Fundamentals of
Applied Functional Analysis

应用泛函
分析基础

庞永锋
杨　威　孙　燕　苑文法　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

应用泛函分析基础

Fundamentals of Applied Functional Analysis

庞永锋　杨威　孙燕　苑文法　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书共7章，包括预备知识、点集拓扑、Lebesgue积分、距离空间、赋范线性空间及其上的线性算子、Hilbert空间及其上的线性算子、线性算子的谱理论。

本书可作为数学系信息与计算科学专业和数学与应用数学专业的研究生教材，也可作为理工科其他相关专业的研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析基础/庞永锋等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2015.12
ISBN 978-7-5606-3902-4

Ⅰ.①应… Ⅱ.①庞… Ⅲ.①泛函分析 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第241895号

策　　划　邵汉平
责任编辑　张　玮
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2015年12月第1版　2015年12月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张　15
字　　数　347千字
印　　数　1～2000册
定　　价　32.00元
ISBN 978-7-5606-3902-4/O
XDUP　4194001-1

自　　序

笔者从2006年起，先后承担泛函分析、数学分析、实变函数等数学系本科专业课和拓扑学等研究生课程的授课任务。在长期的教学过程中，发现学生的基础千差万别。很多数学系学生，虽然学过数学分析、高等代数、近世代数和实变函数等课程，但是不能和泛函分析紧密联系。有些学校甚至还没有开设实变函数、近世代数和拓扑学等课程；即使开设了这些课程，学生也没有很好地掌握这些课程的基本知识，真正理解这些课程的思想。因此泛函分析课程的学习对于他们来说是相当困难的。

在长期的教学和科研过程中，笔者遇到很多非数学专业的科研人员，他们需要用到泛函分析的知识，对泛函分析课程非常感兴趣。但是，这些科研人员大多数都没有学习过数学分析、高等代数、实变函数和拓扑学等课程。因此对于他们来说，泛函分析是一门令人头疼但又不得不学的课程。他们迫切需要一本合适的泛函分析教材。

现在国内的泛函分析教材主要有两类：一类是为数学专业学生编写的教材，理论较多较难，但是应用方面的知识和例题较少，而且没有对数学专业的本科课程进行复习和加深；另一类是为非数学专业学生编写的教材，应用性比较强，但是没有数学专业的本科课程做铺垫，因此跳跃度大，理论衔接少，学习难度较大。

泛函分析产生于线性代数、常微分方程和偏微分方程、变分法和逼近论，特别是线性积分方程，其理论对现代泛函分析的创立和发展起着最大的作用。数学家观察到各种不同领域的问题往往具有相互关联的特征和性质。人们根据这一事实，通过对问题的提炼，从而获得处理这些问题的一个统一而有效的途径。这种处理问题的优点是，能够把握事物的最本质的核心部分，免受非本质的细节的干扰，从而对问题看得更深入、更清晰。这有助于把毫不相关的各个领域联系起来。用抽象方法研究问题，总是从满足某些公理的一个集合出发，并且对集合的元素的特征不予指定，导出的一些逻辑结果作为定理反复使用。这意味着，从公理体系出发得到了一个数学结构，这个结构的理论以抽象的方法进行讨论，这些定理可以被应用到满足公理体系的各种具体的集合上。在泛函分析中，以抽象的方法研究各种抽象的空间。我们将会看到，空间这个概念

具有惊人的广泛性。一个抽象空间就是满足一个公理体系的集合，选用不同的公理体系能得到不同的抽象空间。

笔者从2001年起攻读算子理论和算子代数的研究生，一直在学习和讲授泛函分析课程，针对数学专业和非数学专业学生的学习需要，编写了这本《应用泛函分析基础》教材。本教材具有以下特点：

(1) 以高等数学、线性代数和概率论等大学数学教材为基础，同时复习了数学系本科与泛函分析相关的课程，为泛函分析的学习奠定一个全面、坚实的基础。

(2) 尽可能完整地讲授泛函分析的理论，同时对于重要的定理大都给出了详细证明。这样不但满足了数学专业注重理论的特色，而且使非数学专业学生在理论上对泛函分析有了一个完整的认知。

(3) 从控制论和概率论等方面给出一些泛函分析的应用，目的是让学生更好地学习和应用泛函分析。

在学习本教材时，本科生和非数学专业的研究生可以只学习第1章到第6章；数学专业的研究生可以对前三章的内容进行简单的复习，熟悉理论和方法即可。数学专业算子理论与算子代数方向的研究生还需要学习第7章。

本书的编写得到了国家自然科学基金(11401457)、陕西省自然科学基金(2014JQ1019，2014JM1010)和陕西省教育厅专项基金(13JK0565)的资助，是编者近十年来的教学和研究心血的结晶。

本书共分为7章，其中第5～7章是本书的核心。本书由四位编者合作完成并配备习题，具体分工如下：第一章由孙燕编写，第2章由苑文法编写，第3、4章由杨威编写，第5～7章由庞永锋编写。全书由庞永锋统稿和校正。

在此首先感谢父母多年来的培养和教育，使笔者能够顺利地完成大学的学习。其次，感谢妻子在生活上的照顾，使笔者能够顺利完成研究生阶段的学习和教材的编写。第三，感谢大学授业恩师的谆谆教诲和研究生阶段各位导师的悉心指导及无私培养。最后，感谢理学院和数学系各位同事多年的细心指导和多次探讨。由于笔者水平有限，书中难免存在疏漏与不足，恳请广大读者批评指正。

庞永锋

2015年6月

前　言

“泛函分析”一词首先出现于 Levy 1922 年出版的《泛函分析教程》中。泛函分析的起源可以追溯到 18 世纪变分法的产生。与微积分研究函数的极值一样，变分法研究函数集(空间)上的函数——泛函的极值。泛函分析的产生一方面是出于研究数学物理中各种艰深问题的需要，另一方面则是受到其他数学分支高度发展的影响。泛函分析的直接推动力是 19 世纪末兴起的积分方程的研究，它促进了线性泛函分析的诞生。泛函分析的发展受到 19 世纪末和 20 世纪初数学史上以下事件的影响：

(1) 分析学中类似问题的处理。代数方程求根和微分方程求解都使用了逐次逼近法，并且解的存在性和唯一性的条件也极为相似，这种相似在处理积分方程中表现得更为突出。Riesz 和 Fischer 几乎同时建立了 L^2 和 l^2 之间的等价关系。泛函分析的产生正是和这种情况有关，即有些看起来似乎不相关的对象，却存在着类似的地方。因此它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的、本质的东西，这正是泛函分析的特征。

(2) 非欧几何的发现。非欧几何的建立所产生的一个“最重要的影响是迫使数学家从根本上改变了对数学性质的理解”。函数被看成是函数空间中的点或向量。这就显示出分析和几何之间的相似，同时存在将分析几何化的可能性。这种可能性要求把几何概念进一步推广，将有限维空间推广到无限维空间。

(3) 实变函数的诞生。集合论在 20 世纪初首先引起了积分学的变革，1902 年 Lebesque 发表了论文《积分、长度与面积》，被认为是现代积分论的奠基性工作。Frechet 在 1905 年前后的工作开创了一般测度空间中的积分论，从而促成了实变函数的建立。

(4) 抽象代数的发展。Galois 引入了群的概念之后，Cayley 引入了抽象群的概念。Huntington 提出了抽象群的公理体系，Dirichlet 提出了理想的概念，Dedekind 引入了环和格的概念，Weber 提出了域的概念。1921 年，Noether 及其学派发表了《环中的理想》，这本书被看成现代抽象代数的开端。

如此形成的现代泛函分析是现代几何、函数及代数观点的高度综合。泛函分析的许多概念和方法是在总结各数学分支相似点的基础上提炼出来的，这就促使数学家们用抽象的方法和统一的观点对这些不同分支中的共同点进行加工，其结果不仅使经典分析的概念和方法一般化了，而且由于与代数、几何结合在一起考虑，这些概念和方法也被代数化、几何化了。泛函分析研究的是代数的问题，运用的是几何的观点，使用的是分析的方法。

泛函分析是一门分析学科，但与传统的分析学科不同。传统的分析强调演算，而泛函分析强调概念；传统的分析主要讨论个别函数(类)的性质，而泛函分析主要讨论函数空间及其之上算子的集合，特别是拓扑结构、代数结构及序结构。

代数中所谓的空间是指具有一定运算的集合，而泛函分析中所研究的空间主要是将一

个拓扑结构加到一个代数结构上所形成的拓扑向量空间。泛函分析是研究拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件映射的学科。

泛函分析大致可分为四个部分：一是函数空间理论，包括从 Hilbert 空间、Banach 空间到一般拓扑线性空间的理论；二是函数空间上的分析，这是最先发展的一部分，即所谓的泛函演算；三是函数空间之间的映射及算子理论，发展最成熟的是希尔伯特空间中的线性算子理论；四是算子(或函数)集合的代数结构，如巴拿赫代数、冯·诺伊曼代数、C^* 代数以及算子半群等理论。

泛函分析的发展可分如下三个阶段：

第一阶段是创始时期，大约从 19 世纪 80 年代到 20 世纪 20 年代。意大利一些数学家引入了泛函演算以及线性算子的概念。后来法国数学家发展了泛函演算。法国数学家 Frechet 利用当时的集合论观念把前人的结果统一为一个抽象的理论，把他们的共同点归纳起来而且加以推广：把函数或曲线看成集合或空间中的一个点，把它们看成一个抽象集合。有极限概念的集合称为距离空间，这是后来拓扑空间的萌芽。集合上可以定义取值在实数里的实函数，即泛函。有了极限概念就可以定义泛函的连续性。泛函可以进行代数运算，也可以进行分析演算，这样就成为名符其实的泛函分析了。1906 年 Hadmard 还在抽象的空间中引入了“距离”的观念，使其具有欧几里得空间距离的性质。

与 Frechet 同时，Hilbert 对于积分方程进行了系统的研究。Hilbert 实际上得到了具体的 Hilbert 空间的理论。抽象的 Hilbert 空间理论是 Schmidt 提出的。1907 年，匈牙利数学家 Riesz 等人引入 L^2 空间，发现其性质和 l^2 空间相同。Riesz－Fischer 定理也更清楚表明积分理论和抽象空间的泛函之间的紧密联系。1910 年 Riesz 仿照 L^2 空间研究了 L^p 空间($1\leqslant p\leqslant +\infty$)，之后又研究了 l^p 空间。Riesz 发现 L^p 上的全部连续线性泛函构成了一个对偶的空间 L^q 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，这些空间在研究偏微分方程方面是不可缺少的工具。

第二阶段，泛函分析正式发展成为一门学科。1920 年到 1922 年间奥地利数学家 Hahn、Helly、Wiener 和 Banach 都对赋范空间进行了定义及研究，Helly 还提出了所谓的 Hahn－Banach 定理。对泛函分析贡献最杰出的是 Banach，他把 Hilbert 空间推广为 Banach 空间。1932 年，Banach 出版了《线性算子论》一书，统一了当时泛函分析的众多成果，成为泛函分析第一本经典著作。从此泛函分析不仅在理论上比较完备，而且在古典分析的应用上起着举足轻重的作用。特别是波兰数学家 Schauder 和法国数学家 Leray 的不动点理论，都是现代偏微分方程理论研究的重要工具。

1926 年 John. von. Neumann 把 Hilbert 空间公理化，并把量子力学的数学基础建立在泛函分析之上，特别是他提出了关于自伴算子的谱理论。20 世纪 30 年代末，波兰数学家 Mazur 与苏联数学家 Gelfand 发展了 Banach 代数(赋范环)理论，而且通过抽象方法轻而易举地证明了古典分析中的大定理。这显示了泛函分析方法的威力，也论证了泛函分析独立存在的价值。

第三阶段是泛函分析的成熟阶段。从 20 世纪 40 年代起泛函分析在各方面取得突飞猛进的发展。Schwartz 系统地发展了广义函数论，使它成为了当今数学中不可缺少的重要工

具。1945 年后 Schatten 和 Grothendieck 引入了拓扑张量积理论，并完成了局部凸向量空间理论。Grothendieck 引入了一种新型的拓扑凸空间——核空间，它在泛函分析及概率论的许多分支中均有广泛的应用。

随着科学技术的迅速发展，泛函分析的概念和方法已经渗透到数学的许多分支，而且日益广泛地被应用于自然科学、工程科技理论和社会科学的各个领域，成为从事这些领域研究工作的专家和学者们所必需的数学基础。

编　者

2015 年 6 月

数学符号表

$\mathbf{N}$	表示全体正整数构成的集合，称为自然数集
$\mathbf{Z}$	表示全体整数构成的集合，称为整数集
$\mathbf{Q}$	表示全体有理数构成的集合，称为有理数集
$\mathbf{R}$	表示全体实数构成的集合，称为实数集
$\mathbf{C}$	表示全体复数构成的集合，称为复数集
$\mathbf{F}$	表示一个数域，通常是实数集，或者复数集
$\varnothing$	表示空集
$a\in A$	表示元素 a 属于集合 A
$a\notin A$	表示元素 a 不属于集合 A
$\bar{z}$	表示复数 z 的共轭复数
$\mathrm{Re}(z)$	表示复数 z 的实部
$\mathrm{Im}(z)$	表示复数 z 的虚部
$\forall$	表示所有的，或者对于任意
$\exists$	表示存在
$\Rightarrow$	表示由左面的结论推出右面的结论
$\Leftrightarrow$	表示左右两边的结论等价
$A\subseteq B$	表示集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素
$A\cap B$	表示集合 A 与集合 B 的所有公共元素构成的集合
$A\cup B$	表示集合 A 或者集合 B 的所有元素构成的集合
$A-B$	表示属于集合 A 且不属于集合 B 的所有元素构成的集合
$A\Delta B$	表示集合 $(A-B)\cup(B-A)$
B^c	表示集合 B 关于全集 X 的差集
$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$	表示集合 $\{x\mid \exists\gamma_0\in\Gamma$ 使得 $x\in A_{\gamma_0}\}$
$\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$	表示集合 $\{x\mid \forall\gamma\in\Gamma$ 有 $x\in A_\gamma\}$
$A\times B$	表示集合 $\{(x,y):x\in A$ 且 $y\in B\}$
A'	表示集合 A 的所有聚点构成的集合
$\overline{A}$	表示集合 $A\cup A'$
A°	表示集合 A 的所有内点构成的集合
∂A	表示集合 A 的所有边界点构成的集合
$C(X)$	表示 X 上的连续函数全体构成的集合
$M(X)$	表示 X 上的可测函数全体构成的集合

$S(X)$	表示 X 上的简单函数全体构成的集合
$L^1(X, \mu)$或者 L^1	表示 X 上关于测度 μ 可积的函数构成的集合
$C^k[a, b]$	表示有 k 阶连续导数的函数 $f: [a, b] \to \mathbf{F}$ 构成的集合
$m(A)$	表示集合 A 的 Lebesgue 测度
ω	表示可数集的基数
c	表示 $\mathbf{R}$ 的基数，称为连续统势
$\|A\|$	表示集合 A 的基数
$\\|\boldsymbol{x}\\|$	表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数
$E(X)$	表示随机变量 X 的数学期望
X^*	表示赋范线性空间 X 的全体有界线性泛函构成的集合
$D(T)$	表示算子 T 的定义域且它是 X 的一个子空间
$G(T)$	表示算子 T 的图像
$R(T)$	表示算子 T 的值域
$N(T)$	表示算子 T 的核空间
$X \approx Y$	表示 X 和 Y 同构
$B(X, Y)$	表示从 X 到 Y 的全体有界线性算子构成的集合
$\\|T\\|$	表示算子 T 的范数
$\mathrm{CH}(S)$	表示包含集合 S 的凸包
$x_n \xrightarrow{w} x$	表示向量列$\{x_n\}$弱收敛于 x
$T_n \xrightarrow{\\|\ \\|} T$	表示算子列$\{T_n\}$依范数收敛于 T
$T_n \xrightarrow{s} T$	表示算子列$\{T_n\}$强收敛于 T
$T_n \xrightarrow{w} T$	表示算子列$\{T_n\}$弱收敛于 T
$[x, y]$	表示向量 x 和 y 的内积
$L^{\perp}$	表示 Hilbert 空间中子集 L 的正交补
$\dim H$	表示线性空间 H 的维数
$\rho(T)$	表示算子 T 的预解集
$\sigma(T)$	表示算子 T 的谱
$\sigma_p(T)$	表示算子 T 的所有特征值构成的集合
$r(T)$	表示算子 T 的谱半径

目　　录

第1章　预备知识

19世纪末，德国数学家Cantor创立的集合论是20世纪数学抽象化和形式化的基础。1899年德国数学家Hilbert在几何基础上所完善的现代公理化方法推动了实变函数、泛函分析、拓扑学和近世代数的崛起。现代的泛函分析产生于数学物理问题中，并且它还是现代几何的、函数的及代数的观点的高度综合。因此泛函分析的学习是建立在集合论、数学分析及高等代数等课程基础之上的。本章对上述知识给予简单的回顾，并给出本书需要的重要结果。大部分的证明可以参考相关文献。

本章的知识要点：集合的表示；集合的运算；关系的性质；等价关系；群和商群；数域；线性空间；线性变换；上下确界；函数列。

1.1　集合的基本概念

集合(set)是由一些具有某种属性的个体构成的集体，这里个体和集体是两个没有定义的概念。例如“正在这里听课的全体学生的集合”、“所有整数的集合”等。集合也被称为集、族或者类(family，collection)。集合中的每个个体称为元素(element，member)。例如，正在这里听课的全体学生的集合以正在这里听课的每一个学生为这个集合的元素；所有整数的集合以每一个整数为它的元素。元素也被称为元、点或者成员。

众所周知，数0表示没有；所有元素都为0的矩阵是零矩阵，它们为数学运算提供了很大的方便。例如，平方等于2的有理数构成的集合；平方等于-1的实数构成的集合。集合也可以没有元素。没有元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示(empty set，null set)。由一个元素构成的集合称为单点集(single point set)。

集合的表示方法很多，如列举法、描述法等。

(1) 将一个集合的所有元素一一列举出来，并括上花括号。这种表示集合的方法称为列举法。例如，集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$表示由元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$构成的集合。

(2) 用$\{x \mid$关于x的一个命题$P\}$表示使得花括号中竖线后面的命题P成立的所有元素x构成的集合。这种表示集合的方法称为描述法。例如，集合$\{x \mid x$为实数且$0<x<1\}$表示开区间$(0, 1)$。竖线也可以用冒号“：”或分号“；”来代替。

在泛函分析中经常用到下面的集合：

$[a, b]=\{x \in \mathbf{R}: a \leqslant x \leqslant b\}$

$X(a < f < b) = \{x \in X: a < f(x) < b\}$

$C[a, b] = \{f: [a, b] \to \mathbf{R}: f\ 在[a, b]上连续\}$

$C^1[a, b] = \{f: [a, b] \to \mathbf{R}: f'\ 在[a, b]上连续\}$

在不至于发生混淆的情况下，用列举法表示集合时可以省略一部分内容。例如，用$\{1, 2, 3, \cdots\}$表示全体整数构成的集合；用$\{3, 5, \cdots\}$表示全体大于1的奇数构成的集合。然而在上述两个集合中，前者可能会被误解为全体正素数构成的集合，而后者也可能会被误解为全体正奇素数构成的集合，因此一般不建议采用这种表示方式。

不论采用哪种方法表示集合，最重要的是所定义集合的元素应当是完全确定的，即通常所说的集合的确定性。

在本书中，经常采用以下集合记号：

$\mathbf{N}$ 表示全体正整数构成的集合，称为正整数集或自然数集。

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的集合，称为整数集。

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的集合，称为有理数集。

$\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合，称为实数集。

$\mathbf{C}$ 表示全体复数构成的集合，称为复数集。

$\mathbf{F}$ 表示一个数域，通常是实数集或复数集。

设 A 是一个集合，a 是一个元素。如果 a 是集合 A 的一个元素，记作 $a \in A$，读作 a 属于(belongs to)A；如果 a 不是 A 的一个元素，记作 $a \notin A$，读作 a 不属于 A。对于任何一个集合 A 和任何一个元素 a，$a \in A$ 和 $a \notin A$ 有且仅有一个成立，这就是集合的确定性。

在以后的陈述或证明中，经常采用以下逻辑符号：

“$\forall$”表示“所有的”或者“对于任意”，这个记号来源于英语“all”或“any”。

“$\exists$”表示“存在”，来源于英语“exist”。

“$\Rightarrow$”表示“由左面的结论蕴含右面的结论”。

“$\Leftrightarrow$”表示“左右两面的结论等价”。

“$\wedge$”表示“且”，即两个命题同时成立。

“$\vee$”表示“或者”，即两个命题至少有一个成立。

总用等号“$=$”表示逻辑上的同一个对象。设 A 和 B 是两个集合。$A = B$ 读作 A 等于 B，表示它们是由相同的元素构成的集合，即$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$；$A \neq B$ 读作 A 不等于 B，表示 A 中至少存在一个元素不是 B 的元素，或者 B 中至少存在一个元素不是 A 的元素，即$(\exists x_0 \in A \wedge x_0 \notin B) \vee (\exists x_1 \in B \wedge x_1 \notin A)$。

定理 1.1.1 设 A、B 和 C 是三个集合，则它们满足以下性质：

(1) 自反性(reflexivity)：$A = A$。

(2) 对称性(symmetry)：如果 $A = B$，则 $B = A$。

(3) 传递性(transitivity)：如果 $A = B$ 且 $B = C$，则 $A = C$。

定理 1.1.1 可推广到代数中的等价关系。

定义 1.1.1 (1) 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作 A 包含(contain) 于 B，或者 B 包含 A，即$(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)\Leftrightarrow(A\subseteq B)$。

(2) 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$，读作 A 真包含(proper contain) 于 B，或者 B 真包含 A，即$((A\subseteq B)\wedge(\exists x_0\in B)\wedge(x_0\notin A))\Leftrightarrow(A\subset B)$。

定理 1.1.2 设 A、B 和 C 是三个集合，则满足以下性质：

(1) 自反性(reflexivity)：$A\subseteq A$。

(2) 反对称性(anti - symmetry)：如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。

(3) 传递性(transitivity)：如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

定理 1.1.2 可以推广到代数中的偏序关系。

定理 1.1.2 中的(2) 在证明集合相等时经常用到，即$((A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A))\Leftrightarrow(A=B)$。

在泛函分析中常常需要讨论以集合作为元素的集合，为了强调这一点，将这类集合称为集族，一般用花体字母 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$ 等表示。

定义 1.1.2 设 X 是一个集合，X 的所有子集构成的集族称为集合 X 的幂集(power set)，记作 $P(X)$，即 $P(X)=\{A\,|\,A\subseteq X\}$。

幂集的称呼来自于事实：如果 X 是由 n 个元素构成的集合，则 $P(X)$ 有 2^n 个元素。

定义 1.1.3 设 Γ 是一个集合。如果 $\forall\gamma\in\Gamma$，指定唯一一个集合 A_γ，则称给定了一个有标集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，简称给定了一个集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，$\Gamma$ 称为集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的指标集(index set)。

特别地，如果指标集 $\Gamma=\mathbf{N}$，则称集族$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为集合序列，简称集列，记为$\{A_n\}$。

定义 1.1.4 设$\{A_n\}$ 是一个给定的集列。如果 $\forall n\in\mathbf{N}$ 有 $A_n\subseteq A_{n+1}$，则称$\{A_n\}$ 为升列；如果 $\forall n\in\mathbf{N}$ 有 $A_n\supseteq A_{n+1}$，则称$\{A_n\}$ 为降列。

1.2 集合的基本运算

本节介绍集合的交、并、差及对称差等运算及性质，并给出它们的基本关系。

定义 1.2.1 设 A 和 B 是两个集合。

(1) 集合$\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的交集(Intersection)，记为 $A\cap B$，读作 A 交 B，即

$$A\cap B=\{x\,|\,(x\in A)\wedge(x\in B)\}$$

(2) 如果 $A\cap B=\varnothing$，则称集合 A 与集合 B 不相交或者互斥。

(3) 集合$\{x\,|\,x\in A$ 或者 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的并集(union)，记为 $A\cup B$，读作 A 并 B，即

$$A\cup B=\{x\,|\,(x\in A)\vee(x\in B)\}$$

(4) 集合$\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集(difference)，记为 $A\backslash B$，读作 A 差 B，即

$$A\backslash B=\{x\,|\,(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$

当 $B \subseteq A$ 时，记 $A \backslash B$ 为 $A-B$。显然，$A \backslash B = A-(A \cap B)$。特别地，当 $A \cap B = \varnothing$ 时，$A \backslash B = A$。

定义 1.2.2 设 X 是一个给定的集合，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$。

(1) 差集 $X-A$ 称为 A 关于 X 的补集(complement set)，记作 A^c。

(2) 集合 $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ 称为 A 与 B 的对称差(symmetric difference)，记作 $A \Delta B$。

定理 1.2.1 设 X 是一个给定的集合，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，$C \subseteq X$，则以下性质成立：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$。

(4) De Morgan 公式：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

下面介绍集合对称差的性质。

定理 1.2.2 设 A、B 和 C 是三个集合，则以下性质成立：

(1) $A \Delta B = (A \cup B)-(A \cap B)$。

(2) $B \Delta A = A \Delta B$。

(3) $A \Delta A = \varnothing$。

(4) $A \Delta \varnothing = A$。

(5) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$。

证明：(2)、(3) 及(4) 的证明比较简单，仅证明(1) 和(5)。

(1) $\forall x \in (A \Delta B)$，则 $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$，进而 $x \in (A \backslash B)$ 或者 $x \in (B \backslash A)$。

若 $x \in (A \backslash B)$，则 $x \in A$ 且 $x \notin B$，进而 $x \in (A \cup B)$ 且 $x \notin (A \cap B)$；

若 $x \in (B \backslash A)$，则 $x \in B$ 且 $x \notin A$，进而 $x \in (A \cup B)$ 且 $x \notin (A \cap B)$。

故 $x \in (A \cup B)-(A \cap B)$。

$\forall x \in (A \cup B)-(A \cap B)$，则 $x \in (A \cup B)$ 且 $x \notin (A \cap B)$，进而 $x \in A$ 且 $x \notin B$，或者 $x \in B$ 且 $x \notin A$。故 $x \in (A \backslash B)$ 或者 $x \in (B \backslash A)$，即 $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$。

因此 $A \Delta B = (A \cup B)-(A \cap B)$。

(5) 因为

$$
\begin{aligned}
(A \Delta B) \backslash C &= ((A \backslash B) \cup (B \backslash A)) \cap C^c = ((A \backslash B) \cap C^c) \cup ((B \backslash A) \cap C^c) \\
&= (A \backslash B \backslash C) \cup (B \backslash A \backslash C)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
C \backslash (A \Delta B) &= C \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c = C \cap (A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c \\
&= C \cap (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A) = ((C \cap A^c) \cup (C \cap B)) \cap (B^c \cup A) \\
&= ((C \cap A^c) \cap (B^c \cup A)) \cup ((C \cap B) \cap (B^c \cup A)) \\
&= (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap B \cap A) \\
&= (C \backslash A \backslash B) \cup (C \cap B \cap A)
\end{aligned}
$$

故 $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\backslash C) \cup (C\backslash(A\Delta B))$

$$= (A\backslash B\backslash C) \cup (B\backslash C\backslash A) \cup (C\backslash A\backslash B) \cup (A \cap B \cap C)$$

由于上式关于 A、B 和 C 是对称的，则$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$。

例 1.1 求证：对任何集合 A 和 B，$A\Delta C = B$ 当且仅当 $C = A\Delta B$。

证明：充分性。由定理 1.2.2 可得，$A\Delta C = A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \varnothing\Delta B = B$。

必要性。由定理 1.2.2 可得，$C = \varnothing\Delta C = (A\Delta A)\Delta C = A\Delta(A\Delta C) = A\Delta B$。

定义 1.2.3 给定一个集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$。

(1) 称集合$\{x \mid \exists \gamma_0 \in \Gamma$ 使得 $x \in A_{\gamma_0}\}$ 为集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的并，记为 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$。

(2) 当指标集$\Gamma\neq\varnothing$时，称集合$\{x \mid \forall\gamma\in\Gamma$有$x\in A_\gamma\}$为集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的交，记为$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$；当指标集 $\Gamma = \varnothing$ 时，$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \varnothing$，$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ 无意义。

特别地，对于集列$\{A_n\}$，记 $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ 为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；记 $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ 为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

例 1.2 求证：$[1, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1)$。

证明：$\forall x \in [1, +\infty)$，取 $k = [x] \in \mathbf{N}$，则 $k = [x] \leqslant x < [x]+1 = k+1$，故 $x \in [k, k+1)$。因此 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1)$ 且$[1, +\infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1)$。

$\forall x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1)$，$\exists k \in \mathbf{N}$ 使得 $x \in [k, k+1)$，故 $x \geqslant k \geqslant 1$，即 $x \in [1, +\infty)$。因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1) \subseteq [1, +\infty)$。得证。

类似于定理 1.2.1，集族具有下面的性质。

定理 1.2.3 设 X 是一个给定的集合，$A \subseteq X$，$B \subseteq X$，$A_\gamma \subseteq X$，$\forall \gamma \in \Gamma$。

(1) 分配律：$A \cap (\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A \cap A_\gamma)$，$A \cup (\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (A \cup A_\gamma)$。

(2) De Morgan 公式：$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$，$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma)^c = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma^c$。

定义 1.2.4 设 A 和 B 是两个集合。集合$\{(x, y): x \in A$ 且 $y \in B\}$ 称为 A 与 B 的直积或笛卡尔积(cartesian product)，记作 $A\times B$，读作 A 叉 B，其中(x, y)称为一个有序对。

类似地，设$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是一个集族。集合$\{(a_1, a_2, \cdots, a_n): a_k \in A_k, 1\leqslant k\leqslant n\}$称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的直积，记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 或者 $\prod_{k=1}^{n} A_k$。

特别地，如果 $A_k = X$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则记 $\prod_{k=1}^{n} A_k$ 为 X^n，称它为 X 的 n 重积。

注：$\mathbf{R}$ 表示一维实直线。$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示二维平面。$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示三维空间。

定理 1.2.4 设 X 和 Y 是给定的集合，$A_1, A_2 \subseteq X$，$B_1, B_2 \subseteq Y$，则

(1) $(A_1 \cap A_2)\times(B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$。

(2) $(A_1 \cup A_2)\times(B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$。

证明：(1) $(A_1 \cap A_2)\times(B_1 \cap B_2) = \{(x, y): x \in A_1 \cap A_2$ 且 $y \in B_1 \cap B_2\}$