科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者 楊 維 哲

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者　楊 維 哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鏗　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十七年五月九日再版

泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

基本定價　4.40

編著者　楊維哲　國立台灣大學數學系教授

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 7815250 號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者　建太彩色印製包裝有限公司　電話：3817488

本書敬獻給

施 拱 星　教授
永田雅宜　教授

楊 維 哲

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之

實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀

求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，惟

贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助

年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里

，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，

約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科

名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文

發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

目　錄

第一部分 Hilbert空間及算子的意義

第一章　H ilbert空間的意義

§1.　Hilbert 空間的定義

線性空間（或向量空間）　以複數體（或實數體）作係數域的加法群$\boldsymbol{H}$就叫做<u>線性空間</u>或<u>向量空間</u>（ linear space or victor space ）。說得明白些，一個線性空間$\boldsymbol{H}$就是這樣的一個不空集，可以定義“加法”及“**係數乘法**”：

若　$x, y \in \boldsymbol{H}$，　則　$x+y \in \boldsymbol{H}$，　　(1)

若　$x \in \boldsymbol{H}$，α 爲複數（或實數）則 $\alpha \cdot x \in \boldsymbol{H}$；　　(2)

而這兩種運算必須滿足：

V_1　$x+y=y+x$；　　(3)

V_2　$(x+y)+z=x+(y+z)$；　　(4)

V_3　對一切x, z，必存在唯一的y　使 $x+y=z$；　　(5)

V_4　$1 \cdot x = x$；　　(6)

V_5　$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)\cdot x$；　　(7)

V_6　$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$；　　(8)

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$。　　(9)

以上及以下，我們用希臘小字母 α，β 等表示“**數**”（ scalar)（即複數體，或對應的實數體的元素），用羅馬小字母 x，y，z 等表示“**向量**”亦即“矢”（ vector ）（即$\boldsymbol{H}$的元素）。必須注意：—(5)中的 y 由 x，z 唯一地定出，我們寫做 $y \equiv z-x$，而 $O_x \equiv x-x$ 和 x 是無關的。它有：$y+O_x=y$，對一切 y 都成立，而且 $0 \cdot y = O_x$，$(-1)y=O_x-y$，等等。這是很容易證明的。由於這個緣故，我們把向量O_x寫做O，把 $(-1)y$ 寫做 $-y$，不致於引起混淆。

內積　如果：對於$\boldsymbol{H}$的任何兩元 x，y 所做成的有序的一對 (x, y)，

能夠定出一個複數，寫做$<x|y>$，而且又滿足下述的條件；那麼：這個$<\ |\ >$就叫做$\boldsymbol{H}$上的一個內積或**單直積**（inner-product or unitary product）。——條件是：

U.1. $<x|x>\geqslant 0$,且$=0$，只當$x=0$時；（10）

U.2. $<x|y>^*=<y|x>$；（**Hermite 對稱性**）；（11）

U.3. $<x|y_1+y_2>=<x|y_1>+<x|y_2>$；（12）

$<x|\alpha y>=\alpha<x|y>$。（13）

[即$<x|y>$對y是綫性的（linear）。]這樣一來，

$$<x_1+x_2|y>=<x_1|y>+<x_2|y>;$$

而且 $$<\alpha x|y>=\alpha^*<x|y>。$$

注意：α^*表α的共軛複數。

以下我們取定一個內積於$\boldsymbol{H}$，而叫$\boldsymbol{H}$是**單直空間**或**有內積空間**（inner product space or unitary space）。

模 $\|x\|\equiv\sqrt{<x|x>}$ 叫x的**模**（Norm）。（14）

定理 1 $\|x\|\geqslant 0$,且$=0$，當且只當$x=0$時；（15）

$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；（**三角不等式**）；（16）

$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$；（17）

$|<x|y>|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，（**Schwarz 不等式**）；（18）

等號只在：「x，y中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

證明 （15）是直接由（10）得來，（17）是簡單的計算，（18）如下來證。不論λ是什麼樣的實數

$$\|x+\lambda<y|x>y\|^2\geqslant 0,$$

即 $$<(x+\lambda<y|x>y)|(x+\lambda<y|x>y)>\geqslant 0,$$

即 $$\|x\|^2+2\lambda|<x|y>|^2+\lambda^2|<y|x>|^2\|y\|^2\geqslant 0,$$

故判別式 $$|<x|y>|^4-\|x\|^2\|y\|^2|<y|x>|^2\leqslant 0,$$

即，若 $<x|y>\neq 0$，則 $|<x|y>|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$。

此即Schwarz不等式；若$<x|y>=0$，Schwarz 不等式是當然成立的。在（18）成爲等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是$|<x|y>|=\|x\|\cdot\|y\|=0$的情形，此時或者$x=0$或是$y=0$，

即其一爲它一的零倍；另一個是 $|<x|y>|=\|x\|\cdot\|y\|\neq 0$ 的情形，那麼，如上所述，λ 底二次式 $\|x+\lambda<y|x>y\|^2$ 的判別式爲0，一定有某一 λ 值存在，使 $\|x+\lambda<y|x>\|^2=0$，即 $x=-\lambda<y|x>y$，而 x 爲 y 的常數倍。

現在轉到（16），那就很簡單：

$$\|x+y\|^2=<x+y|x+y>=\|x\|^2+<x|y>+<y|x>+\|y\|^2$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2 \qquad \#$$

距離　在$\boldsymbol{H}$中，若令

$$d(x,y)\equiv\|x-y\| \tag{19}$$

作 x,y 間的<u>距離</u>（distance）那麼它滿足所謂**距離公理**（metric axioms）：

$$M_1 \quad d(x,y)\geqslant 0,=0,\ 當且只當\ x=y; \tag{20}$$
$$M_2 \quad d(x,y)=d(y,x); \tag{21}$$
$$M_3 \quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\ （三角不等式）。 \tag{22}$$

於是有內積的空間$\boldsymbol{H}$就成爲一個**有距空間**（metric space）。以有距空間的眼光來看$\boldsymbol{H}$，我們又常把向量 x 叫做<u>點</u> x。

收斂與完備　距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當 $\lim d(x_n,x)=0$（$n\to\infty$）時，我們說點列（x_n）**收斂到**（converges to）點 x，x 稱爲（x_n）的**極限**（limit），而用 $\lim x_n=x$（$n\to\infty$）或 $x_n\to x$ 來表示。當 $x_n\to x$ 時，由於 $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$，所以 $\lim\|x_n-x_m\|=0$（$n,m\to\infty$），換句話說"收斂點列（x_n），必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n,x_m)=0 \quad (n,m\to\infty)\text{"} \tag{23}$$

這句話的逆倒不必是眞的。但如果它是成立的，即是："當（x_n）是Cauchy點列時，必定存在一個點 x，使 $x_n\to x$"，那麼$\boldsymbol{H}$就叫做**Hilbert空間**，[剛剛的這條件，是**完備性**（Completeness）條件。一個完備的內積空間，就是個Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準Hilbert空間**。完備性的欠缺，是可以用一種"**完備化**"的步驟來補救以後（§6）就會談到]。[又，必須注意，在有內積空間（其實是：在有距空間）收斂點列（x_n）的極限都是唯一的：

若 $x_n \to x$，且 $x_n \to y$，則 $x = y$，這是由三角不等式得來的。]

定理 2 內積 $<x \mid y>$ 是 x, y 的連續函數，即是說：若 $x_n \to x$ 且 $y_n \to y$，則 $<x_n \mid y_n> \to <x \mid y>$。

系理 $x_n \to x$ 則 $\|x_n\| \to \|x\|$。(**模的連續性!**)

證明 $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$，故 $\|x_n\|$ **有界**（bounded），

$$
\begin{aligned}
\text{且} \quad \therefore & \left| <x \mid y> - <x_n \mid y_n> \right| \\
&= \left| <x - x_n \mid y> + <x_n \mid y - y_n> \right| \\
&\leqslant \|x - x_n\| \, \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \to 0 \text{。} \qquad \#
\end{aligned}
$$

§ 2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$\boldsymbol{L_2(\alpha, \beta)}$ 設 (α, β) 是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有"定義在這區域上的複數值可測函數 $x(t)$，而 $|x|^2$ 爲可積分的"，這些函數的總集以 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 表示，要注意：這裏所說的"可積分"都是指 Lebesgue 式的可積。

這個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 自然地是個線性空間（參看下述定理一證明的首段）———如果我們對於"加法"與"係數乘法"是這樣定義的：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)\text{。}$$

其次我們定義兩個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 中的元 x, y 間的"**準內積**"（pseudo-unitary product）：爲 $<x \mid y> = \int_\alpha^\beta x^*(t)\, y(t)\, dt$。這樣一來，"內積"的條件 §1，(10) − (13) 中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數 x，則 $x \neq 0$，但 $<x \mid x> = 0$，即 §1,1 的 (10) 不成立。

爲了做出一個有內積的空間，我們通常把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 改造一下：把"幾幾乎到處相同"的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的元，分做一類一類，兩函數爲同類的條件是"幾幾乎到處相同"，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成功一個集，寫爲 $L_2(\alpha, \beta)$。$L_2(\alpha, \beta)$ 的一元就是 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。$L_2(\alpha, \beta)$ 的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說：$L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 (α, β) 上的平方可積的可測函數之全

體，[到此爲止，和$\mathfrak{L}_2(\alpha,\beta)$ 沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，(向量)。

定理 1　$L_2(\alpha,\beta)$ 是個Hilbert 空間。

證明　x 及 y 均屬於 $L_2(\alpha,\beta)$ 時，$x+y\in L_2(\alpha,\beta)$，這是由於

$$|\gamma+\delta|^2\leqslant 2(|\gamma|^2+|\delta|^2)。$$

又$\langle x\mid y\rangle$的存在，由

$$2|\gamma\delta|\leqslant|\gamma|^2+|\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\|=\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設 $\lim\|x_n-x_m\|=0$，於是我們取出 (x_n) 的一個適當的子列 $(x_{\underline{k}}:k=1,2,\cdots)$ 使得

$$\sum_k\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|<\infty,$$

於是我們令

$$y_m(t)\equiv|x_{\underline{1}}(t)|+\sum_{k=1}^{m-1}|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}(t)|,$$

那麼 $y_m\in L_2(\alpha,\beta)$，而且對於幾幾乎一切 t，在$m\to\infty$時，$\lim y_m(t)$ 存在且$<\infty$。利用Lebesgue-Fatou的定理，

$$\int_\alpha^\beta(\lim y_m(t)^2)dt\leqslant\lim\int_\alpha^\beta y_m(t)^2\,dt=\lim\|y_m\|^2$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\left(\|x_{\underline{1}}\|+\sum_{k=1}^{m-1}\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|\right)^2<\infty,$$

故　$$x_{\underline{m}}(t)=x_{\underline{1}}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}(x_{\underline{k+1}}(t)-x_{\underline{k}}(t)),$$

在$m\to\infty$時，對幾幾乎一切 t 都收斂，並且極限函數 $x_\infty(t)\equiv\lim x_{\underline{m}}(t)$ 屬於 $L_2(\alpha,\beta)$ ($\because\|x_{\underline{m}}\|\leqslant\lim\|y_k\|$)。最後，這個 x_∞ 不

但是 $x_{\underline{m}}$ "幾乎逐點收斂"的極限而且也是"模意味下的極限"：

$$\| x_{\infty} - x_{\underline{k}} \| = \lim_{m \to \infty} \| x_{\underline{m}} - x_{\underline{k}} \| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \| x_{\underline{i+1}} - x_{\underline{i}} \| \longrightarrow 0 \ ,$$

當 $k \to \infty$ 時。

再利用不等式，我們可以把子列（$x_{\underline{m}}$）的收斂（模意味的）改爲函數列（x_n）本身的收斂：

$$\lim_{m \to \infty} \| x_{\infty} - x_m \| \leqslant \lim \| x_{\infty} - x_{\underline{m}} \| + \lim \| x_{\underline{m}} - x_m \| = 0 。 \qquad \#$$

注意：我們已在上面證出：$L_2(\alpha, \beta)$ 中的點列（x_n）若收斂，(這當然是指模意味下的收斂)，那麼我們可找到一個子列（$x_{\underline{m}}$）使得它是"幾幾乎逐點地"收斂：$x_{\underline{m}}(t) \to x(t)$（$k \to \infty$），對幾幾乎一切 t 成立。

補註一：空間 $\mathfrak{L}_2$ 是個**函數空間**（function space）∵元素都是函數，但空間 L_2 則否！但通常不去區別 $\mathfrak{L}_2$ 和 L_2!!

補註二：$L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 (α, β) 上一切平方可積（Lebesque 意味的可積）的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作爲相同，在我們的構建過程，(α, β) 區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間（Ω, μ）來代替區間（α, β）也可以，即是，令

$L_2(\Omega)$ 是一切 Ω 上的複數值，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left. \begin{aligned} f(\omega) + g(\omega) &\equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f) \cdot (\omega) &= \alpha \cdot f(\omega) \quad , \end{aligned} \right\} \ \omega \in \Omega,$$

$$\langle f \mid g \rangle \equiv \int f^*(\omega) g(\omega) \mu(d\omega),$$

並且，規定幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這 $L_2(\Omega)$ 確實是個Hilbert 空間。

並且，所有的Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，(見 §19 的注意)。

例：下面這個Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令 Ω 是一切自然數之集 $\boldsymbol{N}$，以元素**數目**（cardinal number）來做子集的測度，那麼 $L_2(\boldsymbol{N})$ 可以這樣來描寫：

$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ 那樣的複數列 $x\equiv(\xi_n)$ 之全體是個Hilbert空間，但對 $x\equiv(\xi_n)$，$y\equiv(\eta_n)$，我們令

$$x+y\equiv(\xi_n+\eta_n),\quad \alpha x\equiv(\alpha\xi_n),\quad \langle x|y\rangle\equiv\sum\xi_n^*\eta_n;$$

這個空間是**古典的 Hilbert 空間**。

§3. Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設 G 是Gauss平面的一個有欄開域，考慮 G 上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G|f(z)|^2\,dxdy<\infty,\quad z\equiv x+iy,$$

這樣的函數之全體我們以 $\underline{A_2(G)}$ 表示。

以
$$(f+g)(z)=f(z)+g(z),\quad (\alpha f)(z)=\alpha f(z),$$
$$\langle f|g\rangle\equiv\iint_G f^*(z)g(z)\,dxdy, \tag{1}$$

可定出個 Hilbert 空間。

證明： 除了完備性之外，其餘的和 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形一樣。不過我們在這裏必須注意：$A_2(G)$ 確是個函數空間，即 $A_2(G)$ 的元是一個函數，而 $L_2(\alpha,\beta)$ 的元是一類函數。[幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！] 設 (f_n) 是個Canchy 點列：$\|f_n-f_m\|\to0$ ($n,m\to\infty$) 於是仿照 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形，我們可以找到一個 (f_n) 的子列 $(f_{\underline{m}})$，使得

$$\begin{cases}\text{在}G\text{的幾幾乎一切點上，}\lim f_{\underline{m}}(z)=f_\infty(z)\text{ 存在,}\\ \displaystyle\iint|f_\infty(z)|^2\,dxdy<\infty.\end{cases} \tag{2}$$

我們首先證明 f_∞ 是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在 G 的一點 z_0，總有個鄰區存在使得 $(f_{\underline{m}})$ 在這鄰區內均勻收斂到 f_∞ 就好了。今設 $\{z:|z-z_0|<\gamma\}$ 全含於 G 內，再取 $\gamma_0>0$，$\delta>0$，使 $\gamma_0+\delta<\gamma$，我們有：當 $|z-z_0|\leqslant\gamma_0$ 時，區域 $\{w:|w-z|\leqslant\delta\}\subset\{w:|w-z_0|<\gamma\}\subset G$，於是