运筹学丛书

图与网络流理论

田　丰　马仲蕃　编著

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书系统介绍了图与网络流理论的基本概念、基本算法、基本定理及某些应用．本书论述严谨、深入浅出，并有大量例题；每章末附有典型练习题，有助于读者深入理解本书的内容．对于学习和研究图论的读者来说，本书是一本比较理想的入门书．

本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生的教学参考书，也可供从事图论、系统工程、管理等专业方面的研究人员和工程技术人员参考．

运筹学丛书

图与网络流理论

田 丰 马仲蕃 编著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 9 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1987 年 9 月第一次印刷　　印张：8 3/4

印数：0001— 5,800　　字数：226,000

统一书号：13031・3656

本社书号：5348・13—1

定价：2.50 元

《运筹学丛书》编委会

主编：越民义

编委：（按姓氏笔划为序）

马仲蕃	许国志	吴　方
郑　权	俞文鮆	徐利治
徐光辉	管梅谷	韩继业

《运筹学丛书》已出版的图书目录：

1. 曹晋华　程　侃　可靠性数学引论
2. 田　丰　马仲蕃　图与网络流理论

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　　言

图论是近年来较活跃的数学分支之一．它的二百多年的发展历史，大体上可以划分为三个阶段．第一阶段是从十八世纪中叶到十九世纪中叶．这时的图论处于萌芽的阶段，多数问题是围绕着游戏而产生的，最有代表性的工作是所谓 Euler 七桥问题，即我国的一笔画问题(第五章)．第二阶段是从十九世纪中叶到二十世纪中叶．这个时期中，图论问题大量出现，诸如 Hamilton 问题（第五章），关于地图染色的四色问题（第七章）以及与之有联系的图的可平面性问题等．在这个阶段，也出现了以图为工具去解决其它领域中一些问题的成果． 特别应该提到的是 Cayley 把树应用于化学领域，Kirchhoff 用树去研究电网络的分析问题． 1936 年，König 写出了图论的第一本专著[1]． 二十世纪中叶以后是第三阶段．由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络等方面提出的实际问题的需要，特别是许多离散性问题的出现，以及由于有了大型电子计算机，而使大规模问题的求解成为可能，图论及其应用的研究得到了飞速的发展．这个阶段的开创性工作是以 Ford 和 Fulkerson 建立的网络流理论(第九章，第十章)为代表的． 图论和线性规划、动态规划等优化理论和方法的相互渗透，促进了组合最优化等理论和算法的研究以及图论对实际问题的应用，与此同时，也丰富了图论的内容．这些，都使图论的发展更加充满活力．图论的发展历史，充分说明了科学理论和实际应用之间的依赖关系．

本书是在作者编写的讲义的基础上修订而成的．我们希望本书能作为一本图论与网络流理论方面的入门书．由于图与网络流理论是结构性、应用性较强的学科，我们在介绍基本概念和基本理论的同时，适当地介绍了一些与图论、网络流理论相联系的基本算法．对某些理论性的结果，一方面尽可能地采用“构造性方法”

去论证;另一方面，为了使读者能对图论的方法、技巧有全面的了解，也同时给出一些非构造性的证明，特别是一些较为简洁、技巧性较强的证明．在某些章节中，我们介绍了一些较新的成果，但由于本书是一本入门书，从总体上看，我们没有涉及更多的较为深入的问题及其进展，如图的重构问题、图的计数问题、图的拓扑嵌入问题、图的因子分解问题、算法复杂性分析等等．读者可进一步参考专题研究的有关文献．本书在介绍与图有关的算法时，多数是采用描述的方式，而没有列出具体的算法步骤．因为理解方法的思路要比能按步骤进行计算更为重要．我们希望读者在熟悉了方法的实质的基础上，不仅能够掌握这些基本算法，而且，在运用于实际问题时，能够针对具体问题提出适当的解决办法．对解决实际问题，一成不变地照搬现成模型和算法的情况是很少有的，这些是我们编写这本书的基本想法．这些想法是否恰当，以及本书内容安排、叙述方式是否与这些想法吻合，我们真诚地期待着读者们的评论．

在每章的后面，我们安排了少量的习题，其中，列出人名的题目是有一定难度的．列出这些难度较大的题目，对于希望深入研究一些问题的读者来说，可能是有好处的．关于图论及其应用和它的一些主要专题的进展，读者可参阅文献[2]—[8]．

在本书的编写过程中，长沙铁道学院的李慰萱教授、中国科学院系统科学研究所的蔡茂诚副研究员给了我们热情的鼓励和具体的帮助，在此，我们表示深切的谢意．

作　　者

1985年12月

目　　录

第一章　图的基本概念

§1.1　图 与 子 图

现实生活中，经常会遇到涉及某些研究对象之间具有某种特定关系的问题．如一个国家或地区内，城市之间有或没有交通线，有或没有通讯线；一次球类比赛中，两个球队比赛过或者没有比赛过等等．这些关系是对称的，即对象甲对对象乙有某种关系，也意味着对象乙对对象甲有这种关系．对象之间的关系可以用一个图形来描述．我们用点来表示对象，若对象甲和对象乙之间有我们所要研究的关系，那么就在代表对象甲和乙的两个点之间联一条线．因为我们感兴趣的是对象之间是否有某种特定关系，所以，两点之间有无联线是重要的，而联线的长短曲直则是无关紧要的．由此抽象产生了图的概念．因此，我们可以说，图是描述某些对象之间某种特定关系的工具．

所谓一个图（也称作无向图）是指给了一个集合 V，以及 V 中不同元素的无序对的集合 E．V 和 E 中的元素分别称为图的点和边．若图用 G 表示，则它的点集和边集就分别记为 $V(G)$，$E(G)$．可以记 $G=(V(G), E(G))$．一个图可以用图形来表示，用点表示 V 中的元素，用点与点之间的联线表示 E 中的元素．如果 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$，那么无序对 $e=\{v_i, v_j\}$ 就记为 v_iv_j（或 v_jv_i）．以后，当我们说点 $v\in G$ 时，就意味着 $v\in V(G)$，类似地，说边 $e\in G$ 时，就是指 $e\in E(G)$．

例　在图 1.1 所示的图 G 中，$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$，$E(G)=\{v_1v_2, v_3v_2, v_3v_5, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_4v_6, v_2v_5\}$．

记 $p(G)=|V(G)|$，$q(G)=|E(G)|$，分别是图 G 的点数和边数（点数 $p(G)$ 也称为 G 的阶）．本书仅讨论有限阶图．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

今后,在不会引起混淆的情况下,凡是涉及到图 G 的参数的记号,往往省去记号中的 G. 例如以 p, q 分别表示 $p(G)$, $q(G)$.

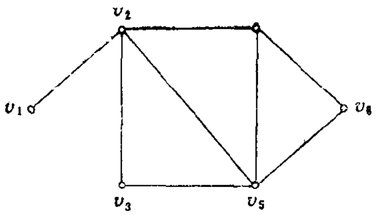

图 1.1

如果 $v_iv_j \in E$,我们称点 v_i 与 v_j 是相邻的, 称点 v_i, v_j 是边 v_iv_j 的端点, 也称边 v_iv_j 是点 v_i (或 v_j) 的关联边. 两条边 e_i, $e_j \in E$ 称为相邻的,如果它们有一个公共端点.

在上面定义的图中不含环(即两端点重合的"边"),也不含多重边(即联结两点的多于一条的"边"). 有时,我们称这样的图为简单图. 如果图中允许有多重边(即 E 是 V 中不同元素的无序对的总体), 我们称之为多重图. 如果允许有环和多重边 (即 E 是 V 中元素的无序对的总体), 则称为伪图. 以后,在没有特别交代情况下,我们说到图,均指简单图.

记 $N_G(v)=\{u|uv \in E(G)\}$,称之为点 v 在 G 中的邻域. $\bar{N}_G(v)=N_G(v)\cup\{v\}$ 称为点 v 的闭邻域. 若 S 是 V 的子集,记 $N_G(S)=\bigcup\limits_{v\in S} N_G(v)$,称为 S 的邻域.

图 G 中,以点 v 为端点的边的数目称为点 v 在 G 中的次,记为 $d_G(v)$ (或 $d(v)$). (对伪图, 每个环在计算次时,算作两条边.) 若 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$,则相应地得到一个序列 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_p))$, 称为图 G 的次序列. 易见, 对给定的图及其点的给定编号,次序列是唯一确定的. 给定一个非负整数的序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, 若存在以 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 为点集的 p 阶图 G, 使对每个 $i(1\leqslant i\leqslant p)$ 有 $d(v_i)=d_i$,则称序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_p)$ 是图的次序列,或称为是可实现的.

Erdös, Gallai(1960)[9] 证明了非负整数序列, $d=(d_1, d_2, \cdots, d_p)$, $\left(d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_p, \sum\limits_{i=1}^{p} d_i\equiv 0(\bmod 2)\right)$是可实现的充分必要条件是对每个 $k(1\leqslant k\leqslant p-1)$,

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{p} \min\{k, d_i\}$$

若 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_p))$ 是 G 的次序列，不难证明：$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q$. 我们把次为奇数的点称为奇点，否则称为偶点. 易见，奇点的个数必是偶数.

称 $\min_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$ 为 G 的最小次，称 $\max_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$ 为最大次，分别记为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$. 次为 1 的点称为悬挂点，悬挂点的关联边称为悬挂边. 次为零的点称为孤立点.

给定图 $G=(V, E)$. 若 $V' \subseteq V$, $E' = \{uv \in E | u, v \in V'\}$，则称图 $G' = (V', E')$ 是 G 中由 V' 生成的子图，记 G' 为 $G[V']$. 若 $V' \subset V$，则称 $G[V']$ 是由 V' 生成的真子图. 若 $G' = (V', E')$ 是由 V' 生成的子图，$E'' \subseteq E'$，则称 $G'' = (V', E'')$ 是 G 的子图. 特别地，若 $V' = V$，则称 $G'' = (V, E'')$ 是 G 的支撑子图.

若 $E' \subseteq E$, $V' = \{v \in V | v$ 是 E' 中某边的端点$\}$，则称 $G' = (V', E')$ 是 G 中由 E' 生成的子图，记为 $G[E']$. 此外，我们称 (V, E') 为由 E' 生成的支撑子图.

例 图 1.2 中，G_1 是图 1.1 所示图的子图；G_2 是由 $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ 生成的子图；G_3 是由 $\{v_3v_5, v_5v_6, v_6v_4\}$ 生成的子图.

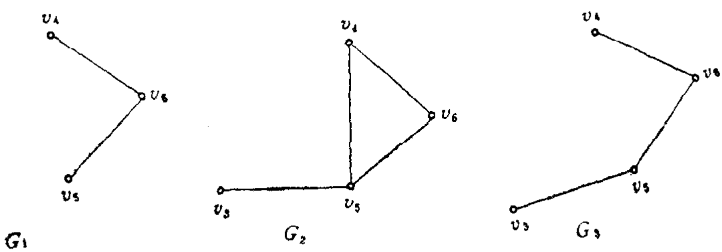

图 1.2

除特别声明外，我们说到生成子图，是指由点集生成的子图.

设 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ 是 G 的两个子图，若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，则称 G_1, G_2 是点不交的；若 $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$，则称 G_1, G_2 是

边不交的.

§1.2 链、圈和连通分图

设 $G=(V,E)$ 是给定的图，若 G 的某些点、边可以排成如下的交错序列 $(v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \cdots, v_{i_k}, e_{i_k}, v_{i_{k+1}})$，使边 $e_{i_t}=v_{i_t}v_{i_{t+1}}(t=1,2,\cdots,k)$，则称之为联结 v_{i_1} 和 $v_{i_{k+1}}$ 的一条链，简称为 $(v_{i_1}-v_{i_k})$ 链，点 v_{i_1}，$v_{i_{k+1}}$ 称为这条链的端点. 我们把这条链记为 $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_{k+1}}$.

若链中的点都是不同的，则称为初等链. 若一条链中，边是不同的(点可能相同)，则称为简单链.

设 $\mu=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}$ 是图 G 中的一条 $(v_{i_1}-v_{i_k})$ 链. 为方便计，我们记 μ 上联结 v_{i_s} 和 v_{i_t} 的一段链为 $v_{i_s}\overset{\mu}{-}v_{i_t}$.

定义链的长度(简称链长)为它所包含的边的数目. 若链 μ 的长度为 k，则称 μ 是一条 k 链. 若 μ 是一条长度最小的 (v_i-v_j) 链，则称 μ 的长度为点 v_i 和 v_j 的距离，记为 $d_G(v_i,v_j)$ (或 $d(v_i,v_j)$) (若不存在 (v_i-v_j) 链，则令 $d(v_i,v_j)=+\infty$).

定义图 G 的直径 diam(G) 为

$$\mathrm{diam}(G)=\max\{d(u,v)\,|\,u,v\in V(G)\}$$

设 μ_1, μ_2 是 G 中的两条链，若除端点外，没有公共点，则称它们是内部点不交的. 至于所谓点不交的，或边不交的，可以按上节关于点不交或边不交子图的叙述去定义，因为我们可以把链看作是图的子图. 对于 k 条链，所谓它们是点不交的(边不交的、或内部点不交的)，则是指其中任意两条链都是点不交的(相应地，边不交或内部点不交).

若点、边交错序列 $(v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}, v_{i_{k+1}})$ 中，边 $e_{i_t}=v_{i_t}v_{i_{t+1}}(t=1,2,\cdots,k)$，并且 $v_{i_1}=v_{i_{k+1}}$，则称之为一个圈，记为 $v_{i_1}v_{i2}\cdots v_{i_k}v_{i_1}$.

如果圈 $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}v_{i_1}$ 中，点 v_{i_1}, v_{i_2}, $\cdots$, v_{i_k} 都是不同的，则称之为初等圈；若圈中，边都是不同的，则称为简单圈.

以后我们说到链或圈、除非特别交代，均指初等链或初等圈.

类似于链的情况，定义圈的长度（简称圈长）为它所包含的边数. 长度为 k 的圈也简称为 k 圈. 当 k 为奇数时，称 k 圈为奇圈，否则称为偶圈. G 中长度最大的圈称为 G 的最长圈，最长圈的长度称为 G 的周长，记为 $c(G)$. 长度最小的圈的长度称为 G 的围长，记为 $g(G)$. 当 G 不含圈时，令 $c(G)=g(G)=+\infty$.

设 μ 是 G 的一个圈，$e\in E(G)\backslash E(\mu)$，$e$ 的两个端点在 μ 上，则称边 e 是圈 μ 的一条弦.

定理 1.1 若图 G 中，$\delta(G)=k\geqslant 2$，则 G 包含长度至少为 $k+1$ 的圈.

证明 设 $\mu=v_1v_2\cdots v_n$ 是 G 中的一条最长链，则 $N_G(v_1)\subseteq V(\mu)$.

令 $j=\max\{i\mid 2\leqslant i\leqslant n,\ v_i\in N_G(v_1)\}$，因 $\delta(G)=k\geqslant 2$，故 $j\geqslant k+1\geqslant 3$，于是 $v_1v_2\cdots v_jv_1$ 是长度至少为 $k+1$ 的圈. 证毕.

要指出的是，在本定理的证明中，我们选取的链是最长链μ(显然，μ 总是存在的)，利用 μ 的最长性，可以使证明较为简洁. 以后我们将看到，在许多证明中都使用了这种所谓“极大性原则”（或“极小性原则”)的技巧.

任给一个图 $G=(V,E)$，利用链的存在来建立点之间的等价关系. 对 $v_i,v_j\in V$，若 G 中存在 (v_i-v_j) 链则称 v_i 与 v_j 等价. 易见，这个等价关系满足自反性、对称性和传递性，于是 V 可剖分为若干个等价类 $V_1,V_2,\cdots,V_k$. 我们称每个生成子图 $G[V_i]$ 为 G 的一个连通分图（简称分图). 以 $k(G)$ 表示图 G 的连通分图个数. 点数为奇数(偶数)的分图称奇分图(相应地，偶分图).

对一个图 G，若 $k(G)=1$，则称 G 是连通图.

§1.3 图的运算

设 $G=(V,E)$ 是给定的一个图，若 $E'\subseteq E$，我们以 $G-E'$

表示从图G中丢去E'中所有边得到的图，即$G-E'=(V,E\setminus E')$. 因此$G-E'$是G的支撑子图. 若$V'\subseteq V$，以$G-V'$表示从G中丢去V'中的点及与V'中的点关联的所有边得到的图. 即: $G-V'=G[V\setminus V']$. 当$E'=\{e\}$或$V'=\{v\}$时，我们用$G-e$和$G-v$分别记$G-\{e\}$和$G-\{v\}$. 若u, v是G中一对不相邻点，即$uv\notin E(G)$，我们以$G+uv$记图$(V, E\cup\{uv\})$.

设$V'\subseteq V$，所谓在G中收缩V'是指在图$G-E(G[V'])$中，把V'中的点重合为一个点（为了方便起见，有时称之为伪点），G中与V'的点相关联的边变为与这个新点相关联的边. 称这样得到的图为关于V'的收缩图. 记为$G\circ V'$. 以后，当我们说在G中收缩子图G'时，就意味着在G中收缩$V(G')$. 例如在G中收缩边uv，就是指在G中收缩$\{u, v\}$，也记所得的图为$G\circ uv$.

一般说来，收缩图是多重图.

图 1.3 列出了图 1.1 所示的图 G 中，收缩V'的例子，这里$G_1=G\circ\{v_4, v_5, v_6\}$, $G_2=G\circ\{v_2, v_3, v_4\}$.

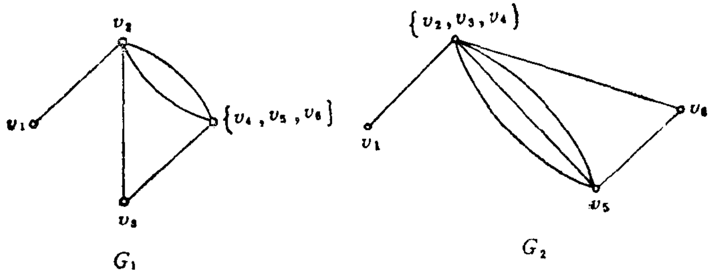

图 1.3

设$G=(V, E)$是一个图，构造另一个以V为点集的图(V, E')，这里$uv\in E'$当且仅当$uv\notin E$. 称这个图为图G的补图，记为G^c.

设$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$是两个点不交的图，定义$G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$. 称$G_1\cup G_2$为$G_1$与$G_2$的并.

$G_1+G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2\cup E_3)$，这里$E_3=\{uv|u\in V_1, v\in V_2\}$.

设 G_1, G_2 是两个 p 阶图，若 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 之间存在一一对应关系，使对 G_1 中任一对点，它们在 G_1 中相邻当且仅当它们的对应点在 G_2 中相邻，我们说 G_1 和 G_2 是同构的，记为 $G_1 \cong G_2$.

例 图 1.4 所示的两个图是同构的．因为在一一对应关系：$v_1 \longleftrightarrow u_1$, $v_2 \longleftrightarrow u_3$, $v_3 \longleftrightarrow u_6$, $v_4 \longleftrightarrow u_2$, $v_5 \longleftrightarrow u_4$, $v_6 \longleftrightarrow u_5$ 之下，相邻关系保持不变，如 $v_1v_4 \in E(G_1)$, $u_1u_2 \in E(G_2)$; $v_1v_2 \notin E(G_1)$, $u_1u_3 \notin E(G_2)$ 等等.

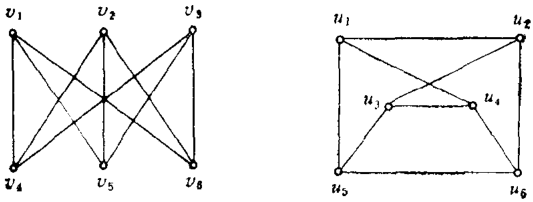

图 1.4

Ulam 提出一个猜想：

重构猜想 (Ulam, 1929)[10] 令 G 有 p 个点 v_i, H 有 p 个点 $u_i(i = 1, 2, \cdots, p; p \geqslant 3)$. 若对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant p)$,

$$G - v_i \cong H - u_i$$

则 $G \cong H$.

迄今为止，这个猜想既未被否定，也未被完全证明．它是图论中尚未解决的有名难题之一．关于这个猜想的进展，读者可参考 [11]—[14].

作为本节的结束，下面给出边图和细分图的定义.

设 $G = (V, E)$ 是给定的一个图，从 G 构造另一个图 $L(G)$: 对 G 中的每一边 e_j, $L(G)$ 中有一个点 u_j. 点 u_i 与 u_j 在 $L(G)$ 中相邻，当且仅当相应的 e_i 和 e_j 在 G 中相邻．称 $L(G)$ 为图 G 的边图.

例 图 1.5 是图 G 和它的边图 $L(G)$ 的一个例子.

给定图 $G = (V, E)$, e 是 G 的某一边．我们在 $G - uv$ 中增加一个新点 w, 及边 wu, wv, 称这样的运算为细分运算．直观地

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com