

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

电动力学 (第三版)

郭硕鸿 著

黄迺本 李志兵 林琼桂 修订



高等教育出版社
Higher Education Press



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

电动力学 (第三版)

郭硕鸿 著

黄迺本 李志兵 林琼桂 修订



高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书是作者在所编《电动力学》(1997 年第二版)的基础上,根据学科的发展和教学实践的需要修订而成的。这次修订,在保持原书整体结构精炼、严谨,叙述简明、流畅,便于教学的特色下,改写了部分内容,新增了部分内容,力求做到既重视基本理论,又扩展学生视野,引导学生关注学科前沿的发展动态,训练学生提出问题和解决问题的能力,激励学生的创新精神。

全书共分 7 章,内容包括:电磁现象的普遍规律、静电场、静磁场、电磁波的传播、电磁波的辐射、狭义相对论、带电粒子和电磁场的相互作用。

本书可作为高等学校物理类各专业的教材,也可供其他有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/郭硕鸿著. —3 版. —北京: 高等教育出版社, 2008.6 (2011.5 重印)

ISBN 978 - 7 - 04 - 023924 - 9

I. 电… II 郭… III. 电动力学 - 高等学校 - 教材
IV. O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 059308 号

策划编辑	高 建	责任编辑	王文颖	封面设计	张 楠
责任绘图	尹 莉	版式设计	史新薇	责任校对	姜国萍
责任印制	刘思涵				

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京明月印务有限责任公司		http://www.landaco.com.cn
开 本	787×960 1/16	版 次	1979 年 2 月第 1 版
印 张	18.75		2008 年 6 月第 3 版
字 数	340 000	印 次	2011 年 5 月第 7 次印刷
购书热线	010 - 58581118	定 价	27.60 元
咨询电话	400 - 810 - 0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23924 - 00

第三版序

本书自1979年第一版、1997年第二版出版以来,得到国内许多从事电动力学教学的教师和读者的使用和支持。近些年来,我们通过各种途径,包括历次全国高等学校电动力学研讨会,收到了不少兄弟院校的宝贵意见和建议。

在基础课程的教材建设与日常教学活动中,如何做到既重视基本理论的教学,又能扩展学生视野、引导学生关注科学前沿的发展动态、训练学生提出问题和解决问题的能力、激励学生的创新精神,是我们应当探索的大问题。本着这一原则,我们对第二版再次作出修订,在保持原书精炼、严谨的整体结构的基础上,除对个别地方作出修改与校订之外,主要的改动有:第三章改写了“超导体的电磁性质”一节,增加了伦敦理论中超导电流与矢势的局域关系、指出伦敦局域理论所给出的磁场在超导体内的穿透深度与实验结果的偏离,增加了皮帕德非局域修正,以及若干例题;第四章新增了“光子晶体”和“光学空间孤子”;第七章新增了“原子光陷阱”。这些新增内容都是近年的一部分研究热点,也是用经典电动力学可以作出一定程度解释的课题。上述新增内容,主要是为了扩展学生视野,采用本书的教师可以选择讲授,或指导学生课外阅读。此外,为了减少篇幅,我们删减了第六章第1节“相对论的实验基础”中有关相对论效应实验验证的部分简要陈述,因为在后面的第3节和第4节中分别提到了相关效应的重要实验验证。

对各兄弟院校的教师和读者提供的宝贵意见,中山大学余卫龙教授的有益建议,以及高等教育出版社的大力支持,我们谨一并致谢。

欢迎使用本书的教师和读者继续给予批评指正。

郭硕鸿

黄迺本 李志兵 林琼桂

2008年2月于中山大学

第二版序

本书第一版出版以来,收到不少高等院校师生提出的宝贵意见。在1993年全国第四届电动力学研讨会上,对本书的修订提出了许多积极的建议。这些意见和建议对修订工作有很大帮助。

考虑到教材现代化的要求,修订版吸收了近年电动力学领域中理论和应用的重要进展。在基本理论方面,主要是补充了势的基本意义和物理效应的论述,并更加强调了规范场的概念。势的物理效应是在量子领域中显示出来的。由于势在近代物理中愈来愈显示出其重要性,因此在电动力学课程中适当地涉及一些量子理论是必要的。在应用方面,主要是补充了在近代科学技术中有重要意义和较大影响的超导电动力学和等离子体电动力学。为了保持第一版精炼的特点和对各类型高等院校有较广的适应性,对增补的内容仍着重于尽可能清楚地阐述其基本理论,而不过多地涉及具体细节。新版保持原来教材的深度。

最大的改动是原书的第二章。新版中把它分为静电场和静磁场两章,充实了磁场方面的内容,补充了矢势的物理效应和超导电动力学等内容。在电磁波一章中补充了等离子体的内容。此外,新版改正了第一版中的一些错误,重写了阐述不够清楚的部分,补充了一些中等难度的习题,使各章都有一定分量的习题。还根据全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》(1988)对全书专业名词作了修订。

在编写第一版时,作者从胡宁著的《电动力学》和曹昌祺著的《电动力学》中得益不少。自那时以来,国内陆续出版了一些优秀的电动力学教材或参考书。在第二版中作者也参考和吸收了其中一些新内容和较好的论述。作者特别感谢北京师范大学电动力学教学组提供一些补充习题,这些习题中一部分已在本书第二版中选用。新增的习题由司徒树平协助整理。高等教育出版社为本书的出版给予了很大的帮助。作者谨一并致谢。

郭硕鸿

1995年1月于中山大学

第一版序

本教材以作者在中山大学物理系讲授电动力学所编的讲义为基础,根据1977年10月全国高等学校理科物理教材会议制订的教材编写大纲改编而成。

电动力学是物理类各专业的一门重要基础理论课。本教材在电磁学的基础上,系统阐述电动力学的基本理论,着重于电磁现象的基本规律、物理概念和方法的论述。教材中附有一定数量的例题和习题,使读者对电动力学在各方面的应用能有一定的了解。

本教材所要求的数学工具主要是矢量分析和数学物理方程,要求读者在掌握这些数学知识的基础上进行学习,因此在本教材中不再详细讨论数学问题。

今年6月在本教材审稿会议上,北京大学(主审)、南京大学、厦门大学、中国科学技术大学、北京师范大学、西北大学、复旦大学、上海师范大学、内蒙古大学、兰州大学、吉林大学、杭州大学、南开大学等十三个兄弟院校的同志们对初稿提出了许多宝贵的意见和建议。其中一些兄弟院校还把多年来收集的习题提供给我们选用。习题由周义昌同志整理收编并核对了答案。全志义、杨承德同志参加了部分插图绘制工作。作者谨一并致谢。

因作者水平有限,教材中错误之处在所难免,希望广大教师和读者批评指正。

郭硕鸿

1978年10月于中山大学

目 录

引言	(1)
第一章 电磁现象的普遍规律	(3)
§ 1 电荷和电场	(3)
1. 库仑定律 2. 高斯定理和电场的散度 3. 静电场的旋度	
§ 2 电流和磁场	(8)
1. 电荷守恒定律 2. 毕奥-萨伐尔定律 3. 磁场的环量和旋度	
4. 磁场的散度 5. 磁场旋度和散度公式的证明	
§ 3 麦克斯韦方程组	(14)
1. 电磁感应定律 2. 位移电流 3. 麦克斯韦方程组 4. 洛伦兹力公式	
§ 4 介质的电磁性质	(18)
1. 关于介质的概念 2. 介质的极化 3. 介质的磁化 4. 介质中的麦克斯韦方程组	
§ 5 电磁场边值关系	(24)
1. 法向分量的跃变 2. 切向分量的跃变	
§ 6 电磁场的能量和能流	(29)
1. 场和电荷系统的能量守恒定律的一般形式 2. 电磁场能量密度和能流密度表示式 3. 电磁能量的传输	
习题	(33)
第二章 静电场	(37)
§ 1 静电场的标势及其微分方程	(37)
1. 静电场的标势 2. 静电势的微分方程和边值关系 3. 静电场能量	
§ 2 唯一性定理	(43)
1. 静电问题的唯一性定理 2. 有导体存在时的唯一性定理	
§ 3 拉普拉斯方程 分离变量法	(47)
§ 4 镜像法	(53)
§ 5 格林函数	(57)
1. 点电荷密度的 δ 函数表示 2. 格林函数 3. 格林公式和边值问题的解	
§ 6 电多极矩	(63)
1. 电势的多极展开 2. 电多极矩 3. 电荷体系在外电场中的能量	
习题	(70)
第三章 静磁场	(74)
§ 1 矢势及其微分方程	(74)

1. 矢势 2. 矢势微分方程 3. 矢势边值关系 4. 静磁场的能量	
§ 2 磁标势	(81)
§ 3 磁多极矩	(86)
1. 矢势的多极展开 2. 磁偶极矩的场和磁标势 3. 小区域内电流分布在外磁场中的能量	
§ 4 阿哈罗诺夫-玻姆效应	(90)
§ 5 超导体的电磁性质	(92)
1. 概述 2. 超导体的基本现象 3. 伦敦唯象理论与皮帕德修正 4. 有第二类超导体存在时磁场分布的求解 5. 磁介质观点 6. 磁通量子化	
习题	(106)

第四章 电磁波的传播

§ 1 平面电磁波	(110)
1. 电磁场波动方程 2. 时谐电磁波 3. 平面电磁波 4. 电磁波的能量和能流	
§ 2 电磁波在介质界面上的反射和折射	(117)
1. 反射和折射定律 2. 振幅关系 菲涅耳公式 3. 全反射	
§ 3 有导体存在时电磁波的传播	(121)
1. 导体内的自由电荷分布 2. 导体内的电磁波 3. 趋肤效应和穿透深度	
4. 导体表面上的反射	
§ 4 谐振腔	(128)
1. 有界空间中的电磁波 2. 理想导体边界条件 3. 谐振腔	
§ 5 波导	(131)
1. 高频电磁能量的传输 2. 矩形波导中的电磁波 3. 截止频率	
4. TE_{10} 波的电磁场和管壁电流	
* § 6 光子晶体	(135)
1. 一维光子晶体的转移矩阵 2. 光子带隙 3. 一维光子晶体的全反射	
* § 7 高斯光束	(140)
1. 亥姆霍兹方程的波束解 2. 高斯光束的传播特性	
* § 8 光学空间孤子	(144)
1. 孤子和光学空间孤子 2. 非线性波动方程 3. 孤子解	
* § 9 等离子体	(146)
1. 等离子体的准电中性和屏蔽库仑场 2. 等离子体振荡 3. 电磁波在等离子体中的传播	
习题	(150)

第五章 电磁波的辐射

§ 1 电磁场的矢势和标势	(153)
1. 用势描述电磁场 2. 规范变换和规范不变性 3. 达朗贝尔方程	
§ 2 推迟势	(158)

§ 3 电偶极辐射	(161)
1. 计算辐射场的一般公式 2. 矢势的展开式 3. 电偶极辐射 4. 辐射能流角分布 辐射功率 5. 短天线的辐射 辐射电阻	
§ 4 磁偶极辐射和电四极辐射	(167)
1. 高频电流分布的磁偶极矩和电四极矩 2. 磁偶极辐射 3. 电四极辐射	
§ 5 天线辐射	(171)
1. 天线上的电流分布 2. 半波天线 * 3. 天线阵	
§ 6 电磁波的衍射	(176)
1. 衍射问题 2. 基尔霍夫公式 3. 小孔衍射	
§ 7 电磁场的动量	(180)
1. 电磁场的动量密度和动量流密度 2. 辐射压力	
习题	(185)
第六章 狭义相对论	(188)
§ 1 相对论的实验基础	(189)
1. 相对论产生的历史背景 2. 相对论的实验基础	
§ 2 相对论的基本原理 洛伦兹变换	(192)
1. 相对论的基本原理 2. 间隔不变性 3. 洛伦兹变换	
§ 3 相对论的时空理论	(199)
1. 相对论时空结构 2. 因果律和相互作用的最大传播速度 3. 同时相对性 4. 运动时钟的延缓 5. 运动尺度的缩短 6. 速度变换公式	
§ 4 相对论理论的四维形式	(209)
1. 三维空间的正交变换 2. 物理量按空间变换性质的分类 3. 洛伦兹变换的四维形式 4. 四维协变量 5. 物理规律的协变性	
§ 5 电动力学的相对论不变性	(217)
1. 四维电流密度矢量 2. 四维势矢量 3. 电磁场张量 4. 电磁场的不变量	
§ 6 相对论力学	(223)
1. 能量-动量四维矢量 2. 质能关系 3. 相对论力学方程 4. 洛伦兹力	
* § 7 电磁场中带电子的拉格朗日量和哈密顿量	(231)
1. 拉格朗日形式 2. 哈密顿形式 3. 非相对论情形	
习题	(235)
第七章 带电粒子和电磁场的相互作用	(240)
§ 1 运动带电粒子的势和辐射电磁场	(240)
1. 任意运动带电粒子的势 2. 偶极辐射 * 3. 任意运动带电粒子的电磁场	
* § 2 高速运动带电粒子的辐射	(244)
1. 高速运动带电粒子的辐射功率和角分布 2. $\dot{\mathbf{v}} // \mathbf{v}$ 情形 3. $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ 情形	
* § 3 辐射的频谱分析	(248)

1. 频谱分析的一般公式 2. 低速运动带电粒子在碰撞过程中的辐射频谱	
3. 高速圆周运动带电粒子的辐射频谱	
§ 4 切连科夫辐射	(254)
§ 5 带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用	(258)
1. 电磁质量 2. 辐射阻尼 3. 谱线的自然宽度	
§ 6 电磁波的散射和吸收 介质的色散	(264)
1. 自由电子对电磁波的散射 2. 束缚电子的散射 3. 电磁波的吸收	
4. 介质的色散 * 5. 原子光陷阱 6. 经典电动力学的局限性	
习题	(272)
附录 I 矢量分析	(275)
1. 矢量代数 2. 散度、旋度和梯度 3. 关于散度和旋度的一些定理	
4. ∇ 算符运算公式 5. 曲线正交坐标系 6. 并矢和张量	
附录 II 轴对称情形下拉普拉斯方程的通解	(282)
附录 III 国际单位制和高斯单位制中主要公式对照表	(284)

引 言

电动力学的研究对象是电磁场的基本属性,它的运动规律以及它和带电物质之间的相互作用.本书在电磁学的基础上系统阐述电磁场的基本理论.

电磁场是物质世界的重要组成部分之一.在生产实践和科学技术领域内,存在着大量和电磁场有关的问题.例如电力系统、凝聚态物理、光波导与光子晶体、等离子体、天体物理、粒子加速器等,都涉及不少宏观电磁场的理论问题.在迅变情况下,电磁场以电磁波的形式存在,其应用更为广泛.无线电波、热辐射、光波、X射线和 γ 射线等都是不同波长范围内的电磁波,它们都有共同的规律.因此,掌握电磁场的基本理论对于生产实践和科学实验都有重大的意义.

电动力学是在人类对电磁现象的长期观察和生产活动的基础上发展起来的.18世纪中叶以后,在工业生产发展的推动下,开展了自然科学的实验探索,电磁学得到了较快的发展.人们研究了静电、静磁和电流等现象,总结出一些实验定律.但是,电磁学的重大进展还是在人们认识到电现象和磁现象之间的深刻内在联系以后才开始的.1820年,奥斯特(Oersted)发现电流的磁效应;1831年,法拉第(Faraday)发现电磁感应定律,并提出场的概念.至此,电现象和磁现象都不是孤立的,而是作为统一的整体开始被人们认识,因此从理论上总结电磁场普遍规律的条件已经具备.在此基础上,1864年麦克斯韦(Maxwell)把电磁规律总结为麦克斯韦方程组,并从理论上预言电磁波的存在.这一基本规律的掌握促进了电磁波的发现,而现代无线电技术的广泛应用又进一步丰富了电磁场理论,使我们现在对于电磁场的认识有了坚实的基础.20世纪以来,由于现代生产对认识物质微观结构的迫切要求,人们又进一步研究电磁场的微观性质,发展了量子电动力学.现在看来,电磁场已成为人们了解得比较深刻的物质存在形态,这正是和它在生产实践中的广泛应用分不开的.现代生产实践还对各种物质材料的电磁性能提出新的要求,像铁氧体、铁电体、超导体、等离子体、光学材料、非线性介质等特殊物质的应用不断发展,这对电动力学不断提出新课题.激光技术的进展又使人们对电磁场的微观结构与宏观场之间的关系有了更深刻的理解.新的实践将继续推进电动力学理论的发展,人们对电磁场的认识是不可穷尽的.

在电动力学的发展过程中,人们发现经典力学的时空观和电磁现象的新的实验事实发生矛盾.矛盾的解决导致新时空观的建立.狭义相对论就是在20世纪初(1905年)由爱因斯坦(Einstein)建立起来的关于新时空观的理论.电动力学只有在新时空观的基础上才发展成为完整的、适用于任何惯性参考系的理论.

相对论是现代物理学的重要基础理论之一,它对物理学的发展有着深远的影响.系统地阐述狭义相对论的基本理论是本课程的重要内容之一.

学习电动力学课程的主要目的是:(1)掌握电磁场的基本规律,加深对电磁场性质和时空概念的理解;(2)获得本课程领域内分析和处理一些基本问题的初步能力,为以后解决实际问题打下基础;(3)通过电磁场运动规律和狭义相对论的学习,更深刻领会电磁场的物质性,帮助我们加深辩证唯物主义的世界观.

本课程主要阐述宏观电磁场理论.在第一章中我们分析各个实验定律,从其中总结出电磁场的普遍规律,建立麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式.第二章和第三章讨论恒定电磁场问题,着重说明恒定场的基本性质和求解电场和磁场问题的一些基本方法.第四章讨论电磁波的传播,包括无界空间中电磁波的性质、界面上的反射折射以及有界空间中的电磁波问题.第五章讨论电磁波的辐射,介绍一般情况下势的概念和辐射电磁场的计算方法.第六章从电动力学的参考系问题引入相对论时空观,由物理规律对惯性参考系协变的要求把电动力学基本方程表为四维形式,导出电磁场量在不同参考系间的变换,并说明相对论力学的基本概念.最后一章讨论带电粒子和电磁场的相互作用,并由此看出把宏观电动力学应用到微观领域的局限性.

为了便于自学和参考,本书包括的内容略多于一学期课程所要求的内容.书中带有星号的章节是选学部分,初学者可以略去,不影响其他章节的学习.

本书采用国际单位制(SI),书末附有国际单位制和高斯单位制下主要公式对照表,以便读者查对.

第一章 电磁现象的普遍规律

在本章中,我们把电磁现象的实验定律总结提高为电磁场的普遍规律.

电磁场是物质存在的一种形态,它有特定的运动规律和物质属性,它和其他带电物质以一定形式发生相互作用.每一种物质的存在形态都有它的特殊本质和特殊规律,因此,和一般实物对比,场的存在形态也有它的特点.实物通常是定域在空间的确定区域内,而电磁场则弥漫于空间中.例如,在高压线附近存在着强大的电场;在我们周围的空间中传播着各种形式的电磁波.由此可见,场是作为空间中某种分布而存在,而且一般来说这种分布是随时间而变化的.按照电磁场的特点,我们用两个矢量函数——电场强度 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ 来描述电磁场在时刻 t 的状态.在经典物理中,这两个矢量函数可以完全描述电磁场.电磁场的规律用数学形式表示出来就是这两个矢量场所满足的偏微分方程组.

我们先分析静电场和静磁场的实验定律,再研究变动情况下新的实验定律,由此总结出麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式.这些方程是宏观电磁场论的理论基础.在以后各章中将应用它们来解决各种与电磁场有关的问题.

§ 1 电荷和电场

1. 库仑定律

库仑(Coulomb)定律是静电现象的基本实验定律,它表述如下:真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (1.1)$$

式中 $\mathbf{r}$ 为由 Q 到 Q' 的径矢, ϵ_0 是真空电容率(真空介电常量).

库仑定律只是从现象上给出两电荷之间作用力的大小和方向,它并没有解决这作用力的物理本质问题.对库仑定律(1.1)式可以有不同的物理解释.一种观点认为两电荷之间的作用力是直接的超距作用,即一个电荷把作用力直接施加于另一电荷上;另一种观点是相互作用通过场来传递的观点,这种观点认为两电荷之间的相互作用是通过电场来传递的,而不是直接的超距作用.若只局限于静电的情况,这两种描述是等价的,它们都给出相同的计算结果,但是我们不能单纯由静电现象判断哪一种描述是正确的.在运动电荷的情况下,特别是在电荷

发生迅变的情况下,两种观点就显示出不同的物理内容.实践证明通过场来传递相互作用的观点是正确的.场概念的引入在电动力学发展史上起着重要的作用,在现代物理学中关于场的物质形态的研究也占有重要地位.通过本课程的学习,我们将会不断加深对场的认识,并逐步认识电磁场的物质性,这是本课程的主要任务之一.

既然我们要把库仑定律提高为描述电磁现象的一条普遍规律,因此需要从场的观点出发来讨论这定律的含义.我们假设,一个电荷周围的空间存在着一种特殊的物质,称为电场.另一电荷处于该电场中,就受到电场的作用力.对电荷有作用力是电场的特征性质,我们就利用这性质来描述该点上的电场.由库仑定律可知,处于电场内的电荷 Q' 所受的力与 Q' 成正比.因此,我们用一个单位试验电荷在场中所受的力来定义电荷所在点 x 上的电场强度 $E(x)$. 电荷 Q' 在电场 E 中所受的力 F 为

$$F = Q'E \quad (1.2)$$

由库仑定律(1.1)式,一个静止点电荷 Q 所激发的电场强度为

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

由实验知道,电场具有叠加性,即多个电荷所激发的电场等于每个电荷所激发的电场的矢量和.设第 i 个电荷 Q_i 到 P 点的矢径为 r_i ,则 P 点上的总电场强度 E 为

$$E = \sum_i \frac{Q_i r_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \quad (1.4)$$

在许多实际情况下可以把电荷看作连续分布于某一区域内.例如在真空管的阴极和板极之间就充满了由自由电子构成的电荷分布.如图 1-1,设电荷连续分布于区域 V 内.在 V 内某点 x' 上取一个体积元 dV' ,在 dV' 内所含的电荷 dQ 等于该点上的电荷密度 $\rho(x')$ 乘以体积 dV' :

$$dQ = \rho(x')dV'$$

设由源点 x' 到场点 x 的矢径为 r ,则 P 点上的电场强度 E 为

$$E(x) = \int_V \frac{\rho(x')r}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' \quad (1.5)$$

式中积分遍及电荷分布区域.

(1.5)式是静电场的电场强度分布的积分形式.为了反映出相互作用在场中传递的特点,我们还必须再深入一步,研究一个电荷

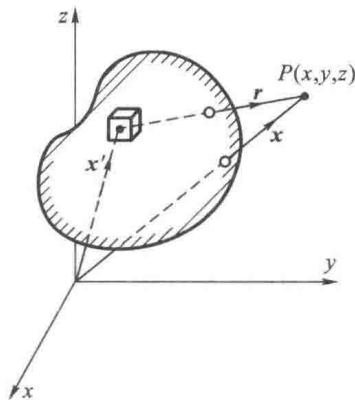


图 1-1

和它邻近的电场是怎样相互作用的,一点上的电场和它邻近的电场又是怎样联系的,即要找出静电场规律的微分形式.下面我们通过库仑定律来分析这些规律性.

2. 高斯定理和电场的散度

首先我们研究一个电荷与它邻近的电场的关系.在电磁学中我们知道,一个电荷 Q 发出的电场强度通量总是正比于 Q ,与附近有没有其他电荷存在无关.因此,一个电荷激发的电场强度通量表示着电荷对电场作用的基本数量关系.设 S 表示包围着电荷 Q 的一个闭合曲面, dS 为 S 上的定向面元,以外法线方向为正向.通过闭合曲面 S 的电场强度 E 的通量定义为面积分

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

由库仑定律可以推出关于电场强度通量的高斯(Gauss)定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

式中 Q 为闭合曲面内的总电荷.高斯定理证明如下:如图 1-2,设曲面内有一电荷 Q ,其电场强度通过面元 dS 的通量为

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cos \theta dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS$$

式中 θ 为 dS 与 r 的夹角, $dS \cos \theta$ 为面元投影到以 r 为半径的球面上的面积. $\cos \theta dS/r^2$ 为面元 dS 对电荷 Q 所张开的立体角元 $d\Omega$. 因此, E 对闭合曲面 S 的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

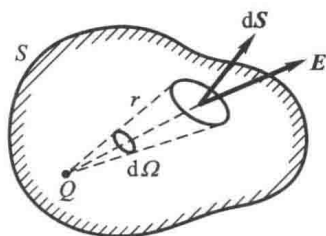


图 1-2

如果电荷在闭合曲面外,则它发出的电场线穿入该曲面后再穿出来,因而对该闭合曲面的电场强度通量没有贡献.在一般情况下,设空间中有多个电荷 Q_i ,则 E 通过任一闭合曲面 S 的总通量等于 S 内的总电荷除以 ϵ_0 ,而与 S 外的电荷无关:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (Q_i \text{ 在 } S \text{ 内}) \quad (1.6')$$

如果电荷连续分布于空间中,则 E 对闭合曲面 S 的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.7)$$

式中 V 为 S 所包围的体积.上式右边的积分是 V 内的总电荷,与 V 外的电荷分布无关.

(1.6)或(1.7)式是高斯定理的积分形式.为了求出电荷与电场的局域关系,即在空间无穷小区域内的关系,我们把(1.7)式中的体积 V 不断缩小,根据矢量

场散度的定义(附录 I.4 式), (1.7) 式左边趋于电场 $\mathbf{E}$ 的散度乘上体积元 dV , 而右边趋于 $\frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$, 由 dV 的任意性, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

这就是高斯定理的微分形式, 它是电场的一个基本微分方程. 上式指出, 电荷是电场的源, 电场线从正电荷发出而终止于负电荷. 在没有电荷分布的地点, $\rho(\mathbf{x})=0$, 因而在该点上 $\nabla \cdot \mathbf{E}=0$, 表示在该处既没有电场线发出, 也没有电场线终止, 但是可以有电场线连续通过该处.

(1.8) 式反映电荷对电场作用的局域性质: 空间某点邻域上场的散度只和该点上的电荷密度有关, 而和其他地点的电荷分布无关; 电荷只直接激发其邻近的场, 而远处的场则是通过场本身的内部作用传递出去的. 只有在静电情况下, 远处的场才能以库仑定律形式表示出来, 而在一般运动电荷情况下, 远处的场不能再用库仑定律(1.3)式表出, 但实验证明更基本的局域关系(1.8)式仍然成立.

3. 静电场的旋度

散度是矢量场性质的一个方面, 要确定一个矢量场, 还需要给出其旋度. 旋度所反映的是场的环流性质. 从直观图像来看, 静电场的电场线分布没有旋涡状结构, 因而可以推想静电场是无旋的. 下面我们用库仑定律来证明这一点.

先计算一个点电荷 Q 所激发的电场强度 $\mathbf{E}$ 对任一闭合回路 L 的环量:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

式中 $d\mathbf{l}$ 为 L 的线元(图 1-3). 由库仑定律得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{l}$$

设 $d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{r}$ 的夹角为 θ , 则 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r \cos \theta dl = r dr$, 因而上式化为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L d\left(\frac{1}{r}\right)$$

右边被积函数是一个全微分. 从 L 的任一点开始, 绕 L 一周之后回到原地点, 函数 $1/r$ 亦回到原来的值, 因而 $d\left(\frac{1}{r}\right)$ 的回路积分为零. 由此得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.9)$$

以上证明了一个点电荷的电场环量为零. 对于一般的静止电荷分布, 每一个电荷元所激发的电场环量为零, 由场的叠加性, 总电场 $\mathbf{E}$ 对任一回路的环量恒为零, 即(1.9)式对任意静电场和任一闭合回路都成立.

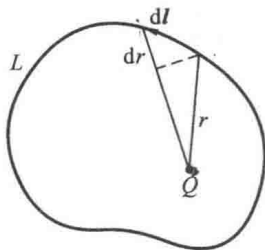


图 1-3

把(1.9)式化成微分形式就可以求出静电场的旋度. 为此把回路 L 不断缩小, 使它包围着一个面元 dS . 根据旋度的定义(附录 1.5 式), (1.9)式左边趋于 $\nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, 由 dS 的任意性得

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.10)$$

这就证明了静电场的无旋性. 实践表明, 无旋性只在静电情况下成立. 在一般情况下电场是有旋的, 在第三节中我们再说明一般情况下电场的旋度.

(1.8)和(1.10)式给出静电场的散度和旋度, 它们表示电荷激发电场以及电场内部联系的规律性, 是静电场的基本规律. 它们所反映的物理图像是: 电荷是电场的源, 电场线从正电荷发出而终止于负电荷, 在自由空间中电场线连续通过; 在静电情形下电场没有旋涡状结构.

例 电荷 Q 均匀分布于半径为 a 的球体内, 求各点的电场强度, 并由此直接计算电场的散度.

解 作半径为 r 的球(与电荷球体同心). 由对称性, 在球面上各点的电场强度有相同的数值 E , 并沿径向. 当 $r > a$ 时, 球面所围的总电荷为 Q , 由高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

因而

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

写成矢量式得

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (r > a) \quad (1.11)$$

若 $r < a$, 则球面所围电荷为

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{Qr^3}{a^3}$$

应用高斯定理得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3}$$

由此得

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (r < a) \quad (1.12)$$

现在计算电场的散度. 当 $r > a$ 时 $\mathbf{E}$ 应取(1.11)式, 在这区域 $r \neq 0$, 由直接计算可得

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0)$$