TJ11 48109

高等数学学习方法指导书

(修订版)

上 册

同济大学数学教研组 编

人民教育出版社

本书是根据我社出版的樊映川等编“高等数学讲义”(第一版，即1958年版)编写的. 采用本指导书时必须采用上述高等数学讲义作为课本方能配合. 本书可作为高等工业学校函授学生学习高等数学的教材，也可作为已修完高中数学课程的读者自学高等数学之用.

本书分上、下两册. 上册包括一般学习方法指导，各章学习方法指导、习题、习题答案及测验作业题. 下册是根据同济大学函授生学习高等数学时所提出的问题加以整理编写的，可解决学习上某些疑难题，也可作为体会教材的参考资料.

本版是修订版，由同济大学王福楹同志修订.

在修订本书时，考虑到许多高等工业学校函授生及业余自学读者学习樊映川等编“高等数学讲义”(第二版，即1964年版)的需要，我社编辑特在书末附加了二个对照表(樊映川等编“高等数学讲义”1958年与1964年版目次对照表及对照表Ⅰ)，供学习第二版的读者参考使用.

高等数学学习方法指导书

(修订版)

上　册

同济大学数学教研组 编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 8.125　字数 195,000

1959年8月第1版

1981年10月第2版　1982年4月第6次印刷

印数 130,001—282,000

书号 13012·0678　定价 0.74元

目　次

第二篇 数学分析(续)

一 绪 言

高等数学在高等工业学校各专业的教学计划中是一门属于理论性的基础课程．在培养专业工程师的过程中，高等数学起着奠基的作用．

学生修完本课程后所获得的数学知识在他以后的学习中起着重要的作用．这些知识对同学顺利地学习其他理论课(如物理，理论力学等)及专业课都是必需的．

在现代，数学方法被广泛地运用来解决各式各样的技术问题．因此学生应当预见到，毕业后他在业务工作中必定要屡次应用到自己的数学知识．

数学课程还要培养学生牢固的逻辑思维的习惯，这对每一个工程师都是很必要的．

因此，只有有了数学基础，才有可能成为具有创造能力的专业工程师．

二 一般学习方法指导

在每一章学习开始时，学生先看本指导书中关于各章的头一段指导．这一段指出应按怎样的程序来学习这一章；应该先看讲义中那几节教材，在什么时候看那几段指导，配合着做那些习题等等．学生必须完全依照这程序来学习．

1．阅读讲义

1．应当仔细阅读讲义．必须先对前面的内容获得了正确的了解后再继续前进．在纸上作出全部计算（也包括那些因简单而在讲义中略去的在内）．复制教科书中所有的图．

2．应特别注意基本概念的定义．所有这些概念反映着现实世界的数量关系或空间形式的性质．应该对这些概念有清楚的了解，否则不可能学好数学．

要仔细思考讲义中对某些定义所举的例子，并应自己设法举出类似的例子来．

3．在阅读教材的同时作笔记——摘要——是很有益的．后面还要向学生介绍一些作摘记的方法．

4．应该记住每一个定理是由假设、结论与证明所组成的．所有的假设在证明中都必需利用到．要能准确地指出定理中每一项假设在证明中的什么地方被利用到．作复杂定理的证明的概要是有益的．

2．习　题

1．阅读教材后应配合着指导书所指定的习题．作习题前应

对讲义中及本指导书中所举的例题能彻底理解.

2. 作习题时要从教材的理论原理出发. 应该注意解题的每一步的根据，这些根据必须是学生确切知道它是正确的.

如果对于同一习题学生知道几种不同的解法，则应选择最恰当的解法.

在计算开始前为自己拟一个简短的解题计划是有好处的，这一点对比较复杂的习题更加需要.

3. 应该详细地，毫无遗漏地，不在零散的纸上而在习题本上作所有的习题. 计算要安排得很有次序，因此建议把辅助计算从主要计算中分开来. 写错时不要擦去或贴盖，只要勾去.

可以徒手画图，但应按已给条件来画并应整洁. 如果要求画特别准确的图，例如要用图来检验由计算所得的结果时，那么就要用直尺、量角器、曲线板并注出比例尺.

4. 每道习题应进行到做出所要求的最终的答案. 如果答案可以化简时应化为最简的形式. 在解题过程中不应引入 π 等等的近似值，以免繁复的数字运算，这些值只应在指定要求近似解时，到最后一步才把它引入.

5. 做习题时不要先看答案. 应作出最后结果后再对照答案. 如果自己作出的结果与本指导书所给的答案不同，必须仔细检查出发生差异的原因.

6. 如果没有得到抽查的通知，习题本不必寄到学校里去.

3. 笔　记

1. 学生的笔记本——摘要——对学生的独立工作有很大意义. 建议在第一遍阅读教材时在笔记本中记下定义、定理的表述、定理的证明、公式和例题的解答.

在笔记本的边上空白处标出要书面或口头向教师提出的

问题.

2. 书写的修饰工作有很重要的意义. 笔记本的书写必须清楚、整洁并有条理. 这不仅使学生习惯于有秩序地工作(这对任何工作都是很必需的)并且还可使得避免许多错误,这些错误都是由于潦草紊乱的书写而发生的.

3. 建议作笔记时,在以公式的形式所得的结论下打上重点记号或画上一小框,以便在复习时能一望而知,且能更好地记住这些公式.

4. 自我检查题

在学习了教材和作了习题以后, 应该在习题本上回答本指导书中所列的自我检查题.

解答时应说明理由,但语言应尽可能扼要与具体.

自我检查题的答案不必寄到学校里去.

如果对自己的答案有怀疑时,应向教师提出请求解答.

5. 测验作业

1. 在没有做完本指导书中所规定的(在该次测验作业之前应完成的)习题之前不应动手做测验作业.

2. 做测验作业前学生应在本指导书外所发的测验作业编号表中(自学的读者可按测验作业题前的附表来做测验作业), 查出自己必须做的测验题的号数, 自己不得变更. 作解答时应把这号数写上,并且要按号数的顺序排列,不要颠倒次序. 每道题前应完全地写出它的条件.

测验作业的解答应叙述得详细、干净. 必要时应附注所根据的理由. 图可以徒手画.

3. 测验作业如果作得潦草,缺中间的计算以及不遵守规定来

做，就要发回重做.

4. 评阅通过的测验作业学生应把它保存着.

学生应非常注意教师的评语. 对教师所指出的错误学生应立刻加以改正.

如果教师指定重作或修改这个或那个测验作业，或指定要一份更详细的解答时，学生应在短期中完成它，然后连同原来的一份一并寄去.

5. 每次测验作业应按规定日期完成后寄给教师批阅.

三　各章学习方法指导

高等数学绪论

读讲义中高等数学绪论.

第一篇　解析几何

解析几何创立于十七世纪. 这是直到那时为止人类所做的一切经历中最伟大的、进步的变革完成的时期. 恩格斯在他的"自然辩证法"(1948 年版 5—6 页)一书中这样描写这个历史时期:

"旧的'世界'的界限被打破了; 只是这时候才真正发现了地球, 奠定了以后的世界贸易以及从手工业过渡到工场手工业之基础, 而工场手工业又是近代大工业的出发点. 教会的精神独裁被击破了; ……一种从阿拉伯人吸收来的和从新发现的希腊哲学那里得到营养的明快的自由思想愈来愈根深蒂固, 为十八世纪的唯物论作了准备".

生产力的发展引起了科学的蓬勃进步. 新科学的创立又促进了此后人们生产技术的改善.

在同一书中(见 7 页), 对于当时科学发展的这个最初阶段恩格斯这样说:

"在大多数部门中必须完全从头做起. 古代留传下欧几里德几何学和托莱米太阳系, 阿拉伯人留传下十进位概念、代数学的开

始，近代数字和炼金术；基督教的中世纪则一无所遗．在这个情况下，占首要地位的必然是最基本的自然科学，即关于地球上的物体和天体的力学，与之并立而为之服务的是数学方法的发现和完成．这里有了许多伟大的成就”．恩格斯认为，由笛卡儿所创立的新的数学方法——解析几何的方法，也属于这些“伟大的成就”．

解析几何的创立使几何图形的探讨、曲线及曲面的研究，得以大大地往前推进，对实际应用是重要的．

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

先读§§1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 然后读学习方法指导1，并做习题№№1.1.1—1.1.8．

再读§§1.7, 1.8 及学习方法指导 2，例题 1, 2，然后做习题№№1.1.9—1.1.13．

§1.9 删去．

再读§§1.10, 1.11, 1.12, 1.13 并做习题№№1.1.14—1.1.19．

最后回答自我检查题．

学习方法指导

1．在解析几何学方面着手工作时，学生首先必须学会：

(a) 能按给定的点的坐标描点；

(b) 如果平面上点的位置已知，能确定该点的坐标；

(c) 会利用本章公式来解有关的问题．

2．解析几何中问题的解决，照例必须用代数方法，因此图形

以及几何作法在这里只能作为辅助工具.

几何问题，以前往往按其本身特性用各种不同方法来解决的，这里获得了统一的，在许多情况下并且是比较简单的解决方法.

例　　题

例 1. 已知 $A(1,\ -2)$ 及 $B(4,\ -4)$ 两点；求点 M 的坐标，它分线段 $\overline{AB}$ 成比 3:4.

解. 应用公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1}$$

这里　$x_1=1,\ x_2=4,\ y_1=-2,\ y_2=-4,\ \lambda=\frac{3}{4}$.

因此，

$$x=\frac{1+\frac{3}{4}\cdot 4}{1+\frac{3}{4}}=2\frac{2}{7},\quad y=\frac{-2+\frac{3}{4}(-4)}{1+\frac{3}{4}}=-2\frac{6}{7}.$$

于是，我们求得点 $M\left(2\frac{2}{7},\ -2\frac{6}{7}\right)$.

注意：必须注意到下列两点：

(a) 点 M 是直接用公式 (1) 求得的而无需标出线段 $\overline{AM}$ 及 $\overline{MB}$ 之长.

(b) 这里点 A, B 的次序起着作用的. 如果在此题中把点 B 作为第一点而点 A 作为第二点，那末将有：

$$x=\frac{4+\frac{3}{4}\cdot 1}{1+\frac{3}{4}}=2\frac{5}{7},\ y=\frac{-4+\frac{3}{4}(-2)}{1+\frac{3}{4}}=-3\frac{1}{7},$$

而求得了另外一点 $M\left(2\frac{5}{7},\ -3\frac{1}{7}\right)$，这是不合原题的.

例 2. 一点与 x 轴及点 $A(-5,\ 2)$的距离均为 10 个单位长度，求该点。

解. (a) 设所求之点为 $B(x,\ y)$①. 此时点 B 与 x 轴的距离 $|BC|=\pm y=10$(见图 1).

(b) 距离

$$|AB|=\sqrt{(x+5)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(\pm 10-2)^2}.$$

(c) 由条件 $|AB|=|BC|$，即得

$$(x+5)^2+8^2=100,$$

或是

$$(x+5)^2+12^2=100.$$

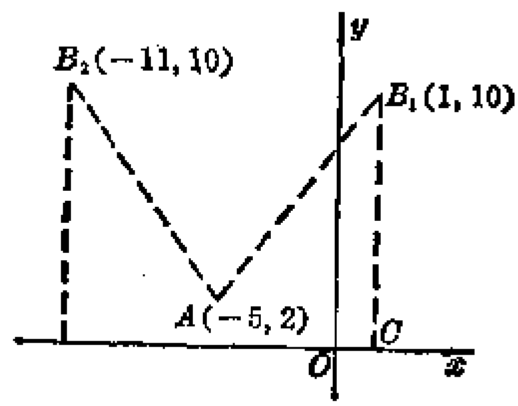

图 1

第二个方程没有实数根。

由第一个方程我们有：

$$x^2+10x-11=0,\ x_1=1,\ x_2=-11.$$

于是，问题有两个答案：

$$B_1(1,\ 10),\ B_2(-11,\ 10).$$

自我检查题

1. 将坐标原点沿 x 轴的正向移动一段距离 a(轴的方向不变)，问坐标变换公式将有怎样的形式？

2. 如果将旧的纵轴作为新的横轴，且新原点在旧系下的坐标为$(0,\ 2)$，问坐标变换公式将有怎样的形式？

3. 两点间的距离公式具有怎样的形式，如果：

(a) 两点的横标相同，但纵标不同？

---

① 一般说来，点 B 可以有正的或负的纵标，在解题的过程中我们求得 B 点的纵标为正。我们的图就是按这个情形来画的。

(b) 两点的纵标相同，但横标不同？

4. 对称于 y 轴的两点的笛卡儿坐标彼此用什么来区别？

第二章 直 线

先读§§2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6，然后读学习方法指导 1, 2, 3 及例题 1, 2 并做习题 №№1.2.1—1.2.8.

再读§§2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 及例题 3 并做习题 №№1.2.9—1.2.20.

§2.12 删去.

最后回答自我检查题.

学习方法指导

1. 在笛卡儿坐标系中，任一直线均可用直线上任意点的坐标 x, y 的一次方程来表示.

反之，任一 x, y 的一次方程（系数不全为零）在笛卡儿坐标系中表示某一直线.

在别的坐标系中，例如在第四章极坐标系中我们就可以看到，直线不一定可用一次方程来表示，而一次方程也不一定表示直线.

2. 学生应当会将直线的一般方程 $Ax+By+C=0$ 化为斜截式，截距式，法线式，并且会由这些方程来作直线（法线式将在§2.7 讨论）.

学生应当记住，在给定的坐标系中并不是任何一条直线都可以表示成直线方程的这种或那种形式的．例如，通过坐标原点或平行某一坐标轴的直线是不能表示成截距式方程的；平行于纵轴

的直线是不能表示成斜截式方程的．但任何直线总可以用法线式方程来表示．

3．按直线的方程来研究直线的这种方法使学生初次认识到解析几何学的特色．当过渡到研究曲线的时候，这方法的很多方面仍旧可以保留下来．例如，建立直线方程的原理就和建立曲线方程的一样．建立直线方程时规定，一点要属于直线，这点的坐标必须满足直线方程(使这方程变成恒等式)．因此，如果某点的坐标不满足直线方程，则该点不在直线上．反之，如果某点的坐标满足直线方程，则该点一定在直线上．

例如，点(2, 1)在直线 $2x+y-5=0$ 上(因为 $2\cdot2+1\cdot1-5=0$)，但点(3, 1)不在这直线上(因为 $2\cdot3+1\cdot1-5\neq0$)．正像这样可以借助一些计算来识别点(2, 1)是否在曲线 $x^2-y^2=1$ 上，点(3, 1)是否在曲线 $2x^3-3y^4-51=0$ 上(建议学生自己去做)．

两直线或两曲线的交点就是应用上述原理来求的．因为交点的坐标必须使两方程同时成为恒等式，因此可以由两方程联立后所求出的公共解来确定．

例 题

例1．利用直线 $3x-5y-15=0$ 的截距式方程描此直线．

解．(a) 求出已知直线的截距式方程．它具有形式：

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1.$$

因此，$a=5,\ b=-3$.

(b) 在 x 轴的正方向截 5 个单位长度得到点 A．在 y 轴的负方向截 3 个单位长度得到点 B．

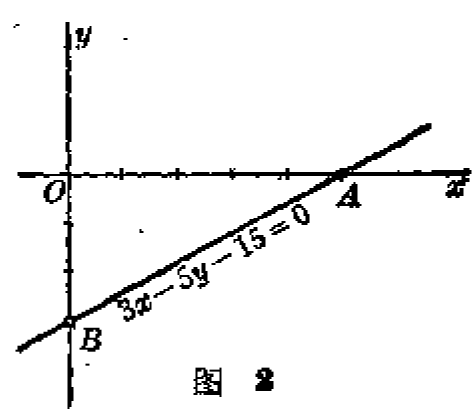

图 2

(c) 联结 A, B 两点得所求直线 (图 2)．

例 2. 利用直线 $4x+3y-6=0$ 的斜截式方程描此直线.

解. (a) 将已知直线方程化为斜截式 $y=-\frac{4}{3}x+2$.

(b) 在 y 轴正向截 2 单位长度, 我们得到已知直线所通过的点 A.

(c) 现在应当作出正切等于 $-\frac{4}{3}$ 的角. 为此, 过点 A 引平行于 x 轴的直线, 并从点 A 开始向左在这直线上截 3 单位长度得到点 B. 然后过点 B 引平行于 y 轴的直线, 并从点 B 开始向上在这直线上截 4 单位长度得到点 M.

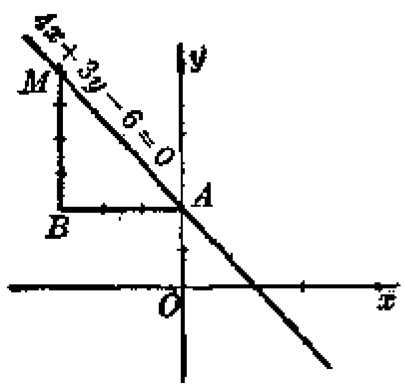

图 3

(d) 联结点 A 及 M, 得所求直线. 因为所作出的直线对于 x 轴的倾角的正切等于 $-\frac{4}{3}$ 而它在纵轴上的截距为 2.

例 3. 利用直线 $3x-4y+15=0$ 的法线式方程作此直线.

解. 化已知直线方程为法线式:

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-3=0.$$

为了解决所给的问题, 首先必须作 x 轴正向与自原点到直线的垂线间的角 α.

由所给直线的法线式方程可见, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. 余弦及正弦的符号指明, 角 α 的终线在第二象限. 这角的正切是 $-\frac{4}{3}$, 用正切来作角比较方便. 在 x 轴的负向截取 3 单位长度, 我们得到点 A. 过点 A 引平行于 y 轴的直线. 在此直线上从点 A 起向上截取 4 单位长度得到点 B. 联结坐标原点与点 B 得垂线的方向.

在半直线 OB 上截取 3 单位长度(因为对已知直线 $p=3$). 我们得到点 P, 它是在所求直线上的.

过点 P 引直线垂直于直线 OB. 所得直线就是所要求出的.

注意: 上面的叙述并不意味着, 按直线的截距式、斜截式和法线式方程来作直线的方法是同样方便的, 不过为了理解这三种形式的直线方程的实际意义, 学生应当知道这些方法.

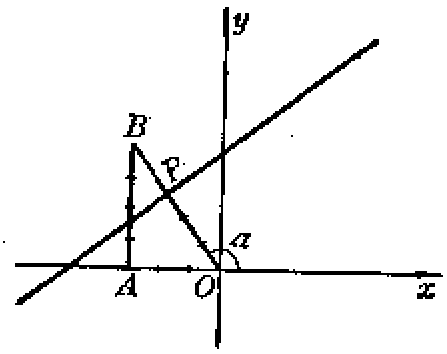

图 4

通常根据截距式方程来作直线较为简单. 因此只要这种作法可能, 就应利用这种作法.

自我检查题

1. 数 m, n, l 应满足什么条件, 方程 $mx+ny+l=0$ 才是直线的法线式方程?

2. 如何求两平行直线间的距离?(应分别考虑两种情况: 坐标原点在两直线之间或不在其间).

3. 直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 穿过哪一象限, 如果 $1°\ a>0,\ b>0$; $2°\ a<0,\ b>0$; $3°\ a<0,\ b<0$; $4°\ a>0,\ b<0$?

4. 直线 $y=kx+b$ 穿过哪一象限, 如果 $1°\ k>0,\ b>0$; $2°\ k>0,\ b<0$; $3°\ k<0,\ b>0$; $4°\ k<0,\ b<0$?

5. 如何证实给定点在已知直线上?

第三章 二 次 曲 线

先读 §§3.1, 3.2, 3.3, 3.4 并做习题 №№1.3.1—1.3.5.

再读 §§3.5, 3.6, 3.7 并做习题№№1.3.6—1.3.9.