持、鼓励和指导，在此表示衷心感谢。

谢和平

1995 年 10 月于北京

主要数学符号

ϕ——空集

$\exists$——存在

$\in$——属于

$\forall$——任意

$\cup$——并

$\cap$——交

R^n——n维实数集

C——复数域

$B(x,r)$——以x为中心,以r为半径的球

$C^m(\Omega)$——函数在区域Ω内的m阶分布导数均连续

L^P——Banach 空间

$W_K^P(\Omega)$——Sobolev 空间

$B_\beta^{PP}(F)$——$W_K^P(R^n)$的对于F的迹空间

inf——下确界

sup——上确界

$\|\cdot\|$——范数

绪　　论

岩石力学是研究岩石材料在荷载作用下的应力、变形和破坏规律及工程稳定性问题的一门科学。岩石材料是亿万年自然沉积形成的，存在不同阶次的随机分布的微观孔隙和裂纹。在宏观尺度上天然岩体是非均质、非弹性、各向异性，而且具有时效性。由于地质构造运动和其他应力的作用，天然岩体为各种地质结构面（节理和断层）所切割。这一重要特征表征岩石是一种很特殊很复杂的材料，它不是离散介质（因为它是结晶材料），也不是连续介质，因存在宏、细、微观的不连续性。所以岩石材料实质上是似连续又非完全连续、似破断又非完全破断的介质。现有的连续介质力学理论和离散介质力学理论均不能很好地描述这种特殊的介质。正如美国机械工程师协会在固体力学发展趋势中所指出：由于岩土介质的特殊性和复杂性，我们应发展一些全新的理论、思想和方法……。

由 Mandelbrot（1982 年）发展起来的分形几何是一门新的数学分支，是用来描述自然界的不规则以及杂乱无章的现象和行为的。分形几何学的主要概念是分维即维数可以是分数。分数维数最早由 Hausdorff（1919）提出（也称为 Hausdorff 维数）。后来 Mandelbrot 将分数维数推广形成分形几何学。他认为分数维数的概念是一个可用于研究许多物理现象的有力工具，而分形几何学则能用来处理那些极不规则的形状。我们知道，在经典几何学中，点是零维的，任何曲线是一维的，任何曲面和表面是二维的，这种维数只取整数值，是拓扑学意义下的维数，称为拓扑维数 D_T，它反映的是为了确定一个点在空间的位置所需的独立坐标的数目或独立方向的数目。Mandelbrot 定义分形为：如果一个集合的 Hausdorff 维数严格大于它的拓扑维数 D_T，则该集合为分形。这样分维可以是整数，也可以是分数，它是图形的不规则性的度量。

自然界中存在大量的分形边界(如不规则的边界条件、裂纹、断层、内界面等等)和分形物体。比如岩石材料作为亿万年地质演变的产物,具有大量自然形成的不同阶次的孔隙、空洞和裂纹分布,可以抽象地看成高刚度的海绵体。对一个海绵立方体在欧氏空间看是3维的,而在单向压力作用下,由于海绵体的高度孔隙性,可以压扁在一个平面上,这时它的欧氏维数是2。这种维数量纲的突变性说明欧氏空间的整数维只是一个表观维数,海绵体受压前是3维,压扁时为2维,表明它是描述当时那一状态下的表观形体,对其内在的多孔隙性、物体的内部结构的几何特征无法描述。事实上,海绵体可以看成一个分形物体(如 Mengor 海绵),它的维数是处于2和3之间。这说明分形维数刻画了海绵体这类随机分布的孔隙体的几何结构的本质。基于这一思想,作为抽象地看成高刚度海绵体的岩石完全可近似认为是分形物体,这样它的变形、破坏、能量耗散等等物理力学行为将表现出分形特征。目前国内外的大量研究已证实了我们的这一思想。事实上,人们已发现岩石力学领域的分形现象相当普遍,从微观结构的位错分布、局部剪切场到地壳的运动和变形都已观察到分形的行为和分形结构。

众所周知,现有力学理论和定律是建立在欧氏空间即整数维空间的假设上。对岩石这类"分形物体"的力学行为,现有力学理论只能给出近似描述,有时甚至无能为力。这也许是岩石力学学科长期以来停滞不前的原因之一。我们必须用新的理论方法才能去描述它的本质的力学行为。

在分形空间考虑的岩石力学问题我们称为分形-岩石力学,具体地说,分形-岩石力学是在岩石力学问题的分析求解过程中考虑到分形的效应和影响。由于分形几何的不规则性,现有的一些力学概念和定律在分形空间中需要重新去认识和建立。因此分形-岩石力学的研究范畴包含了三个层次:第一层次是研究分形-岩石力学的数学基础或形成其基本的数学框架,以及重新认识和建立分形空间中的力学量和力学定律;第二个层次是广泛、系统地研究探讨岩石力学中的分形行为和分形结构,揭示岩石力学问题中的一些

复杂现象的分形机理和形成过程，应用分形定性定量地解释和描述岩石力学中过去只能近似描述仍至难以描述的问题和现象；第三个层次是将分形-岩石力学的理论和研究成果应用到工程，对工程中的复杂性关键技术问题进行统计描述，解决工程问题，促进工程问题中的定量化、精确化和可预测性。从目前国内外研究状况来看，第一个层次的研究实质上是数学力学基本理论的研究，由于分形数学本身尚未成熟，正在发展中，因此这方面的研究相当滞后，也是很复杂和艰难的。第二个层次的研究已成为国内外研究热点并已有一些初步成果，形成了影响，但在深度和广度上还需继续研究探讨。第三个层次的研究才刚刚起步。基于这样的一个定位，构成了我们这本书的名称——分形-岩石力学导论，这个“导论”意指这个新的学科分支还相当不成熟，这个领域的研究才刚刚开始，有待大家去开发，去研究，去探讨。

目　　录

前言

主要数学符号

绪论

第一章　分形-岩石力学的数学基础 …… 1

1.1　空间、测度与维数 …… 1

1.1.1　拓扑空间 …… 2

1.1.2　测度空间 …… 2

1.1.3　线性空间 …… 2

1.1.4　度量空间 …… 3

1.1.5　线性赋范空间 …… 3

1.1.6　内积空间 …… 4

1.1.7　空间 L^p(p 为正数)的几种情况 …… 4

1.1.8　Sobolev 空间 …… 5

1.1.9　Lebesgue 测度 …… 5

1.1.10　Hausdorff 测度 …… 6

1.1.11　维数概念和 Hausdorff 维数 …… 8

1.2　分形和分形空间 …… 11

1.3　分维及其量测方法 …… 15

1.3.1　长度测量及维数的一种定义 …… 15

1.3.2　分形维数的估测 …… 20

1.3.3　经典分形和维数计算 …… 23

1.4　自相似和自仿射分形 …… 29

1.4.1　自相似分形 …… 29

1.4.2　自仿射和自仿射分形 …… 30

1.4.3　线性分形与非线性分形 …… 41

1.4.4 Weierstrass-Mandelbrot 函数 …… 42
1.5 随机分形，多重分形与小波变换 …… 45
1.5.1 随机分形 …… 45
1.5.2 分形逾渗(Fractal Percolation) …… 49
1.5.3 多重分形(multifractals)概念 …… 51
1.5.4 广义维数 D_q 和 $f(\alpha)$谱的计算方法 …… 60
1.5.5 小波变换与多重分形 …… 62
1.5.6 分形熵与热力学 …… 66
1.6 分形插值 …… 69
1.6.1 迭代函数系统(IFS) …… 69
1.6.2 分形插值函数 …… 74
1.7 分形空间中的力学量和力学定律 …… 78
1.7.1 分形-岩石力学的概念和假设 …… 78
1.7.2 Besov 空间与 Sobolev 空间的分形的迹定理 …… 80
1.7.3 分形边界和分形体中力学量所属空间及其迹的定义 …… 90
1.7.4 塑性中的分形屈服表面 …… 92
第二章 分形孔隙和分形粒子 …… 93
2.1 孔隙介质的分形模型 …… 93
2.2 分形孔隙特性和它们的分形量测方法 …… 97
2.2.1 离散方法 …… 97
2.2.2 散射方法 …… 105
2.2.3 吸附方法 …… 108
2.3 分形粒子 …… 112
2.4 水土保持估测中的分形毛细管模型 …… 123
第三章 分形损伤力学 …… 129
3.1 损伤及损伤力学 …… 129
3.2 材料损伤演化的分形特征 …… 134
3.3 材料损伤演化过程的分形机理 …… 138
3.4 Weibull 模量与材料强度的分形性质 …… 144

3.5 材料损伤演化过程中孔隙体积分维变化的测定及规律 …… 148
3.6 分形损伤演化过程的计算机模拟 …… 155
3.6.1 网络模型和 DLA 模型 …… 155
3.6.2 表面开裂模型 …… 160
3.6.3 损伤演化诱导突变模型 …… 162
第四章 分形断裂力学 …… 168
4.1 断裂表面的分形特征与自相似性程度 …… 169
4.1.1 断裂表面的分形测量原理与方法 …… 170
4.1.2 断裂表面的分形特征 …… 176
4.1.3 断裂表面自相似性存在的程度估测 …… 181
4.2 微结构、微观断裂与分形 …… 187
4.2.1 微结构、混沌、分维 …… 187
4.2.2 滑移线、塑性剪切与分形 …… 188
4.2.3 微观断裂的分形模型 …… 190
4.3 分形裂纹的能量耗散和尺寸效应 …… 198
4.4 动、静态分形裂纹扩展 …… 206
4.4.1 分形裂纹扩展对裂纹扩展速度的影响 …… 206
4.4.2 沿分形路径扩展的裂纹顶端运动 …… 209
4.4.3 分形裂纹扩展的弯折(kinking)效应 …… 211
4.4.4 分形裂纹扩展对静态应力强度的影响 …… 217
4.4.5 分形裂纹顶端的应力场和位移场 …… 218
4.5 疲劳裂纹扩展的分形效应 …… 219
4.5.1 分形疲劳断裂 …… 220
4.5.2 分形裂纹扩展对材料疲劳行为的影响 …… 222
4.6 裂纹分叉的分形效应 …… 228
4.6.1 裂纹分叉的分形模型 …… 230
4.6.2 宏观裂纹分叉的分形效应 …… 233
4.7 多重分形断裂 …… 234
4.8 分形破碎与能量耗散 …… 239

4.8.1 破碎块度分布的分形性质 …………………………… 240
4.8.2 块度分布分维的概率定义及其与细观结构的关系 …………………………………………… 243
4.8.3 断裂破碎与能量耗散 …………………………… 246
4.9 大尺度下断裂(岩爆与地震)的分形特征和机理 … 249
4.9.1 分形量测方法 …………………………………… 251
4.9.2 岩爆的分形特征 ………………………………… 252
4.9.3 岩爆的分形和物理机理 ………………………… 257
第五章 粗糙表面的分形接触 …………………………… 262
5.1 粗糙表面接触研究进展 ……………………………… 263
5.2 分形接触模型 ………………………………………… 265
5.2.1 基于 W-M 函数的分形接触模型 ……………… 266
5.2.2 基于 Cantor 集的分形接触模型 ……………… 271
5.2.3 基于接触点数目分布的分形接触模型 ………… 285
第六章 分形节理(内表面)的理论和实验研究 ………… 291
6.1 分形节理研究进展及节理的分形理论模型 ……… 293
6.2 剪切过程中节理面的分形损伤及力学特性 ……… 304
6.2.1 岩石节理(断裂)表面的激光扫描量测及自仿射分形描述 ………………………………………… 305
6.2.2 岩石节理分形力学特征 ………………………… 307
6.2.3 岩石节理分形表面损伤演化规律 ……………… 314
6.3 分形节理的光弹性模拟分析 ………………………… 318
6.3.1 分形节理的光弹性实验研究 …………………… 320
6.3.2 单压载荷下分形节理的应力场分析 …………… 332
6.3.3 压剪载荷下分形节理的应力场分析 …………… 343
6.3.4 分形节理接触力学特征 ………………………… 353
参考文献 ………………………………………………… 359

第一章　分形-岩石力学的数学基础

众所周知，现有岩石力学理论和定理均是建立在欧氏空间即整数维空间的假设上，而自然界中存在大量的分形界面（如不规则边界条件，裂纹，内界面等）和分形物体（如岩石、混凝土等孔隙介质）。在分数维空间上考虑的岩石力学问题我们称为分形-岩石力学[1-3]，或者说在岩石力学问题的分析求解中考虑到分形的影响和效应。分形-岩石力学是一个全新的领域。由于分形几何的不规则性和非光滑性[4-9]，现有的力学概念和力学定律需要重新去认识和建立。我们需要去研究：

（1）分形-岩石力学的数学基础；

（2）在分形空间，力学量的定义、力学定律的适用性；

（3）结构分析计算在分形空间中的拓广；

（4）具有分形边界或区域的岩石力学问题的求解，等等。

由于分形几何本身也处于发展阶段，我们只能对上述问题进行初步的探讨和讨论。本章介绍现有的分形数学基础以及分形空间中如何去定义力学量和建立力学定律的基本思路。

1.1　空间、测度与维数

空间是数学中经常遇到但又很难给出确切定义的一个概念。通常，如果在基本集 X 中引进某些公理就称它某类空间。由于给定一个集合仅仅是将具有某种共同特性的元素集合在一起，而给出一个“空间”就意味在集合的元素中建立了某种“结构”；犹如砖、瓦、水泥等只能是建筑材料的集合，只有给定它们间的某种结构才能建立成房屋——空间。只有建立了空间的概念，才能促使数学研究的手段应用到抽象集合中去[10-11]。

1.1.1 拓扑空间

对于基本集 X，如果存在由 X 的子集构成的集簇 $\mathscr{X}$ 满足如下拓扑公理：

a. 空集$\varnothing$，$X\in\mathscr{X}$

b. 若 $G_k\in\mathscr{X}$，$k=1,2,\cdots,n$，则$\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k\in\mathscr{X}$；

c. 若 $G_\lambda\in\mathscr{X}$，$\lambda\in I$，I 为指标集，则$\bigcup\limits_{\lambda\in I}G_\lambda\in\mathscr{X}$；则称 $\mathscr{X}$ 为 X 的拓扑，$(X,\mathscr{X})$叫拓扑空间。

1.1.2 测度空间

设 X 为基本集，Ω 是由 X 的子集构成的集类（σ-代数），如果在 Ω 上定义实值函数 $\mu(\cdot)$满足测度公理：

a. $\mu(\varnothing)=0$；

b. $\forall\ E\in\Omega,0\leqslant\mu(E)\leqslant\infty$；

c. 若 $E_k\in\Omega,k=1,2,\cdots;E_i\bigcap E_j=\varnothing(i\neq j)$，

则 $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$成立。

则称 $\mu(\cdot)$为 Ω 上定义的测度，$E\in\Omega$ 为 μ 可测集，(X,Ω,μ)称为测度空间。

对于抽象集，还常常需要对集合的元素进行某种代数运算，引进“代数结构”，使之成为“代数空间”，最基本的代数空间是定义了元素间的加法和数乘运算的线性空间。

1.1.3 线性空间

设 X 是一个非空集合，R 是实数域，如果在 X 中定义了元素的加法“+”和数与元素的乘法“·”，并且满足运算规律：

a. $\forall\ x,y\in X$，有 $x+y=y+x$；

b. $\forall\ x,y,z\in X$，有$(x+y)+z=x+(y+z)$；

c. 存在零元 θ，使 $x+\theta=x,\forall\ x\in X$；

d. 对$\forall\ x\in X$，存在负元$(-x)\in X$，使 $x+(-x)=\theta$；

e. $\forall\ x\in X,1\cdot x=x$；

f. $\forall\ \lambda,\mu\in R,x\in X,\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$；

g. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

h. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

则称 X 为 R 上的线性空间或向量空间。

拓扑结构、代数结构及测度结构是现代数学,特别是现代分析数学研究的基础。例如泛函分析研究的基础就是利用"范数"或"内积"定义拓扑的线性空间,即所谓的"线性赋范空间"和"内积空间",它们是一类具有距离概念的拓扑空间,即度量空间。

1.1.4 度量空间

设 X 是非空集合,对任意 $x,y\in X$,设 $d(x,y)$ 是实数且满足度量公理:

a. $d(x,y)\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$ 时,$d(x,y)=0$;

b. $d(x,y)=d(y,x)$;

c. $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$,$\forall\ z\in X$。

则称 d 为 X 上的距离或度量,(X,d) 称为度量空间。

例 1 在 R^n 中,对 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)$ 定义 $d_2(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$,则 d_2 是 R^n 的欧氏距离,(R^n,d_2) 是欧氏度量空间。当 $n=2$ 或 3,$d_2(x,y)$ 就是我们通常使用在欧氏空间中的两点之间距离公式。

例 2 设 $L^p[a,b]$ 表示函数 f 在 $[a,b]$ 上 p 次幂为 Lebesgue 可积函数的全体,即

$$L^p[a,b]=\{f:(L)\int_{[a,b]}|f(t)|^p dt<\infty\}$$

定义

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^p dt\right)^{1/p},(1\leqslant p<\infty),\forall\ f,g\in L^p$$

则 $(L^p[a,b],d_p)$ 为函数度量空间,简记为 $L^p[a,b]$。

1.1.5 线性赋范空间

设 X 为 R 上的线性空间,若有泛函 $N(x)=\|x\|:X\to R$ 满足:

a. $\forall\ x\in X$,$\|x\|\geqslant 0$,当且仅当 $x=\theta$ 时,$\|x\|=0$;

b. $\forall\ x\in X,\alpha\in R,\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$;

c. $\forall\ x,y\in X,\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数(norm),$(X,\|\cdot\|)$ 称为线性赋范空间,简称为赋范空间(normed Space)。

可见,抽象空间中向量的范数是 R^3 中向量长度的推广。

1.1.6 内积空间

设 X 是 C(复数域)上的线性空间,若泛函 $(\cdot,\cdot):X\times X\to C$ 满足:

a. $\forall\ x\in X,(x,x)\geqslant 0$,且 $(x,x)=0$,仅当 $x=\theta$;

b. $\forall\ x,y\in X,(x,y)=\overline{(y,x)}$(共轭对称);

c. $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\forall\ x,y,z\in X,\alpha,\beta\in C$。则称 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 中的内积,X 称为内积空间。

由内积空间可构造赋范空间。

赋范空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 序列当且仅当 $\lim\limits_{n,m\to 0}\|x_n-x_m\|=0$。

赋范空间 X 是完备的,假若 X 中每个 Cauchy 序列收敛到 X 中的一个极限。

完备的赋范空间叫 Banach 空间。

完备的内积空间叫 Hilbert 空间。

1.1.7 空间 L^p(p 为正数)的几种情况

a. $L^p(E)$ 表示 E 上关于 Lebesgue 测度 p 方可积函数空间。对 $\forall\ f\in L^p(E)$,定义范数:

$$\|f\|_p=\left(\int_E|f_{(t)}|^p dt\right)^{1/p}\quad,\quad(p\geqslant 1);$$

b. $L^p(E)$ 表示 E 上本性有界可测函数全体,即 $f(x)$ 和 E 上一个有界函数几乎处处相等。令 $\|f\|_\infty=\inf\limits_{\substack{\mu(E_0)=0\\E_0\subset E}}(\sup\limits_{E\to E_0}|f|)$,叫 f 的本性最大模;

c. L^p 表示满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,(p\geqslant 1)$ 的序列 $\{x_k\}$ 的全体,令