〔美〕R. A. SERWAY 著

普通物理学概念

及程序练习

上册

汤发宇 译

人民教育出版社

1980

«内 容 提 要»

这是一本大学生用的物理学习指导书。每章包括基本概念和原理、示范例题、程序练习和习题。其中程序练习是指导自学的一种新方法。

本书是著者为配合 Sears 等著《大学物理学》、Bueche 著《物理学导论》、Halliday & Resnick 合著《物理学基础》等美国物理教材而编写的，书中附有本书与 Sears 等书的章节对照索引，便于参考和自学。

〔美〕 R. A. Serway

Concept, Problems & Solutions in General Physics *Vol. I*

W. B. Saunders Co., 1975

普通物理学概念

及程序练习

上 册

〔美〕R. A. SERWAY 著

汤发宇 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 17.25 字数 380,000

1979年12月第1版 1980年12月第1次印刷

书号 13012·0402 定价 1.30 元

前　言

本书向理工科大学生提供普通物理学基础概念和基本原理的复习纲要，以及一系列例题和程序练习．众所周知，通过把基本概念应用于各种物理现象的体验，才能对物理学有透彻的理解．所以本书注重解题方法和技巧，掌握了这些，学生就有了对付更复杂的情况所需要的基础和自信．

每章分为几部分．第一部分是介绍基本概念和定义，连同一组示范例题．第二部分是一套程序练习，用来复习本章基本原理和自我测验解题技能．最后一部分是重要定义和重要方程的提要，以及一组习题；习题中大多数与本章理论部分密切相关．涉及微积分的习题和例题均标以剑号(†)；本书如果用于无微积分的物理课程，就可避开这些题目．习题一般按难度编排，从建立自信的习题到涉及几个思考过程的复杂习题．较复杂的习题均标以星号(*)，并常给出解题的提示．书末附有全部习题的答案，并有一组常用表和一个索引．

本书对于强调解题和概念的物理学入门课程，最为有用．程序练习的另一优点是可望为学生提供一些自学指导．对照索引使本书可用作其他教科书的补充，例如 Melissinos 和 Lobkowicz 合著«理工科物理学»(Physics for Scientists and Engineers), Halliday 和 Resnick 合著«物理学基础»(Fundamentals of Physics), Sears 和 Zemansky 合著«大学物理学»(University Physics), Bueche 著«物理学引论»(Introduction to Physics for Scientists and Engineers), Weidner and Sells 合著«初等经典物理学» (Elementary Classical Physics) 等．由于各种普通物理学教科书的内容次序基本类同，本书也可配合其他入门物理教科书使用．

作者欢迎使用本书者直接来信指出本书的错误．

R. A. Serway

致 学 生

使学生养成良好的学习习惯是不容易的．可是，我对新生的经验表明，学习物理学的主要困难来自“错误”的方法，即熟记教科书和讲义的资料．熟记课文的片段，包括定义、推导等，并不一定表示学生理解了这些内容．只有坚持有效的学习习惯，并多做习题，以及跟其他同学、导师讨论等等，才能理解基本概念和科学论证．所以我的第一个劝告是把教材内容(包括基本方程和定义）的记忆减少到最低限度．(我个人的方针是在考卷上开列基本方程和恒量，以鼓励学生用思考而不是用记忆来学习物理．)在你试图求解指定的习题之前，首先应理解基本概念和原理，这是非常重要的，事实上非如此不可．

第二，应尽可能多作一些章末的习题．要仔细阅读全部课文内容、例题和练习之后，才能做习题．要记住，很少有人读一遍之后就能领会科学著作的全部意义．讲课应当阐明某些难点，然而通常必须把笔记和课文读几遍．解题时要对同一习题找出不同的解法．例如，力学中的许多习题，可以用解运动方程或用更直接的能量方法去处理．在这方面，本书提供的各种例题和程序练习是有价值的．

解某些习题，特别是那些需要运用几个概念的习题，其方法应该仔细加以筹划．题目一定要读几遍，直到你确信已经明白所问的是什么为止．然后，仔细思考题目，要特别注意可利用的数据．最后，记下你觉得适用于解本题的一种或几种方法的基本轮廓，然后进行解题．小心不要误解题意．正确地理解题目之所问，这种能力是解题过程中必不可少的一部分．

最后，要用模型和实验来充实学习内容．要尽可能设法在家里或在实验室里进行简单的实验，以验证课堂上或课本中所讲的概念和模型．一个普通的“富有曲线的”玩具，用来演示行波是非常有意义的；一副旧偏振片太阳眼镜，和一些报废的透镜、放大镜，是各种光学实验的重要组成部分；弹子球之间的碰撞，在弹子房研究就很方便，在台子上铺一张纸，就可提供碰撞的永久记录．这种例子是不胜枚举的．物质的模型得不到时，可设法建立“精神”的模型，设计激起思维的实验，以便更好地理解概念或所探讨的现象．

讲几句有关使用本书的建议是必要的．注意，每章分为三个主要部分．第一部分是基本概念、定义和原理的讨论，并有一组例题．第二部分是一套程序练习，应当仔细阅读．其中一些练习起着复习本章概念和定义的作用；另外一些则循序渐进地求解新问题，有些问题涉及本章讨论的一个以上的概念．最后一部分是重要概念和方程的提要，接着是一组习题，其答案在本书末尾．学生只有读完并弄懂该章的前面各部分之后，才可试图解题．有些比较难的习题标以星号(*)，而那些需要用微积分的习题则标以剑号(†)．以“诚实”的态度使用程序练习，对学生是有益的．这里我指的是，当你读每页左栏的问题时，应当把右栏即练习的解答盖起来．显然，只有采取这种态度，这些练习才会发挥最大的效用．我建议用一张空白纸把右栏遮住（这张纸你可用来进行计算等等）．对于每一部分练习，先把你认为正确的解法写下来，然后把空白纸向下滑移一格，与右栏的解法加以核对．如果你的解法正确，就继续下一部分练习．如果你的解法不正确，就要重读适用于该练习的那部分课文，然后再做第二次．重复上述步骤，直到你确信书上的解法是正确的为止．如果仍然不一致，就请导师检查你的作业．

与其他教科书对照索引

（表中数字为章号）

ML-S		SZ-S		B-S		WS-S		HR-S	
1	1	1	1,2	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2,3	3	3	9	3	9	3,4	3	3	3
2,3	4	4	3	4	3,4	5,6,7	7	4	3,4
4	5	5	5,11	5	5	8	5	5	5
6	7	6	3,4	7	7	9,10	6	6,7	6
7	6	7	6	8	6	11,12	8	8,9	7
10	8	8	7	9	7	13	11	10,11	8
13	10	9	8	10	4,8	14	10	12	9
16	13	11	10	11,12	8	15	12	13	10
17	14	12,14	12	13	10	18,20	13	14	11
18	12	15,16,17	13	14	11	19,21	14	15	12
		18,19,20	14	15	14			18,19	13
				16	13			20,21	14
				17	14				

注：本索引只是粗略的导引。其符号用法如下：
ML 代表 Melissinos & Lobkowicz«理工科物理学»（卷1）
SZ 代表 Sears & Zemansky«大学物理学»
B 代表 Bueche «物理学导论»
WS 代表 Weidner & Sells«初等经典物理学»
HR 代表 Halliday & Resnick «物理学基础»
S 代表 Serway（本书）

目 录

第一章 单位与误差

§ 1.1 基本单位

物理学是基于测量并用一些法则或定律来说明这些测量的一门科学. 因而某些可观测的量,如速度、力、动量等等,必须加以定义. 这些量可用质量(M)、长度(L)和时间(T)这三个基本量来表示.

实际中采用三种单位制: (1) 工程单位;其质量、长度和时间的单位,分别为斯勒格(slug)、英尺和秒; (2) 国际单位制(SI),有时称为mks制,m. k. s. 分别代表米、千克和秒; (3) cgs单位,c. g. s. 分别代表厘米、克和秒. 在力学中,我们将交替使用这三种单位,但重点放在国际制单位. 在电磁学的论述中,只用国际制单位.

表 1-1 中列出上述三种单位制中,面积、体积、速度和加速度的单位.

表 1-1 面积、体积、速度和加速度的单位

单位制	面积	体积	速度	加速度
SI	m^2	m^3	$m\cdot s^{-1}$	$m\cdot s^{-2}$
cgs	cm^2	cm^3	$cm\cdot s^{-1}$	$cm\cdot s^{-2}$
工程	ft^2	ft^3	$ft\cdot s^{-1}$	$ft\ s^{-2}$

注:英文缩写 m、cm、ft 和 s,分别表示米、厘米、英尺和秒. 以后我们还会用缩写 kg 和 g 分别表示千克和克.

判断一个式子在量纲上是否正确,常常是有用的. 当式子的推导拿不准时,量纲分析特别有用. 学生应当把这种方法作为普遍的运算步骤来运用.

例题 1.1 试证表达式 $v^2=v_0^2+2ax$ 在量纲上是正确的. 式中 v 和 v_0 代表速度,a 代表加速度,x 代表位移.

v^2 和 v_0^2 的量纲均为 L^2/T^2, a 的量纲为 L/T^2, x 的量纲为 L, 因此 ax 的量纲为 $L/T^2\times L=L^2/T^2$,所以此式在量纲上是正确的.

例题 1.2 试判断表达式 $x=v_0t+\frac{1}{2}at^3$ 在量纲上是否正确. 式中 t 是时间间隔.

上式左边的量纲为 L,右边 v_0t 项的量纲为 $L/T\times T=L$,而$\frac{1}{2}at^3$ 项的量纲为 $(L/T^2)\times T^3=LT$. 所以此式在量纲上是不正确的. 如以$\frac{1}{2}at^2$ 代替最后一项,则可获得正确的式子.

例题 1.3 牛顿第二运动定律指出:物体的加速度 a 与作用在物体上的合力 F 成正比,而与物体的质量 m 成反比. 试由此定律确定 F 的量纲.

因为 $a=F/m$, F 的量纲与 ma 的量纲相同,所以 $[F]=[m][a]=ML/T^2$.

§ 1.2 单 位 换 算

在许多情况下，需要把一种单位制换算为另一种单位制． 换算的方 法 可用几个例子来说明．

例题 1.4 测得一立方体的各边为 3.00 ft．用工程制单位时，这立方体的体积为27.0ft³．用国际制单位时，这立方体的体积为：(因为 1 ft=0.3048 m)

$$V=27.0\ \mathrm{ft}^3\times(0.3048\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{ft}^{-1})^3=0.765\ \mathrm{m}^3$$

注意：立方体各边的测量值只有三位有效数字，所以体积只准确到三位有效数字．

例题 1.5 火车以 60 mi·h⁻¹① 的平均速率运行．试用国际制单 位表示火车的这个速率．注意，1 mi=1610 m，1 h=3600 s．所以

$$60\ \mathrm{mi}\cdot\mathrm{h}^{-1}=\frac{60\ \mathrm{mi}\times1610\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{mi}^{-1}}{1\ \mathrm{h}\times3600\ \mathrm{s}\cdot\mathrm{h}^{-1}}=27\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

§ 1.3 测量的准确度与误差

所有实际测量，像质量、长度和时间的测量，都有某种程度的不准确．因此，必须考虑测量中发生的误差，才能在实验与理论之间作出有意义的比较．测量中的误差可能是由几种因素引起的，诸如人的误差（例如受眼睛分辨能力的限制）和仪器不精确（例如用不灵敏的天平称轻物）之类．误差计算的数学细节是很复杂的，所以我们只讨论误差的估算．记住，任何一个计算量，如果牵涉一个以上的测量参量时，其有效数字的位数应与误差最大的那个已知量的有效数字的位数相同．关于估算两个量的和、差、积或商的误差，有几个法则：

A．如果X和Y两个量相加或相减， 而这两个量的测量值的误差分 别 为 $\pm\Delta X$ 和 $\pm\Delta Y$，则$(X\pm Y)$的误差合计为$\pm(\Delta X+\Delta Y)$．

$$(X\pm\Delta X)\pm(Y\pm\Delta Y)=X\pm Y\pm(\Delta X+\Delta Y)$$

B．如果X和Y 两个量相乘，而这两个量的测量值的误差分别为$\pm\Delta X$ 和 $\pm\Delta Y$，则 乘 积 XY 的误差可由下面的考虑来求得：

$$(X\pm\Delta X)(Y\pm\Delta Y)=XY\pm Y\Delta X\pm X\Delta Y\pm\Delta X\Delta Y$$

可是，如果误差 ΔX 和 ΔY 与X和Y 相比为很小时，则最后一项 $\Delta X\Delta Y$ 可略去．因此乘积 XY 的误差化为$\pm(Y\Delta X+X\Delta Y)$．除法的法则与乘法基本上相同，即商X/Y的误差等于积XY^{-1}的误差，于是其结果与 XY的误差相像．[XY^{-1} 的误差为$Y^{-1}\Delta X+X\Delta(Y)^{-1}$]．

例题 1.6 学生测得某矩形板的长为 (12.30±0.04)cm，宽为(4.26±0.03)cm．求板的面积及其误差．

$$\begin{aligned}\text{面积}&=\text{长}\times\text{宽}=(12.30\pm0.04)\mathrm{cm}\times(4.26\pm0.03)\ \mathrm{cm}\\&\approx[12.30\times4.26\pm4.26\times0.04\pm12.30\times0.03]\ \mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

① 英文缩写 *mi* 表示英里，h 表示小时．——译注

$$\approx[52.40\pm0.54]\text{cm}^2$$

例题 1.7 测得物体的质量为 $(2.40\pm0.01)\text{g}$，体积为 $(4.35\pm0.03)\text{cm}^3$. 求物体的密度(即单位体积的质量)，和密度的百分误差和绝对误差.

设 $\pm\Delta m$ 和 $\pm\Delta V$ 分别代表质量和体积的误差. 则得

$$\rho=\frac{m\pm\Delta m}{V\pm\Delta V}=\frac{m\left(1\pm\dfrac{\Delta m}{m}\right)}{V\left(1\pm\dfrac{\Delta V}{V}\right)}$$

$$\rho\approx\frac{m}{V}\left(1\pm\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1\mp\frac{\Delta V}{V}\right)\approx\frac{m}{V}\left(1\pm\frac{\Delta m}{m}\pm\frac{\Delta V}{V}\right)$$

$$\approx\frac{2.40}{4.35}\left[1\pm\frac{0.01}{2.40}\pm\frac{0.03}{4.35}\right]\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}\approx0.552(1\pm0.011)\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$$

所以密度 ρ 的百分误差为 1.1%，绝对误差为 $\pm0.552(0.011)=\pm0.006\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

§ 1.4 十的幂与标准词冠

学生应该熟悉关于 10 的幂的用法，这是书写很大或很小数字的简洁形式. 例如书写 10^4 代替 10000，这里指数代表零的数目，即 $10^4=10\times10\times10\times10=10000$. 同样，像 0.0001 这样一个很小的数字，可表示为 10^{-4}，这里涉及负指数，因为我们处理的数字小于 1. 关于 10 的幂的应用另举数例如下：

$1000=10^3$， $0.003=3\times10^{-3}$

$85000=8.5\times10^4$， $0.00085=8.5\times10^{-4}$

$3200000=3.2\times10^6$， $0.00002=2\times10^{-5}$

写成 10 的幂的数字相乘时，保持指数的符号不变直接相加即可得乘积的指数. 例如：

$$(3\times10^3)(5\times10^4)=15\times10^7=1.5\times10^8$$

$$(2\times10^5)(4\times10^{-2})=8\times10^3$$

$$(5.6\times10^4)(4.3\times10^8)=24\times10^{12}$$

写成 10 的幂的数字相除时，我们可改变分母指数的符号然后相加. 例如：

$$\frac{8\times10^5}{2\times10^2}=4\times10^5\times10^{-2}=4\times10^3$$

表 1-2 十的幂的部分词冠

10 的 幂	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^3	10^6	10^9	10^{12}
词 冠	皮可 (pico)	纳诺 (nano)	微 (micro)	毫 (milli)	厘 (centi)	千 (kilo)	兆 (mega)	吉咖 (giga)	太拉 (tera)
中文代号	皮	纳	微	毫	厘	千	兆	吉	太
国际代号	p	n	μ	m	c	k	M	G	T

$$\frac{12\times10^{-4}}{4\times10^{-9}}=3\times10^{-4}\times10^{9}=3\times10^{5}$$

最后，有许多通用的词冠可代替 10 的幂．例如，1 毫米等于 10^{-3} 米，以 1 mm 表示．同样，1 千克等于 10^3 克．所以我们用缩写 kg 代表千克，词冠 k 代表千．表 1-2 中列出部分词冠．其中有些将在课文中经常应用，尤其是 μ（微）、m（毫）和 k（千）．

§1.5 习　　题

1．测得桌面的面积为 2.2 m^2．试以 ft^2 表示此面积．

2．地球赤道半径为 3963 mi，地球自转的周期为 24 h．从上述数据求赤道上一点相对于地球中心的切线速率．用国际制单位表示你的答案．

3．已知真空中光速为 $3.00\times10^{8}\ m\cdot s^{-1}$．试用 $mi\cdot h^{-1}$ 表示之．

4．已知标准大气压为 14.70 $lb\cdot in^{-2}$． 试用国际制单位表示标准大气压． 利用下列数据：1 磅力等于 4.448 牛顿力（牛顿是国际制中力的单位，中文代号为牛，国际代号为 N），1 in $=2.54\times10^{-2}$m．

5．测得球体的半径为 (3.50 ± 0.02)cm．求此球的体积及其误差．

6．木工用 6 ft 的皮尺测量一大房间的长度，在相继三段测量中，测得的距离为 72.00 in、72.00 in 和 13.50 in，其中每次测量的误差估计为 ±0.13 in．试求这房间的总长度及其误差．

7．圆柱体绕自轴的转动惯量由 $\frac{1}{2}MR^2$ 给出，其中 M 为圆柱体的质量，R 为其半径．现测得圆柱体的质量为 (3.20 ± 0.01) kg，半径为 (0.350 ± 0.003)m． 求该圆柱体绕自轴的转动惯量及其误差．

8．用 10 的幂表示下列各数字：(*a*) 530000；(*b*) 0.00025；(*c*) 5 兆；(*d*) 13 吉咖；(*e*) 1492．

9．用 10 的幂写出下列各积与商：

(*a*) $(5.2\times10^{5})(4.0\times10^{8})$

(*b*) $(2.0\times10^{-7})(6.1\times10^{2})$

(*c*) $\dfrac{8.4\times10^{-4}}{2.0\times10^{9}}$

(*d*) $\dfrac{9.9\times10^{20}}{3.0\times10^{8}}$

第二章　矢　　量

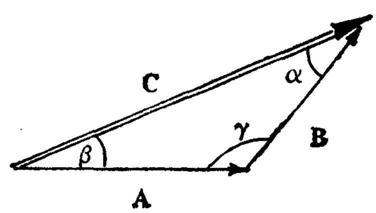
§ 2.1　引　　言

矢量是只有用大小和方向两者才能描述的量，例如速度、加速度、力和位移等．标量是用具有适当单位的数字来表示的量，例如质量、电量、体积等．矢量和标量不可混淆．

任意矢量 **A** 有下列性质：**A** 的大小通常用符号 $|\mathbf{A}|$ 表示，有时简单地用 A 表示．在图纸上用箭号表示矢量时，A 也表示箭号的长度．矢量 **A** 加上矢量 **B** 形成第三个矢量 **C** 时，其相加次序并不重要，即 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}=\mathbf{C}$，或者用数学术语说，矢量加法是可交换的．矢量也遵守加法结合律，即 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$．在所有这些运算中，各矢量都具有相同的单位．例如，不能把速度矢量加上位移矢量．如果我们要从矢量 **A** 减去矢量 **B**，即求 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$，其结果可用矢量 **A** 加矢量 $-\mathbf{B}$ 而求得．换句话说，$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-)\mathbf{B}$，矢量 $-\mathbf{B}$ 可理解为与 **B** 大小相等而方向相反的矢量．所以任一矢量乘以因子 -1，就相当于倒转该矢量方向的运算．如果矢量 **A** 乘以正数 m，新矢量 $m\mathbf{A}$ 的方向与 **A** 相同，但大小为 **A** 的 m 倍．由此可见，以负数乘 **A**，所得新矢量的方向与 **A** 相反．

§ 2.2　矢量的和与差

矢量相加或相减，有时使用图解法．矢量 **A** 和矢量 **B** 用图解法相加，最简单的法则是从矢量 **A** 的首端开始画矢量 **B**，使矢量 **B** 的尾端与矢量 **A** 的首端相连．合矢量 **C**，就是从矢量 **A** 的尾端画至矢量 **B** 的首端，如图 2-1 所示．



$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$

图 2-1　两个矢量相加的图解法

上述法则可推广到几个矢量相加．比方说，$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}$，其合矢量 **E** 就是最后完成多边形的这个矢量，如图 2-2 所示．

矢量 **A** 和矢量 **B** 相加时，合矢量 **C** 的大小也可由三角关系来计算

$$C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\gamma} \tag{2.1}$$

式中 γ 是矢量 **A** 和 **B** 之间的夹角，如图 2-1 所规定．图 2-1 中其余各个角同样可由三角关系求得

$$\frac{\sin\alpha}{A}=\frac{\sin\beta}{B}=\frac{\sin\gamma}{C} \tag{2.2}$$

用图 2-3 说明两个矢量相减的图解法．

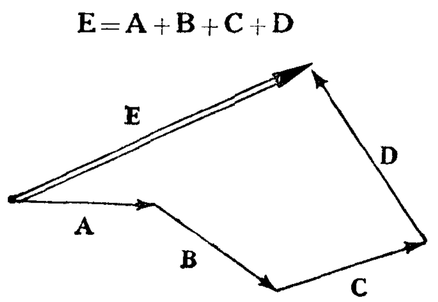


图 2-2　几个矢量相加的多边形法

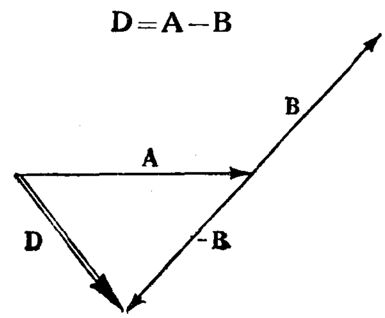


图 2-3　两个矢量相减的图解法

例题 2.1　矢量 **A** 长为 3 单位，指向沿 $+x$ 轴；矢量 **B** 长为 4 单位，与 $+x$ 轴成 30°角，如图 2-4 所示．求合矢量 **C** 的大小和方向．

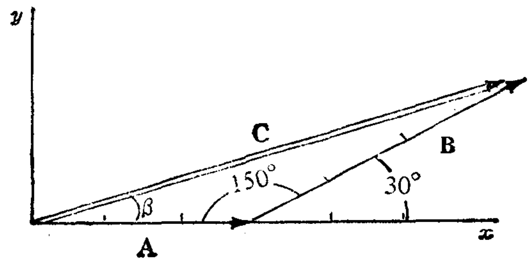


图 2-4

解　此题可用图 2-4 所示图解法求解．用标度纸和量角器画图．用分析解法，**C** 的大小可由下列关系式求得．

$$
\begin{aligned}
C &= \sqrt{A^2+B^2-2\,A\cdot B\cos\gamma}\\
&= \sqrt{9+16-2(3)(4)\cos(150)}\\
&= \sqrt{25+24(0\cdot866)} = 6.8
\end{aligned}
$$

而

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin(150)}{C}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{6.8}(0.5) = 0.294$$

$$\beta \approx 17°$$

§ 2.3　标积与矢积

A 和 **B** 两个矢量相乘的法则比加法法则更复杂一点．常用的矢量乘法有两种．一种叫点积 **A·B**，或叫标积，因其结果为标量．标积 **A·B** 由下式定义

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\cdot B\cos\theta \tag{2.3}$$

式中 θ 是 **A** 和 **B** 之间较小的夹角，如图 2-5 所示．注意，$B\cos\theta$ 是 **B** 在 **A** 上的投影，所以点积 **A·B** 等于 **A** 的大小乘以 **B** 在 **A** 上的投影．根据上述定义得出标积的一个特性，即 **A·B**＝**B·A**．此外，当 **A** 垂直于 **B** $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ 时，或者更明显的情况，当 **A** 或 **B** 为零时，则 **A·B**＝0．同样，当 **A** 与 **B** 方向相同($\theta=0$)时，则 **A·B**＝$A\cdot B$，当 **A** 与 **B** 方向相反($\theta=\pi$)时，则 **A·B**＝$-A\cdot B$．最后，对于和的标积是遵

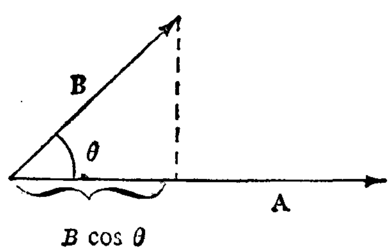


图 2-5　**B** 在 **A** 上的投影

守分配律的：即$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

A 和 B 两个矢量相乘的第二种方法叫矢积，或叫叉积．用符号$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$表示．矢积的结果是矢量，$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，这里 C 的大小由下式定义

$$C=A\cdot B\sin\theta$$

θ是 A 与 B 之间的夹角，如图 2-6 所示．$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的方向垂直于 A 和 B 所组成的平面，其指向由右手螺旋前进方向确定．右手螺旋定则对确定$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的方向是有用的．右手四指沿 A 的指向，然后转向 B，则右手姆指指向$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的方向，如图所示．根据上述定义得出矢积的一个特性，即$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$. 此外，当 A 平行于 B（$\theta=0$ 或 π）时，则$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$. 当 A 垂直于 B 时，则$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=A\cdot B$. 矢积对和也遵守分配律：即 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$.

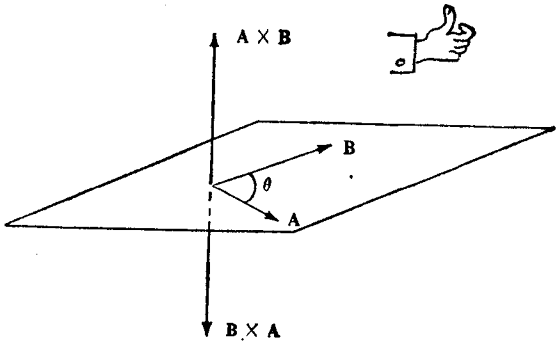


图 2-6　叉积$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的图示．注意，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

§ 2.4　矢量的分量与单位矢量

设矢量 A 位于 xy 平面内，如图 2-7(a)所示．矢量 A 可写作两个矢量分量 $\mathbf{A}_x$ 与 $\mathbf{A}_y$ 之和．把这两个矢量分量分别写作 $A_x\mathbf{i}$ 和 $A_y\mathbf{j}$ 是有益的．这里 A_x 和 A_y 是这两个矢量分量的大小，矢量 i 和 j 是沿 x 和 y 方向的单位矢量．这两个单位矢量定义为

$$\mathbf{i}=\frac{\mathbf{A}_x}{A_x},\qquad \mathbf{j}=\frac{\mathbf{A}_y}{A_y}$$

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

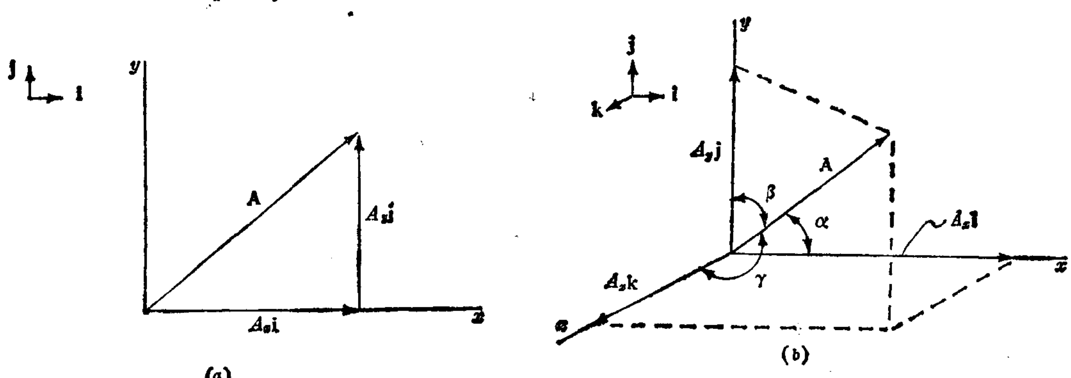


图 2-7　(a) 位于 xy 平面内的矢量 A 的 x 分量与 y 分量．
(b) 矢量 A 有 x、y 和 z 三个分量．

所以 A 可写作

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}$$

式中 **A** 的大小为

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$$

如果矢量 **A** 有三个分量，如图 2-7(b)所示．我们增加第三个单位矢量 **k** 来描写 z 方向的单位矢量．

单位矢量 **i**、**j**、**k** 有某些有用的特性．因为它们是相互垂直的，从标积的定义得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

从矢积的定义得

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0\\ &\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}\\ &\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{i}\\ &\mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\mathbf{j}\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

此外，$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$，即这三个矢量都具有单位长度．

例题 2.2 已知二矢量为 $\mathbf{A}=3\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}=\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$．用分析法求：($a$) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$，(b) $\mathbf{A}-\mathbf{B}$，(c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$，($d$) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$，($e$) **A** 与 **B** 之间的夹角 θ．

解 (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(3\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+\mathbf{k})+(\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k})=4\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{A}-\mathbf{B}=(3\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+\mathbf{k})-(\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k})=2\,\mathbf{i}-5\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{k}$

(c)
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k})\\&=3\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+3\,\mathbf{i}\cdot3\,\mathbf{j}-3\mathbf{i}\cdot2\mathbf{k}-2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}-2\mathbf{j}\cdot3\mathbf{j}+2\,\mathbf{j}\cdot2\,\mathbf{k}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+\mathbf{k}\cdot3\,\mathbf{j}-\mathbf{k}\cdot2\,\mathbf{k}\\&=3-6-2=-5\end{aligned}$$

这里我们利用了方程(2.5)．

(d)
$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(3\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}-2\,\mathbf{k})\\&=3\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+3\mathbf{i}\times3\,\mathbf{j}-3\,\mathbf{i}\times2\mathbf{k}-2\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}\times3\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{j}\times2\mathbf{k}+\mathbf{k}\times\mathbf{i}+\mathbf{k}\times3\,\mathbf{j}-\mathbf{k}\times2\,\mathbf{k}\\&=9\mathbf{k}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}+4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{i}\\&=\mathbf{i}+7\,\mathbf{j}+11\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

这里我们利用了方程(2.6)．

(e) 根据标积的定义，方程(2.3)和(c)的结果，得

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A\cdot B\cos\theta=-5$$

但是

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$$
$$B=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

所以

$$\cos\theta=\frac{-5}{AB}=-\frac{5}{14}=-0.357$$
$$\theta\approx111^\circ$$

例题 2.3 已知三矢量为 $\mathbf{A}=\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}$，$\mathbf{B}=-2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{C}=2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\,\mathbf{k}$．($a$) 证明 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$；($b$)求三重积 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$．

解 (*a*) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(\mathbf{i}-3\,\mathbf{j})\times(-2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times2\,\mathbf{i}+\mathbf{i}\times4\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{j}\times2\,\mathbf{i}-3\,\mathbf{j}\times4\,\mathbf{j}=4\,\mathbf{k}-6\,\mathbf{k}$

$=-2\,\mathbf{k}$

$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=(-2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})\times(\mathbf{i}-3\,\mathbf{j})=-2\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+2\,\mathbf{i}\times3\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}-4\,\mathbf{j}\times3\,\mathbf{j}=6\,\mathbf{k}-4\,\mathbf{k}=2\,\mathbf{k}$

$$\therefore\quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

(*b*) 在计算三重积 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ 中，我们必须先取矢积 $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$，然后以其结果点乘 $\mathbf{A}$。$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 是标量，而标量与矢量的叉乘是无意义的，所以 $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ 这种运算没有意义。

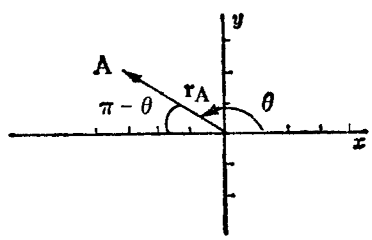
$$\begin{aligned}\mathbf{B}\times\mathbf{C}&=(-2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})\times(2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\,\mathbf{k})\\&=-4\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}-2\,\mathbf{i}\times\mathbf{j}+2\,\mathbf{i}\times3\,\mathbf{k}+4\,\mathbf{j}\times2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}\times\mathbf{j}-4\,\mathbf{j}\times3\,\mathbf{k}\\&=-2\,\mathbf{k}-6\,\mathbf{j}-8\,\mathbf{k}-12\,\mathbf{i}=-12\,\mathbf{i}-6\,\mathbf{j}-10\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})&=(\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot(-12\mathbf{i}-6\mathbf{j}-10\mathbf{k})\\&=-12\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}-\mathbf{i}\cdot6\,\mathbf{j}-\mathbf{i}\cdot10\,\mathbf{k}+3\,\mathbf{j}\cdot12\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}\cdot6\,\mathbf{j}+3\,\mathbf{j}\cdot10\,\mathbf{k}\\&=-12\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+18\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=6\end{aligned}$$

§2.5 程 序 练 习

1. A

xy 平面内一点 *A*，其坐标为(−3，2)m。试用单位矢量符号写出该点位矢 $\mathbf{r}_A$ 的表达式，并作图表示该位矢的方向。



$\mathbf{r}_A=(-3\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j})\text{m}$

---

1. B

$\mathbf{r}_A$ 的 *x* 分量和 *y* 分量各为多大？

$r_x=x=-3\ \text{m}$

$r_y=y=2\ \text{m}$

---

1. C

求 $\mathbf{r}_A$ 的大小。

$r_A=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}\ \text{m}$

---

1. D

求 $\mathbf{r}_A$ 与正 *x* 轴所成的夹角。

由 1. A 的图可知

$$\cos(\pi-\theta)=-3/\sqrt{13}=-0.832$$

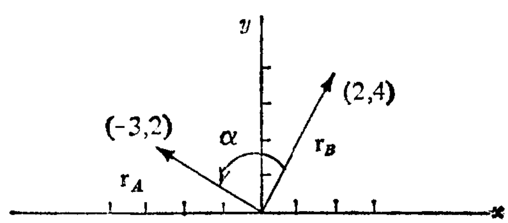
所以 $\pi-\theta\approx33^\circ$，或 $\theta\approx147^\circ$

---

1. E

xy 平面内第二点 *B*，其坐标为(2，4)m。试写出位矢 $\mathbf{r}_B$ 的表达式，并作图表示 $\mathbf{r}_A$ 和 $\mathbf{r}_B$。

$\mathbf{r}_B=(2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})\text{m}$



1. F

用点积的定义求 $\mathbf{r}_A$和 $\mathbf{r}_B$之间的夹角。

注：$r_B=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ m

$$\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B=r_A r_B\cos\alpha=\sqrt{13}\sqrt{20}\cos\alpha$$

$$\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B=(-3\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j})\cdot(2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})=-6+8=2$$

$$\sqrt{13}\sqrt{20}\cos\alpha=2$$

$$\cos\alpha=2/\sqrt{260}=0.124$$

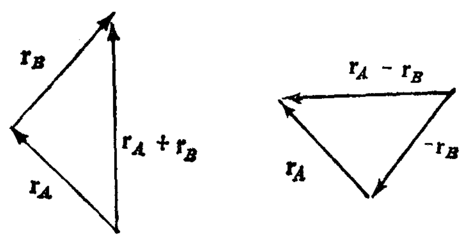
$$\alpha\approx83^\circ$$

1. G

求 $\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B$和 $\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B$，并作图表示。

$$\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B=(-3\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j})+(2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})=-\mathbf{i}+6\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B=(-3\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j})-(2\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j})=-5\,\mathbf{i}-2\,\mathbf{j}$$



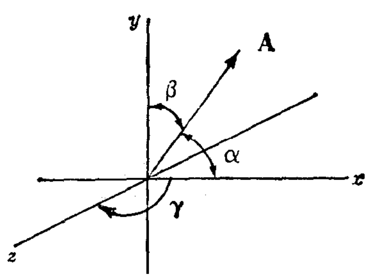
2. A

矢量 $\mathbf{A}=2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$。试求 $\mathbf{A}$ 的各个矢量分量。

$$\mathbf{A}_x=2\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{A}_y=3\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}_z=\mathbf{k}$$



2. B

$\mathbf{A}$ 的大小为何？这个数值表示什么？

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{2^2+3^2+1}=\sqrt{14}$$

这个数值表示 $\mathbf{A}$ 的“长度”，且与 $\mathbf{A}$ 具有相同的单位。

2. C

求标积 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}$ 的结果。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=2$$

2. D

利用标积的定义以及 2.B 和 2.C 的结果，求 $\mathbf{A}$ 与正 x 轴的夹角。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=A|\mathbf{i}|\cos\alpha=A\cos\alpha=2$$

$$\cos\alpha=2/\sqrt{14}=0.535$$

$$\alpha\approx58^\circ$$