

 国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

计算机辅助 几何设计

Computer Aided Geometric Design

王国瑾 汪国昭 郑建民 著



A0966990



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何设计 / 王国瑾 汪国昭 郑建民 著. - 北京: 高等教育出版社;
海德堡: 施普林格出版社, 2001.7

ISBN 7-04-010019-3

I.计… II.①王… ②汪… ③郑… III.几何-计算机辅助设计-图形软件
IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 25223 号

责任编辑: 徐可 **封面设计:** 王凌波 **责任印制:** 宋克学

计算机辅助几何设计

王国瑾 汪国昭 郑建民 著

出版发行 高等教育出版社 施普林格出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 中国科学院印刷厂

开 本 787×1092 1/16

印 张 26.25

版 次 2001 年 7 月第 1 版

字 数 660 000

印 次 2001 年 7 月第 1 次印刷

插 页 3

定 价 46.00 元

© China Higher Education Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001

版权所有 侵权必究

前 言

浙江大学数学系计算机辅助几何设计与图形学课题组(CAGD&CG Group)开展计算机图形学和几何设计的研究已有二十余年历史. 近十年来, 课题组在国家自然科学基金资助和兄弟单位帮助下, 针对计算机辅助曲线曲面造型的国际前沿课题和我国工业界提出的专业技术难点开展攻关研究, 取得了一批理论成果. 这些成果先后总结成论文, 发表在 Computer Aided Geometric Design, CVGIP: Graphical Models and Image Processing, Computer Aided Design, Computing, Computer Graphics, Computers and Graphics, Computers in Industry, Journal of Approximation Theory, Chinese Science Bulletin, Progress in Natural Science, Journal of Computer Science and Technology, Journal of Computational Mathematics, Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing 等国际期刊和《中国科学》、《计算机学报》、《软件学报》、《数学年刊》、《应用数学学报》、《计算数学》、《高校应用数学学报》、《计算机辅助设计与图形学学报》等国内核心刊物上, 累计逾百篇. 其中有 30 篇被 SCI(Science Citation Index)摘录, 有 34 篇被 EI(Engineering Index)摘录, 有 2 篇在 SIGGRAPH 计算机图形与交互技术国际会议上宣读, 又被作为第一作者的国际学者 100 多次在 70 多篇文章中引用 150 多次, 在 CAGD&CG 这一高技术领域为我国争得了一席之地. 为了与广大读者共享我们的科研成果, 为祖国的四化尽绵薄之力; 为了与同行们进行学术交流, 起到抛砖引玉的作用, 我们在国家自然科学基金研究成果专著出版基金的资助下, 把这些论文进行系统的归纳整理, 写成本书印刷出版.

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design)主要研究在计算机图象系统的环境下对曲面信息的表示、逼近、分析和综合. 它肇源于飞机、船舶的外形放样(Lofting)工艺, 由 Coons(1912 - 1979)、Bézier(1910 - 1999)等大师于 20 世纪 60 年代奠定理论基础. 典型的曲面表示, 20 世纪 60 年代是 Coons 技术和 Bézier 技术, 20 世纪 70 年代是 B 样条技术, 20 世纪 80 年代是有理 B 样条技术. 现在, 曲面表示和造型已经形成了以非均匀有理 B 样条(NURBS: Non-Uniform Rational B-Spline)参数化特征设计(Parameterized and Characteristic Design)和隐式代数曲面表示(Implicit Algebraic Surface Representation)这两类方法为主体, 以插值(Interpolation)、拟合(Fitting)、逼近(Approximation)这三种手段为骨架的几何理论体系.

随着计算机图形显示对于真实性、实时性和交互性要求的日益增强, 随着几何设计对象向着多样性、特殊性和拓扑结构复杂性靠拢这种趋势的日益明显, 随着图形工业和制造业迈向一体化、信息化和网络化步伐的日益加快, 随着激光测距扫描等三维数据采样技术和硬件设备的日益完善, 计算机辅助几何设计在近几年来得到了长足的发展. 这主要表现在研究领域的急剧扩展和表示方法的开拓创新.

从研究领域来看, 计算机辅助几何设计技术已从传统的研究曲面表示、曲面求交和曲面拼接, 扩充到曲面变形、曲面重建、曲面简化、曲面转换和曲面位差; 从表示方法来看, 以网格细分(Subdivision)为特征的离散造型与传统的连续造型相比, 大有后来居上的创新之势. 而且, 这种曲面造型方法在生动逼真的特征动画和雕塑曲面的设计加工中如鱼得水, 得到了高度的运用.

在这本书中, 大部分章节反映了当前的国际研究热点, 如有理参数曲面的多项式逼近, 降阶逼近和隐式逼近, 网格曲面的细分逼近, 曲面互化和变形, 曲面重建和简化, 曲面拼接和求交, 曲面位差计算和曲面区间分析等. 因此本书的第一个特点是题材新颖、接触前沿.

在这本书中, 展示的最新理论成果涵盖了曲线曲面的计算机表示、插值、拟合、逼近、拼接、离散、转换、求交、求导、求积、变形、区间分析和等距变换等方面, 这些都是计算机辅助几何设计的重要研究领域. 因此本书的第二个特点是内容丰富、涉猎广泛.

在这本书中, 重点介绍了浙江大学数学系 CAGD&CG Group 近十年来独立创造的计算机辅助几何设计的许多新技术和新方法, 例如 Bézier/B-Spline/NURBS 曲线的包络生成技术, 离散 B 样条计算技术, 有理圆锥曲线段 Bernstein 基表示技术, 广义 Ball 曲线曲面表示和求值技术, 复杂 B 样条曲线曲面节点插值技术, 有理曲面任意阶几何连续拼接技术, 参数曲线曲面求交中离散层数的先验性技术和离散最佳终判技术, 有理 Bézier 曲线曲面的求导求积技术, 曲线曲面等距性中的复分析、重新参数化和代数几何技术, 曲面变形中的活动球面坐标技术等等. 因此本书的第三个特点是自成体系、浙大特色.

在这本书中, 各章内容充分体现了计算机辅助几何设计这一新兴边缘学科与应用逼近论、微分几何、代数几何、线性代数、数值分析、拓扑学、微分方程、分形小波等近代数学各个分支以及计算机图形学、几何造型、数据结构、程序语言、机械加工、外形检测、三维医学图象学、人体解剖学等学科的交叉和渗透; 同时, 部分内容是我们在完成国内前西安飞机公司、成都飞机公司、上海船舶运输科学研究所、杭州妇幼保健医院、前浙江医科大学解剖学教研室等单位的实际课题中所总结写成的; 即使是理论推导的内容, 我们在写作中也尽量描述其来龙去脉和应用背景, 希望对我国的工业产品造型、机械设计制造、动画制作、计算机图形软件编制会有一定的帮助; 全书总结的曲线曲面的所有算法都被编制了程序, 在 SGI 图形工作站和微机上反复调试, 得到实现. 因此, 本书的第四个特点是学科交叉、面向应用.

最后, 这本书的写作采取了由叙述基本概念出发, 从几何直观的角度步步深入展开的做法; 推导严谨, 重点突出, 对原发表论文中的定理和算法以再创作的态度作了改写和简缩, 以全书统一的符号加以描述, 并尽量阐明其创新思路、几何意义及应用步骤. 全书集中介绍我们的理论成果, 为保持内容的系统性和完整性, 对国际国内的重要相关理论也作扼要介绍. 至于基本概念的叙述, 又尽可能不落俗套, 尽量采用我们自己的新观点和新思想. 例如, Bézier 曲线的引入, 采用了空间割角多边形序列一致收敛的极限形式并给予严格

证明; B样条基函数, 采用了新推导的一般递推公式; NURBS曲线的引入, 采用了递归的包络定义; 细分曲面的引入, 采用了我们提倡的切割磨光法; 区间曲面的引入, 采用了我们给出的中心表达形式等等. 这样做的好处一是再次体现专著特色, 二是使读者不必多找其他参考书籍, 只要具备数学分析(微积分)、线性代数和应用微分几何知识就能读懂全书, 登堂入室. 因此, 本书的第五个特点是论述简明、深入浅出.

正因为本书是按照由浅入深、循序渐进、严格定义、严密推理、算法详细、注重应用的原则写成的, 所以它虽然是一本专著, 但却可兼而用作大学的研究生教材, 其中第1、2、3、7章的全部以及第5、6、9、10章的前几节也可用作大学高年级学生的选修课教材, 更适合于有志从事计算机图形和计算机辅助设计研究者作为自学入门的向导.

本书可供高等院校计算机科学与工程系、应用数学系、机械工程系、航空航天、舰船、汽车、模具、机器人制造、建筑、测绘、勘探、气象、公路设计、服装鞋帽设计、工业造型、工艺美术、电子通讯、生物、医学图象处理等专业的广大师生和研究生阅读; 对从事曲面造型理论研究与工程应用和从事科学计算可视化的广大科技人员, 对从事计算机图形、影视动画软件开发和从事产品外形设计、制造与工艺(CAD/CAM/CAPP)方面有关软件开发的计算机工作者也有较大参考价值.

本书作者从1984年起为浙江大学应用数学系(1999年起更名为数学系)、计算机系、机械系以及后来建立的浙江大学CAD&CG国家重点实验室的研究生开设学位课程《计算几何》. 十多年来, 遵照教材现代化、教材与国际接轨的要求, 把CAGD领域的国际研究进展和本课题组的最新研究成果一点一滴地及时充实到课程讲义之中, 不断更新教学内容, 以科研带教学, 以教学促科研, 受到了听讲学生的普遍欢迎. 正是这多年的教学经验积累和科学研究收获, 为本书的写作奠定了坚实的基础.

本书共有二十章. 首先由王国瑾教授拟定各章内容和细目, 与其余作者进行了充分的讨论和修改. 汪国昭教授撰写了第11章、第20章和第1章的前四节; 郑建民教授撰写了第10章、第18章和第16章的第1、2、3、7、8、9节; 杨勋年副教授撰写了第6章的前二节; 王国瑾教授撰写了本书其余的十三章以及第1章的后二节、第6章的后三节和第16章的第4、5、6、10节; 最后由王国瑾教授负责全书的统稿、润色和校订.

这本书是在前浙江大学应用数学系主任和浙江大学CAD&CG国家重点实验室学术委员会前主任梁友栋教授的关心和支持下写成的, 浙江大学数学系的董光昌教授和金通洸教授也对本书的写作给予热情的鼓励. 作者衷心感谢兄弟院校的师长们, 他们多年来都在学术上给作者以丰富的启迪, 在工作中给作者以巨大的帮助; 尤其是亲自倡导并身体力行开展中国CAGD研究事业的著名数学家苏步青院士, 他对科学的执著和创造精神, 他以七十多高龄下厂解决实际课题的研究作风, 一直激励着作者们奋发进取. 博士生刘利刚、陈国栋、陈动人、钟纲、吕勇刚、张宏鑫、满家巨、寿华好、车武军、吕晟珉、张景峤以及硕士生解本怀、金雷为本书文稿的打字和排版付出了辛勤的劳动, 作者也向他们表示诚挚的

感谢.

在本书面世之际,三位作者还要对养育自己的父母以及各自的妻子吴定安、林亚平、任开文表示深深的敬意.他们以自己的爱心和操劳,默默地支持着作者们长年累月的科研工作和本书的写作.如果说,本书对我国的科学研究、工业和软件业会有一点微薄贡献的话,那么这里面也有他们的一份功劳.

由于时间仓促,加之水平有限,本书中难免会有错误和不足,敬请读者不吝指正.

作者谨识于
浙江大学求是园欧阳纯美楼

目 录

第一章 Bézier 曲线	1
1.1 自由曲线造型概论	1
1.1.1 样条函数插值的 Hermite 基表示	1
1.1.2 端点条件及追赶法	2
1.1.3 样条曲线	3
1.2 割角多边形序列的生成及收敛(Bézier 曲线的几何生成法 I)	4
1.2.1 简单割角法	4
1.2.2 割角多边形序列的两个性质	4
1.2.3 割角多边形序列的极限形式	6
1.3 Bézier 曲线的基本几何性质及几何生成法 II 和 III	7
1.4 Bézier 曲线的离散构造与平面 Bézier 曲线的保凸性质	10
1.4.1 离散公式的导出	10
1.4.2 离散公式的应用(平面 Bézier 曲线的保凸性)	12
1.5 Bézier 曲线的包络性质(几何生成法 IV)	12
1.6 Bézier 曲线的代数性质	13
1.6.1 Bézier 曲线两种代数定义的等价性	13
1.6.2 Bézier 曲线的幂基表示	14
1.6.3 Hermite 插值曲线的 Bézier 表示	15
主要文献	16
参考文献	16
第二章 B 样条曲线	18
2.1 B 样条基函数的递推定义及其性质	18
2.2 B 样条曲线的包络生成及几何定义	20
2.3 B 样条曲线的基本几何性质及连续阶	21
2.4 B 样条曲线求值和求导的 de Boor 算法	23
2.5 三次均匀 B 样条曲线的几何作图及设计技巧	24

2.6 带重节点的三次 B 样条曲线的基本性质	25
2.7 广义差商及 B 样条基函数的差商定义	27
2.8 嵌入一个节点改变 B 样条基函数和 B 样条曲线表示	28
2.9 连续嵌入同一个节点达 $k-1$ 重时的 B 样条曲线	30
2.10 离散 B 样条及离散 B 样条曲线	31
2.11 平面 B 样条曲线的保凸性和变差缩减性(V.D.)性	32
主要文献	33
参考文献	33

第三章 有理 Bézier 曲线 35

3.1 圆锥曲线的经典数学表示及其有理二次参数化	35
3.2 有理 Bézier 曲线的定义及其基本几何性质	36
3.3 有理 Bézier 曲线的离散构造及包络性	39
3.4 平面有理 Bézier 曲线的隐式化	40
3.4.1 隐式方程的导出	40
3.4.2 平面 n 次代数曲线有理参数化的条件	41
3.5 有理二次 Bézier 曲线的分类	42
主要文献	43
参考文献	43

第四章 有理 B 样条曲线 44

4.1 NURBS 曲线的一般定义、递推求值及离散构造	44
4.2 平面 NURBS 曲线的保形性	46
4.3 NURBS 曲线的包络生成及几何定义	47
4.3.1 包络的存在性	47
4.3.2 包络的唯一性	48
4.3.3 NURBS 曲线的几何定义	50
4.4 NURBS 曲线的显式矩阵表示	51
4.4.1 基于差商的系数矩阵显式表示	51
4.4.2 基于 Marsden 恒等式的系数矩阵显式表示	53
4.4.3 特殊 NURBS 曲线的系数矩阵显式表示	54
主要文献	55
参考文献	56

第五章 有理圆弧段与有理圆锥曲线段 57

5.1 圆弧曲线段的有理二次 Bézier 表示	57
5.2 圆弧曲线段的有理三次 Bézier 表示	58
5.2.1 充分条件和充要条件的导出	58
5.2.2 圆心角范围与顶点的几何作图	59
5.3 圆弧曲线段的有理四次 Bézier 表示	60
5.3.1 充要条件的导出	60
5.3.2 圆心角范围	62
5.4 圆锥曲线段的有理三次 Bézier 表示	63
5.4.1 有理三次 Bézier 曲线的降阶条件与有理保形参数变换下的不变量	63
5.4.2 有理三次圆锥曲线段向单位圆弧的转换	64
5.4.3 有理三次圆锥曲线段的充要条件	65
5.4.4 有理三次圆锥曲线段的分类条件	67
5.5 圆弧曲线段与整圆的有理 B 样条表示	68
主要文献	68
参考文献	69

第六章 几何样条插值、逼近及平面点列光顺 70

6.1 平面点列的双圆弧样条插值	71
6.1.1 最优切矢的确定	71
6.1.2 双圆弧插值的算法	72
6.2 平面点列光顺算法	72
6.2.1 多余拐点的去除	73
6.2.2 基于改进最小能量法的离散曲率光顺方法	74
6.3 平面曲线的圆弧样条逼近和空间曲线的圆柱螺线样条逼近	76
6.3.1 平面曲线的圆弧样条逼近	76
6.3.2 空间曲线的圆柱螺线样条逼近	76
6.4 空间型值点位矢和单位切矢的双圆柱螺线插值	78
6.5 由散乱型值点构造插值曲面	78
主要文献	80
参考文献	80

第七章 矩形域和三角域上的参数函数曲面	82
7.1 插值算子布尔和与张量积	82
7.2 矩形域上的 Bézier 曲面及其几何性质	84
7.3 三角域上的 Bézier 曲面及其几何性质	86
7.3.1 三角域上的 Bézier 参数曲面及其基本性质	86
7.3.2 三角域上 Bézier 函数曲面的正性和凸性	90
7.4 矩形域上的 B 样条曲面、有理 Bézier 曲面与有理 B 样条曲面	94
7.5 旋转曲面的有理 Bézier 表示	95
7.5.1 有理双二次 Bézier 表示	95
7.5.2 有理双三次 Bézier 表示	96
7.6 球面的有理参数表示	97
主要文献	97
参考文献	98
第八章 广义 Ball 曲线与广义 Ball 曲面	99
8.1 CONSURF 系统中机身造型曲线的几何性质	100
8.2 两种广义 Ball 曲线	102
8.3 Wang-Ball 基函数的性质	102
8.4 Said-Ball、Wang-Ball 曲线与 Bézier 曲线的比较	103
8.4.1 递归求值	103
8.4.2 与 Bézier 曲线的互化	105
8.4.3 升阶和降阶	107
8.5 利用广义 Ball 曲线曲面对 Bézier 曲线曲面求值	109
8.6 三角 Ball 曲面	110
8.6.1 三角 Wang-Ball 基及三角 Wang-Ball 曲面	110
8.6.2 三角 Wang-Ball 曲面的升阶和递归求值	111
主要文献	112
参考文献	112
第九章 曲线曲面的插值与拟合	113
9.1 B 样条曲线曲面的节点插值法	113

9.2 C^2 连续的三次 B 样条插值曲线	114
9.3 C^1 和 C^0 连续的三次 B 样条插值曲线	116
9.3.1 选取二重节点和三重节点的准则	116
9.3.2 以重节点为界对插值曲线分段反求控制顶点的原理和算法	117
9.4 参数无重节点的双三次 B 样条插值曲面	118
9.5 参数有重节点的双三次 B 样条插值曲面	120
9.6 C^2 , C^1 和 C^0 连续的三次 Bézier 样条插值曲线	120
9.7 C^2 , C^1 和 C^0 连续的双三次 Bézier 样条插值曲面	122
9.8 构造插值样条曲面时型值点不一致分布的均匀性检查	124
9.9 带插值条件的 B 样条曲线光顺拟合	124
9.10 带插值条件的 B 样条曲面光顺拟合	125
9.11 带插值条件且与已知曲面作 C^1 连续拼接的 Bézier 曲面光顺拟合	126
主要文献	128
参考文献	128

第十章 曲线曲面的几何连续性

10.1 几何连续性概念的提出	129
10.2 曲线的几何连续性	131
10.2.1 曲线几何连续性的定义	131
10.2.2 曲线的有理连续性	134
10.2.3 有理连续性条件	136
10.3 几何光滑拼接曲线的构造	138
10.4 曲面的曲率连续	140
10.4.1 曲率连续的一般条件	140
10.4.2 矩形域上有理 Bézier 曲面的 G^2 条件	142
10.4.3 曲率连续拼接的有理 Bézier 曲面的构造	144
10.4.4 简单曲率连续拼接曲面的构造	147
10.5 曲面的任意阶几何连续	147
10.5.1 曲面 G^n 连续的定义	147
10.5.2 有理几何连续的一般条件	149
10.5.3 有理几何连续条件的求解	149
10.5.4 有理几何连续的简单形式	153
10.6 矩形域上有理 Bézier 曲面的 G^n 拼接	154
10.6.1 有理 Bézier 曲面几何连续拼接的判定	154

10.6.2 有理 Bézier 曲面几何连续拼接的构造	155
10.7 三角域和矩形域上有理 Bézier 曲面的拼接	156
主要文献	157
参考文献	157

第十一章 参数曲线曲面的求交技术

11.1 B 样条曲线转化为 Bézier 曲线	160
11.2 B 样条曲面转化为 Bézier 曲面	161
11.3 Bézier 曲线曲面的高度分析	162
11.4 Bézier 曲线曲面离散层数的先验性公式	166
11.5 对 Riesenfeld 关于曲线离散终判准则的改进	167
11.5.1 三次 Bézier 曲线的化直准则	168
11.5.2 n 次有理 Bézier 曲线的化直准则	168
11.5.3 一个极值问题	169
11.6 Bézier 曲线和 B 样条曲线的离散求交法	170
11.7 Bézier 曲面和 B 样条曲面的离散求交法	171
11.8 Bézier 曲面与平面的求交	172
11.9 有理 Bézier 曲线曲面离散终判的先验性公式	172
11.10 离散差分跟踪求交法	175
11.10.1 多项式曲面的差分表示	175
11.10.2 Bézier 曲面的差分矩阵和差分表示	176
11.10.3 Bézier 曲面求交中跟踪子曲面片的选定	177
11.10.4 离散差分跟踪求交	178
11.11 曲面求交的活动仿射标架跟踪法	179
11.11.1 球变换	179
11.11.2 求交算法	180
11.12 Bézier 曲面的环检测	180
主要文献	181
参考文献	182

第十二章 有理 Bézier 曲线曲面的多项式逼近

12.1 有理 Bézier 曲线的两类多项式逼近 $h(r, p)$ 和 $H(r, p)$	184
12.1.1 有理曲线 Hermite 逼近与 Hybrid 逼近的定义	184

12.1.2	用传统的逼近论方法求 $h\langle s, s \rangle$ 的收敛条件	185
12.1.3	$h\langle r, p \rangle$ 逼近与 $H\langle r, p \rangle$ 逼近的关系	186
12.2	$h\langle r, p \rangle$ 逼近与 $H\langle r, p \rangle$ 逼近的余项	188
12.3	h 逼近曲线 $h^{r,p}(t)$ 与 Hybrid 曲线 $H^{r,p}(t)$	189
12.4	$h\langle s, s \rangle$ 逼近与 $H\langle s, s \rangle$ 逼近的收敛条件	192
12.5	低次 $h\langle s, s \rangle$ 逼近与 $H\langle s, s \rangle$ 逼近的收敛准则	193
12.5.1	一次有理曲线多项式逼近收敛的充要条件	193
12.5.2	关于多项式根的几个引理	193
12.5.3	二次有理曲线多项式逼近的收敛准则	194
12.5.4	三次有理曲线多项式逼近的收敛准则	195
12.5.5	重新参数化技术对收敛条件的影响	195
12.6	$h\langle s, 0 \rangle$ 逼近与 $H\langle s, 0 \rangle$ 逼近的收敛条件	196
12.7	(r/p) 有定极限值的 $h\langle r, p \rangle$ 逼近与 $H\langle r, p \rangle$ 逼近的收敛条件	196
12.8	Hybrid 曲线的移动控制顶点 $H_r^{r,p}(t)$ 的界	196
12.8.1	对具有对称权因子的低次有理曲线求 $H_s^{s,s}(t)$ 的界	197
12.8.2	利用矩阵方法对一般有理曲线求 $H_s^{s,s}(t)$ 的界	198
12.8.3	利用复平面上的围道积分求 $H_r^{r,p}(t) - H_r^{r,p}$ 的界	200
12.9	一般情况下 $h\langle r, p \rangle$ 逼近和 $H\langle r, p \rangle$ 逼近收敛的充要条件	202
12.10	用新的观点研究有理 Bézier 曲线的 $H\langle r, p \rangle$ 逼近	205
12.11	有理 Bézier 曲面的 Hybrid 表示	208
12.12	有理 Bézier 曲面的两类多项式逼近 $H\langle r, p; s, q \rangle$ 和 $h\langle r, p; s, q \rangle$	212
12.12.1	有理曲面 Hybrid 逼近与 Hermite 逼近的定义	212
12.12.2	$H\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近的余项	213
12.12.3	$h\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近与 $H\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近的关系	213
12.13	Hybrid 曲面 $H^{r,p;s,q}(u, v)$ 的递推计算公式	216
12.13.1	一般情况	216
12.13.2	简化情况	219
12.14	有理 Bézier 曲面 $H\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近的收敛条件	221
12.14.1	$H\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近余项的界	221
12.14.2	$H\langle s, s; s, s \rangle$ 逼近收敛的一个充分条件	222
12.14.3	$H\langle r, p; s, q \rangle$ 逼近收敛的充要条件	222
	主要文献	223
	参考文献	223

第十三章 有理 Bézier 曲线曲面的求导和求积	224
13.1 有理 Bézier 倍式化速端曲线	224
13.1.1 Dir 函数的定义和性质	224
13.1.2 倍式化速端曲线的导出	225
13.1.3 曲线导矢方向的界	226
13.1.4 曲线导矢大小的界	226
13.2 有理 Bézier 倍式化速端曲面	227
13.2.1 倍式化速端曲面的导出	227
13.2.2 曲面导矢方向的界	228
13.2.3 曲面导矢大小的界	229
13.3 动曲线轨迹的速端曲线	230
13.3.1 速端曲面的直接导出	230
13.3.2 曲面导矢界的估计	231
13.4 有理 Bézier 曲面的法矢	232
13.4.1 Nrm 函数的定义和性质	232
13.4.2 曲面法矢的计算	232
13.4.3 曲面法矢方向的界	233
13.5 有理 Bézier 曲线的高阶导矢	234
13.5.1 高阶导矢的递推算法	234
13.5.2 导矢 E_i^{n-1} 表示的应用 I: 有理 Bézier 曲线的弧长估计	236
13.5.3 导矢 E_i^{n-1} 表示的应用 II: 有理 Bézier 曲线端点处的三阶导矢的计算	236
13.5.4 导矢 E_i^{n-1} 表示的应用 III: 有理 Bézier 曲线的导矢界的估计	237
13.6 二次有理 Bézier 曲线的精确求积	238
13.6.1 求积问题的提法与积分模型的简化	238
13.6.2 精确求积公式的导出	239
13.7 平面有理 Bézier 曲线求积的多项式逼近	241
13.7.1 平面 Bézier 曲线求积	241
13.7.2 平面有理 Bézier 曲线求积的多项式逼近的误差界及其算法	242
13.8 平面有理 Bézier 曲线求积的降阶逼近	244
13.8.1 降阶求积的误差估计	244
13.8.2 降阶求积的算法	247
13.9 二次和三次 NURBS 曲线求积	247
主要文献	247
参考文献	247

第十四章 Bézier 曲线曲面的降阶逼近..... 249

14.1 Bézier 曲线、Bézier 矩形片与 Bézier 三角片的退化条件	250
14.2 Bézier 曲线降阶的 B 网扰动和约束优化法	251
14.2.1 降阶的显式算法和误差估计	251
14.2.2 离散/降阶算法	253
14.2.3 降阶中的 G^1 连续条件	253
14.3 Bézier 矩形片与 Bézier 三角片降阶的 B 网扰动和约束优化法	254
14.3.1 Bézier 矩形片的降阶	254
14.3.2 Bézier 三角片的降阶	255
14.4 基于广义逆矩阵的 Bézier 曲线一次性降多阶逼近	257
14.4.1 端点不保插值的降多阶逼近	257
14.4.2 保端点插值的降多阶逼近	258
14.4.3 误差分析及实例	258
14.5 保端点高阶插值的 Bézier 曲线一次性降多阶逼近	259
主要文献	263
参考文献	263

第十五章 曲线曲面形式之间的互化..... 264

15.1 二次 NURBS 曲线与二次有理 Bézier 曲线之间的互化	265
15.2 双二次 NURBS 曲面与双二次有理 Bézier 曲面之间的互化	266
15.3 三次 NURBS 曲线与三次有理 Bézier 曲线之间的互化	267
15.4 Bézier 三角片到退化矩形片的转化	270
15.5 Bézier 三角片到三张非退化矩形片的转化	272
15.6 Bézier 矩形片用线性函数实现广义离散及其到三角片的转化	274
15.6.1 矩形参数域被分割为两块梯形域的广义离散算法	274
15.6.2 矩形参数域被分割为三边区域和五边区域的广义离散算法	275
15.6.3 Bézier 矩形片到两张三角片的转化	276
15.7 Bézier 矩形片用高次代数曲线实现广义离散并用于曲面拼接	277
15.7.1 矩形参数域被分割为两块曲边梯形域的广义离散算法	277
15.7.2 矩形参数域被分割为三边和五边曲边区域的广义离散算法	278
15.7.3 广义离散在几何连续拼接和 trimmed 曲面参数表示中的应用	279
15.8 基于 de Casteljau 算法的有理二次 Bézier 曲线隐式化	279

15.9 基于 de Casteljau 算法的平面有理 n 次 Bézier 曲线隐式化.....	281
主要文献.....	285
参考文献.....	285
第十六章 等距曲线与等距曲面.....	287
16.1 平面等距曲线.....	289
16.2 Pythagorean-hodograph(PH)曲线.....	291
16.2.1 定义和表示.....	291
16.2.2 三次 PH 曲线的构造、特征和性质.....	292
16.2.3 四次和五次 PH 曲线的构造.....	293
16.2.4 PH 曲线的等距曲线和弧长.....	295
16.3 具有有理等距曲线的参数曲线(OR 曲线).....	295
16.3.1 参数曲线的复形式表示.....	295
16.3.2 参数曲线具有有理等距曲线的充要条件.....	297
16.3.3 具有有理等距曲线的低次 Bézier 曲线.....	299
16.4 PH 曲线和 OR 曲线的插值构造算法.....	300
16.4.1 平面五次 PH 曲线的 G^2 Hermite 插值.....	300
16.4.2 平面三次 PH 曲线偶的 C^1 Hermite 插值.....	300
16.4.3 平面八次抛物-PH 曲线的 C^2 Hermite 插值.....	301
16.5 基于法矢曲线逼近的等距曲线最佳逼近.....	302
16.5.1 法矢曲线最佳多项式逼近的导出.....	302
16.5.2 具有端点约束的法矢曲线最佳逼近.....	303
16.5.3 Legendre 级数与 Jacobi 级数的系数计算.....	304
16.5.4 NURBS 曲线的等距曲线逼近.....	305
16.6 基于刘徽割圆术的等距曲线逼近算法.....	306
16.7 具有有理中心线的管道曲面.....	309
16.8 二次曲面的等距曲面.....	310
16.8.1 椭圆抛物面和双曲抛物面的等距曲面.....	311
16.8.2 椭球面的等距曲面.....	311
16.8.3 单叶双曲面的等距曲面.....	312
16.8.4 双叶双曲面的等距曲面.....	313
16.9 有理直纹面的等距曲面.....	313
16.10 基于球面三角网格逼近的等距曲面逼近算法.....	315
主要文献.....	315