21世纪数学规划教材

数学基础课系列

2nd Edition

实变函数解题指南（第二版）

Exercises and Solutions of Real Variable Function

周民强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

博雅

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

2nd Edition

实变函数解题指南（第二版）

Exercises and Solutions of Real Variable Function

周民强 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数解题指南/周民强编著. —2 版. —北京：北京大学出版社，2018.4

（博雅·21 世纪数学规划教材·数学基础课系列）

ISBN 978-7-301-29415-4

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①实变函数—高等学校—题解 Ⅳ. ①O174.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 056687 号

书　　名	实变函数解题指南（第二版） SHIBIAN HANSHU JIETI ZHINAN
著作责任者	周民强　编著
责任编辑	尹照原　刘　勇
标准书号	ISBN 978-7-301-29415-4
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　新浪微博　@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
印 刷 者	北京宏伟双华印刷有限公司
经 销 者	新华书店
	890 毫米×1240 毫米　A5　11.25 印张　332 千字
	2007 年 8 月第 1 版
	2018 年 4 月第 2 版　2018 年 4 月第 1 次印刷
定　　价	32.00 元

内容简介

本书是实变函数课程的学习辅导用书，其内容是在作者编写的普通高等教育“九五”教育部重点教材《实变函数论》（第3版）的基础上添加新题目后整理而成. 全书共分六章，内容包括：集合与点集，Lebesgue 测度，可测函数，Lebesgue 积分，微分与不定积分，L^p 空间等.

周民强教授主讲实变函数课程数十年，深谙其中的脉络以及初学者的疑难与困惑. 多年的教学经验使作者认识到：要使学生学好实变函数课，除了要有一本好教材外，还应有恰当的解题指南类书籍给予配合，才能提高教学质量，达到好的教学效果. 对此，作者在两个方面对本书的选题与命题下了功夫：一是密切结合基本理论与方法；二是覆盖面广、放大题量，以拓广视野，开阔思路. 此外，从难易角度看，书中编有初、中、高三种程度的各类习题，读者应根据教与学的实际情况作出取舍.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系、概率统计系各专业学生学习实变函数的辅导书，对从事实变函数教学工作的教师，本书是一部极好的教学参考用书；本书也为立志要进一步学习调和分析的读者提供了一个坚实的台阶.

作 者 简 介

周民强　北京大学数学科学学院教授，1956年大学毕业，从事调和分析(实变方法)的研究工作，并担任数学分析、实变函数、泛函分析、调和分析等课程的教学工作四十余年，具有丰富的教学经验．出版教材和译著多部．出版的教材有《数学分析》《实变函数论》(普通高等教育"九五"教育部重点教材)《调和分析讲义》《数学分析习题演练》《微积分专题论丛》等．多次获得北京大学教学优秀奖和教学成果奖．曾任北京大学数学系函数论教研室主任、《数学学报》和《数学通报》编委、北京市自学考试命题委员等职．

第二版前言

本书自 2007 年第一版出版以来，受到了广大读者的欢迎和认可，作者深感欣慰，并在此表示感谢.

实变函数是学习近代分析数学的基础课程. 为了适应现今大部分学校的课时安排，并设法降低学生学习实变函数课程的难度，作者于 2016 年对《实变函数论》一书进行了改版. 在过去的一段时间，为了配套新的教材，作者针对这本习题指导进行了大量的调整和修改.

这一版的修改，主要目的是适当降低本书的难度、让更多不同层次的读者可以按本书来进行习题练习. 因此，这一版的修改主要集中在以下两方面：一、去掉了每一节的“基本内容”. 由于这些内容和教材中是完全重复的，作者认为没有必要在本书中重复叙述；二、对习题进行了调整. 很多读者曾表示习题难度过大，因此作者在这一版中删去了一些习题，并对现有习题根据难易程度调整了顺序，这样更方便读者根据自己的实际水平进行练习.

最后，作者由衷地希望本书能给更多的学习实变函数的读者带来帮助.

作　者

2018 年 3 月

写在前面

实变函数是各大专院校数学系(包括应用数学系、概率统计系等)的高年级基础课程,其核心内容是测度和积分理论,这是近代分析数学领域的必备知识.

实变函数论是数学分析的深化和扩展,是在更广的背景下来研讨微积分课题.例如,它把界定在区间上的经典(Riemann)积分开拓到可测集上,积分的对象也扩大到定义在可测集上的可测函数类.这样,集合论自然就是实变函数的精神支柱,而恰当地分解、合成一个集合成了解决问题的有效手段.因此,与数学分析相比,作为后继课的实变函数论在学习上呈现出一个飞跃,初学者在这里遇到了与前不同的困境,尤其是在做题方面.这是完全可以理解的.在一定意义上说也是正常的(虽然原因是多方面的).

拙著《实变函数论》(北京大学出版社,2001)在撰写过程中也曾尽力设法去降低学生学习实变函数课程的难度,例如在书中多举例证,分层次编习题等.但由于这一课程本身所具有的特殊性,多年来,仍有不少读者希望看到有题解加以参考.对此,在北京大学出版社的大力支持下,这本《实变函数解题指南》面世了.当然,这里要强调的是:读者阅读本书只是为了开阔思路,自己动手做练习才是学习数学的最基本途径.

编入本书的习题量很大,鉴于作者的水平有限,对于在选题过程中出现的疏忽和误解之处,欢迎读者批评指正.

作　者

2007 年 2 月

目　　录

第一章　集合与点集

§1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念与运算

例 1　解答下列问题：

(1) 给定集合 A,B,C，试给出由下述指定元素全体形成的集合的表示式.

(i) 至少属于三者之中的两个集合的元素.

(ii) 属于三者之中的两个而不属于三个集合的元素.

(iii) 属于三者之中的一个而不属另外两个集合的元素.

(2) 设 r,s,t 是三个互不相同的复数，且令

$$A=\{r,s,t\},\quad B=\{r^2,s^2,t^2\},\quad C=\{rs,st,rt\}.$$

若有 $A=B=C$，试求 r,s,t.

解　(1) (i) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合中的元素全体形成的集合.

(ii) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\triangle B\triangle C)$表示属于 A,B 与 C 中至少两个集合但不属于三个集合的元素全体形成的集合.

(iii) $(A\triangle B\triangle C)\setminus(A\cap B\cap C)$表示属于 A,B 与 C 中的一个集合但不属于另外两个集合的元素全体形成的集合.

(2) 因为集合相等就是其元素相同，所以将每个集合中的全部元素作数值和，所得到的三个数应该相等，若令其和为 K，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+rt=K.$$

从而得到

$$\begin{aligned}K^2&=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+rt)\\&=3K,\end{aligned}$$

即 $K=3$ 或 0. 又从数值的乘积看，同理有

$$rst = r^2 s^2 t^2,$$

故知 $rst=1$. 于是在 $K=3$ 时，可知 r,s,t 为方程

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

的根，亦即 $(x-1)^3=0$ 的根. 但此时有 $r=s=t=1$，不合题意. 这说明 $K=0$，此时 r,s,t 为方程

$$x^3 - 1 = 0$$

的根，即 $x=1$ 以及 $x=(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})/2$.

例 2 试证明下列命题：

(1) 设 A,B 是全集 X 中的子集.

(i) 等式 $B=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A)$ 成立当且仅当 $B^c=X$.

(ii) 若对任意的 $E\subset X$，有 $E\cap A=E\cup B$，则 $A=X,B=\varnothing$.

(2) 设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是集合 X 中某些非空子集合形成的集合族. 若 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对运算 $\triangle,\cap$ 是封闭的(即若 $A,B\in\boldsymbol{\Gamma}$，则 $A\triangle B\in\boldsymbol{\Gamma}$，$A\cap B\in\boldsymbol{\Gamma}$，也说 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是一个环)，则 $\boldsymbol{\Gamma}$ 对运算 $\cup,\setminus$ 也封闭.

(3) 设有集合 A,B,E,F.

(i) 若 $A\cup B=F\cup E$，且 $A\cap F=\varnothing$，$B\cap E=\varnothing$，则 $A=E$ 且 $B=F$.

(ii) 若 $A\cup B=F\cup E$，令 $A_1=A\cap E$，$A_2=A\cap F$，则 $A_1\cup A_2=A$.

(4) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

(5) 设 A,B 是两个集合. 若存在集合 E，使得 $A\cup E=B\cup E$ 以及 $A\cap E=B\cap E$，则 $A=B$.

证明 (1) (i) 注意等式

$$\begin{aligned} X^c &=(X\cap(A\cup A^c))^c=((X\cap A)\cup(X\cap A^c))^c \\ &=(X\cap A)^c\cap(X^c\cup A). \end{aligned}$$

(ii) 先取 $E=X$，则由题设知 $A=X$；又取 $E=A^c$，则由题设知 $\varnothing=A^c\cap A=A^c\cup B=\varnothing\cup B$，即 $B=\varnothing$.

(2) 注意等式

$$A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B),\quad A\setminus B=(A\triangle B)\cap A.$$

(3) (i) 由于 $A\cap F=\varnothing$，故从 $A\cup B=F\cup E$ 可知，$A\subset E$ 且 $E\subset A$，即 $A=E$. 同理可得 $B=F$.

(ii) 我们有

$$A_1 \cup A_2 = (A \cap E) \cup (A \cap F) = A \cap (E \cup F)$$
$$= A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A.$$

(4) 应用集合运算性质,我们得到

$$\begin{aligned}
&(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C) \\
&\quad = (A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c \\
&\quad = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c) \\
&\quad = A^c \cap (A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C) \cap B^c \\
&\qquad \cup (A \cup B \cup C) \cap C^c \\
&\quad = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup (A \cap B^c) \cup (C \cap B^c) \\
&\qquad \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) \\
&\quad = [(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] \cup [(A^c \cap C) \cup (A \cap C^c)] \\
&\qquad \cup [(C \cap B^c) \cup (B \cap C^c)] \\
&\quad = [(B\backslash A) \cup (A\backslash B)] \cup [(C\backslash A) \cup (A\backslash C)] \\
&\qquad \cup [(C\backslash B) \cup (B\backslash C)] \\
&\quad = (A\triangle B) \cup (A\triangle C) \cup (B\triangle C) = (A\triangle B) \cup (B\triangle C)
\end{aligned}$$

(见§2.2例2之(2)中的证明).

(5) 因为我们有等式

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c), \quad B = (B \cap E) \cup (B \cap E^c),$$

所以只需指出 $A \cap E^c = B \cap E^c$. 注意到公式

$$A \cup E = E \cup (A \cap E^c), \quad B \cup E = E \cup (B \cap E^c),$$
$$E \cap (A \cap E^c) = \varnothing = E \cap (B \cap E^c),$$

立即可得 $A \cap E^c = B \cap E^c$.

例 3 试证明下列命题:

(1) 设有集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$,其中 $a_i(1 \leqslant i \leqslant 10)$ 是一个两位数,则存在分解 $A = B \cup C$ 满足:$B \cap C = \varnothing$,使得 B 中所有元素的数值和与 C 中所有元素的数值和相等.

(2) 设 E 是由 n 个元素形成的集合. $E_1, E_2, \cdots, E_{n+1}$ 是 E 的非空子集,则存在 r, s 个不同指标:

$$i_1, i_2, \cdots, i_r; \quad j_1, j_2, \cdots, j_s,$$

使得 $E_{i_1} \cup \cdots \cup E_{i_r} = E_{j_1} \cup \cdots \cup E_{j_s}$.

(3) 设 E 是由某些有理数形成的集合，且满足

(i) 若 $a\in E,b\in E$，则 $a+b\in E,ab\in E$；

(ii) 对任一有理数 r，恰有下述关系之一成立：

$$r\in E,\quad -r\in E,\quad r=0,$$

则 E 是全体正有理数形成的数集.

证明 (1) 作 A 的一切子集，易知它们共有 $2^{10}=1024$ 个. 因为每个子集的全部元素之数值和必小于 $10\times100=1000$，所以必有两个子集其元素之数值和相同. 从而再将其中公共元素舍去后，分别记为 B，C，即得所证.

(2) 从 $E_1,E_2,\cdots,E_{n+1}$ 中任取若干个作其并集，易知可做出 $2^{n+1}-1$ 个并集. 注意到 E 中仅有 2^n-1 个非空子集，故这些并集不可能全不相同. 因此，从其中取两个相同的并集且舍去其中相同的 E_k.

(3) 若 $r\neq0$，则由(ii)可知 $r\in E$ 或 $-r\in E$. 因为 $r^2=(-r)^2$，所以 $r^2\in E$，特别有 $1\in E$. 从而根据(i)，每个正整数都属于 E.

若 m,n 是正整数，则根据上述推理又知，$1/n^2\in E$. 从而可知 $m/n=mn\times(1/n^2)\in E$. 证毕.

例 4 试证明下列命题：

(1) 设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$，则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

(2) 设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, $B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n\supset\cdots\supset\cdots$，则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n).$$

(3) 设 $E_n=\{(x,y):\sqrt{x^2+(y-n)^2}<n\}$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\{(x,y):x\in\mathbf{R},y>0\}.$$

(4) 设 $0<a<b$，则对任意的正整数 k，存在实数 λ，使得

$$\bigcup_{n=k}^{\infty}[na,nb]\supset[\lambda,\infty).$$

(5) 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots,A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，且对 A 的任一无限

子集 B,均存在某个 E_i,使得 $E_i \cap B$ 为无限集,则 A 必含于某个 E_{k_0} 中.

证明 (1) 若 x 属于左端,则存在 n_1, n_2,使得 $x \in A_{n_1} \cap B_{n_2}$. 不妨设 $n_1 \leqslant n_2$,则由 $A_{n_1} \subset A_{n_2}$ 可知,$x \in A_{n_2} \cap B_{n_2}$. 因此 x 属于右端. 若 x 属于右端,则存在 n_0,使得 $x \in A_{n_0} \cap B_{n_0}$. 由此知 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,$x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,即 x 属于左端.

(2) 略.

(3) 对任意点 (x,y)(其中 $x \in \mathbf{R}, y > 0$),只要 $n > (x^2+y^2)/2y$,就有 $x^2+(y-n)^2 < n^2$.

(4) 取正整数 N,使得 $N \geqslant k$ 且 $N \geqslant a/(b-a)$. 显然,若 $n \geqslant N$,则 $n(b-a) \geqslant a$,$nb \geqslant (n+1)a$. 由此可知

$$[na, nb] \cap [(n+1)a, (n+1)b] \neq \varnothing.$$

这说明 $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} [na, nb] \supset [Na, \infty)$.

(5) 反证法. 假定任一 E_k 均不包含 A,则有

$$a_k \in A \setminus E_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

易知 $B_0 = \{a_k\}$ 是无限集,这是因为若有 $B_0 = \{b_1, \cdots, b_n\}$,则由 $B_0 \subset A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可知,必有 $b_1 \in E_{k_1}, \cdots, b_n \in E_{k_n}$. 令 $k_0 = \max\{k_1, \cdots, k_n\}$,则得 $B_0 \subset E_{k_0}$. 但 $a_{k_0} \in A \setminus E_{k_0}$,这一矛盾说明 B_0 是无限集. 根据 $a_k \in A \setminus E_k (k \in \mathbf{N})$,有

$$a_{k+1} \in A \setminus E_{k+1} \subset A \setminus E_k, \cdots, a_{k+j} \in A \setminus E_k \quad (j \in \mathbf{N}).$$

从而每个 E_k 均与 B 之交为有限集,矛盾. 证毕.

例 5 求下列集合列 $\{E_n\}$ 的上、下限集:

(1) $E_{3n-2} = A, E_{3n-1} = B, E_{3n} = C (n = 1, 2, \cdots)$.

(2) $E_n = \{m/n: m \in \mathbf{Z}\} (n = 1, 2, \cdots)$.

(3) $E_n = (0, 1/n) (n \in \mathbf{N})$.

(4) $E_n = (1/n, 1+1/n) (n \in \mathbf{N})$.

(5) $E_1 = [0, 1/2], E_2 = [0, 1/2^2] \cup [2/2^2, 3/2^2]$,

$E_3 = [0, 1/2^3] \cup [2/2^3, 3/2^3] \cup [4/2^3, 5/2^3] \cup [6/2^3, 7/2^3]$,

$\cdots\cdots$

$E_n=[0,1/2^n]\cup[2/2^n,3/2^n]\cup\cdots\cup[(2^n-2)/2^n,$
$(2^n-1)/2^n]$.

…………………………

解 (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=A\cup B\cup C$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=A\cap B\cap C$.

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\mathbf{Q}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\mathbf{Z}$.

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\varnothing$. (4) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=(0,1]$.

(5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=[0,1)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\{m/2^k\}(k,m\geqslant 0)$.

例 6 试证明下列命题：

(1) 设 $f_n(x)(n\in\mathbf{N})$ 以及 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，且有 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty,x\in\mathbf{R})$，则

(i) $\{x\in\mathbf{R}: f(x)\leqslant t\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)<t+\dfrac{1}{k}\right\}(t\in\mathbf{R})$.

(ii) $\{x\in\mathbf{R}: f(x)<1\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)\leqslant 1-1/k\}$.

(2) 设 $a_n\to a(n\to\infty)$，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{1}{k},a_n+\dfrac{1}{k}\right)=\{a\}$.

(3) 设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，则使 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的一切点 x 所形成的集合 D 可表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left(x: |f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\right).$$

(4) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数列，令

$$E_{n,m}^k=\{x\in\mathbf{R}: |f_n(x)-f_m(x)|\leqslant 1/k\}\quad(k\in\mathbf{N}),$$

$\{f_n(x)\}$ 的收敛点集是 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}E_{n,m}^k$.

证明 应用上、下限集的思想.

(1) (i) 记 $E_{n,k}=\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)<t+1/k\}$. 若 x_0 属于左端，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)\leqslant t$，故对任意的 $k_0\in\mathbf{N}$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $f_n(x_0)<t+1/k_0$，即 $x_0\in E_{n,k_0}(n\geqslant n_0)$. 这说明 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限

集，故 x_0 属于右端；若 x_0 属于右端，则对任意给定的 $k_0 \in \mathbf{N}$，$x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$，即 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限集. 故存在 n_0，$x_0 \in E_{n,k_0}$ $(n \geqslant n_0)$. 即 $f_n(x_0) < t + 1/k_0$ $(n \geqslant n_0)$. 令 $n \to \infty$，可知 $f(x_0) \leqslant t + 1/k_0$. 再令 $k_0 \to \infty$，即得 $f(x_0) \leqslant t$，x_0 属于左端.

(ii) 记 $E_{n,k} = \{x \in \mathbf{R}: f_n(x) \leqslant 1 - 1/k\}$. 若 x_0 属于左端，即 $f(x_0) < 1$，易知存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，使得 $f(x_0) < 1 - 1/k_0$. 从而由题设知，存在 n_0，使得 $f_n(x_0) < 1 - 1/k_0$ $(n \geqslant n_0)$. 这说明 x_0 属于 $\{E_{n,k_0}\}$ 的下限集，即 $x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$. 由此又知 x_0 属于右端；若 x_0 属于右端，则存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，$x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$，即存在 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$x_0 \in E_{n,k_0}, \quad f_n(x_0) \leqslant 1 - 1/k_0.$$

令 $n \to \infty$，即得 $f(x_0) \leqslant 1 - 1/k_0 < 1$，$x_0$ 属于左端.

(2) 注意下述推理的充分必要性：

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow$ 对任意的 $k_0 \in \mathbf{N}$，存在 n_0，使得 $a \in (a_n - 1/k_0, a_n + 1/k_0)$ $(n \geqslant n_0)$，即

$$a \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} (a_n - 1/k_0, a_n + 1/k_0)$$

$$\Longleftrightarrow a \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} (a_n - 1/k, a_n + 1/k).$$

(3) 这个集合表示式初看起来有点“不知从何说起”，因而我们来谈谈它的构思，详细证明留给读者. 我们知道，若 $f_n(x)$ 在点 x_0 不收敛到 $f(x_0)$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任给自然数 k，必有 $n \geqslant k$，使得

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

也就是说，若令

$$E_n(\varepsilon_0) = \{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\},$$

则点 x_0 是属于 $\{E_n(\varepsilon_0)\}$ 中之无穷多个集合的，即是 x_0 含于 $\{E_n(\varepsilon_0)\}$ 的上限集内. 反之，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，$\{E_n(\varepsilon)\}$ 的上限集中的点都是不收敛点. 总之，这些上限集在对 ε 求并集后可构成全体不收敛点. 最后，上述的 ε 又可由一列 $\{\varepsilon_k\}$：$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots \to 0$ 来代替. 特别当

取 $\varepsilon_k=1/k$ 时，就得到 D 的表示式.

(4) 注意，收敛列就是 Cauchy 列.

例 7 试证明下列命题：

(1) 设$\{f_n(x)\}$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数列，则

(i) $\{x\in\mathbf{R}: \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)>\alpha\}=\bigcup\limits_{\beta>\alpha}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)\geqslant\beta\}$;

(ii) $\{x\in\mathbf{R}: \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)>0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)>1/k\}$.

(2) 设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,b]$上的函数列，$E\subset[a,b]$且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x),\quad x\in[a,b].$$

若令 $E_n=\left\{x\in[a,b]: f_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，则

$$\varliminf_{n\to\infty} E_n=[a,b]\setminus E.$$

证明 (1) (i) 记 $E_{n,\beta}=\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)\geqslant\beta\}$. 若 x_0 属于左端，即 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)>\alpha$，则存在 β: $\beta>\alpha$，以及 n_0，使得 $f_n(x_0)\geqslant\beta(n\geqslant n_0)$，即 $x_0\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}E_{n,\beta}$，$x_0$ 属于右端；若 x_0 属于右端，即存在 β: $\beta>\alpha$，使得 $x_0\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}E_{n,\beta}$. 这说明存在 n_0，$x_0\in E_{n,\beta}(n\geqslant n_0)$，即 $f_n(x_0)\geqslant\beta(n\geqslant n_0)$. 从而有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)\geqslant\beta>\alpha$，$x_0$ 属于左端.

(ii) 若 x_0 属于右端，则存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使得 x_0 属于$\{E_{n,k_0}\}$中的无穷多个($E_{n,k_0}=\{x\in\mathbf{R}: f_n(x)>1/k_0\}$)，即存在$\{n_j\}$，使得 $f_{n_j}(x_0)>1/k_0$，故 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)\geqslant 1/k_0>0$. 反向证略.

(2) 由题设知存在极限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\setminus E,\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

因此，我们有

$$\varlimsup_{n\to\infty} E_n=[a,b]\setminus E,\quad \varliminf_{n\to\infty} E_n=[a,b]\setminus E.$$

即得所证.