

科學圖書大庫

# 泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

編著者 楊維哲

徐氏基金會出版

521.176/17  
科學圖書大庫

# 泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者 楊維哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

# 科學圖書大庫

監修人 徐銘信 科學圖書編譯委員會主任委員  
編輯人 林碧銓 科學圖書編譯委員會編譯委員

版權所有

不許翻印

中華民國六十七年五月九日再版

## 泛函分析導論 (Hilbert 空間的算子)

基本定價 4.40

編著者 楊維哲 國立台灣大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號  
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號  
承印者 建太彩色印製包裝有限公司 電話：3817488

本書敬獻給

施 拱 星 教授  
永 田 雅 宜 教授

楊 維 哲

# 我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，力求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慷慨贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於為國人譯著，助益年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

# 目 錄

## 一部份 Hilbert空間 及算子的意義

### 第一章 Hilbert空間的意義

- § 1 Hilbert 空間的定義…………… 1
- § 2 Hilbert 空間的例子  $L_2(\alpha, \beta)$  … 4
- § 3 Hilbert 空間的例子  $A_2(G)$  …… 7

### 第二章 Hilbert空間的推廣

- § 4 線性算子、連續性 10
- § 5 Banach 空間 …… 13
- § 6 單直空間的完備化 16
- § 7 準單直空間 …… 19

### 第三章 射 影

- § 8 直交補空間 …… 22
- § 9 射影分解 …… 24
- § 10 射影算子間的關係 27

### 第四章 直和及無序和

- § 11 Hilbert 空間的直和…………… 31
- § 12 無序和…………… 34
- § 13 無限個 Hilbert 空間的直和 …… 37

### 第五章 Riesz定理及應用

- § 14 Riesz 定理 ( 又叫 Fréchet-Riesz 定理 ) …… 42
- § 15 Lebesgue-Nikodym 定理的證明 …… 47
- § 16 再生核…………… 51
- § 17 Bergmann 的核函數…………… 56

### 第六章 單直基

- § 18 單直基的意義，Gram-Schmidt 操作…………… 60
- § 19 Fourier 展開 …… 62
- § 20 維數…………… 65
- § 21 核函數再生核之具體表現—單直基之應用…………… 68

<b>第七章 收斂及算子</b>	§ 37 Bochner 定理.....138
§ 22 Gelfand 定理及共鳴定理..... 72	§ 38 Fourier 變換 ...142
§ 23 強收斂和弱收斂... 74	§ 39 Fourier 變換的值譜分解.....145
§ 24 算子的均勻收斂和收斂..... 76	§ 40 單直算子值譜分解 147
<b>第八章 閉性與同伴</b>	<b>第十二章 值譜分解，自伴算子</b>
§ 25 同伴算子..... 79	§ 41 J. Von Neumann 的值譜分解定理... 152
§ 26 閉算子..... 80	§ 42 固有值譜.....160
§ 27 對稱性和自伴性... 83	§ 43 例：乘法算子及算子 $q \cdot p$ 之值譜分解 167
<b>第九章 測度與積分的複習</b>	§ 44 完全連續算子..... 171
§ 28 備忘：積分論的一些事實..... 88	§ 45 自伴性之判認..... 175
§ 29 備忘：測度的集合 95	§ 46 正定算子的性質... 187
§ 30 Helly 的選出定理 98	<b>第十三章 正規算子的值譜分解</b>
§ 31 Herglotz 定理...101	§ 47 密在閉算子的標準寫法.....189
<b>第十章 矢值及算子值測度</b>	§ 48 正規算子的值譜分解.....193
§ 32 射影值及直交矢值測度.....108	§ 49 Hilbert 空間的完全連續算子，Schmidt 算子.....200
§ 33 一般算子值及矢值測度.....112	§ 50 可跡算子.....203
§ 34 一般積分的性質...119	<b>第十四章 正規算子底正規函數</b>
§ 35 無欄函數之積分...124	§ 51 算子的函數關聯與可換性.....209
<b>第二部分 值譜分解</b>	
<b>第十一章 值譜分解緒論</b>	
§ 36 長期平均（遍歷性）定理.....134	

- § 52 同時值譜分解定理 212  
 § 53 單純值譜算子…… 214  
 § 54 空間的直積分與正  
 規算子的表現…… 216

### 第十五章 Neumark的理論

- § 55 閉對稱算子之缺陷 222  
 § 56 例：算子  $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$  … 225  
 § 57 Neumark的延拓… 232  
 § 58 Neumark定理：廣  
 義的單么分解…… 235

## 第三部分 應用及補充

### 第十六章 Hilbert張量數

- § 59 張量積…… 239  
 § 60 對稱性、Grassmann  
 數…… 244

### 第十七章 吉田理論

- § 61 一參數半群 …… 251  
 § 62 半群底母算子…… 255  
 § 63 母算子底例…… 260  
 § 64 由母算子定半群及  
 母算子的刻劃…… 265  
 § 65 Trotter-Kato 的  
 加法公式…… 271

### 第十八章 一些機率分佈

- § 66 Bochner-Khinchin  
 定理 Stone 定理… 277  
 § 67 常態分佈…… 281

- § 68 Hermite 多項式… 283  
 § 69 調和振子…… 289  
 § 70 Poisson 變數的函  
 數：Charlier 變數 294

### 第十九章 過程論

- § 71 Hilbert 空間與仿  
 機率空間…… 298  
 § 72 直交矢值測度與仿  
 公平賭程…… 305  
 § 73 Wiener 過程…… 307  
 § 74 附錄 Lévy 過程… 311

### 第二十章 迴旋

- § 75 仿平穩過程…… 317  
 § 76 相關函數的意義… 320  
 § 77 對擬平穩過程的線  
 性運算(或稱濾過) 322  
 § 78 自迴歸級列…… 327  
 § 79 ARMA 級列…… 331  
 § 80 Wold 分解…… 332  
 § 81 預測…… 336  
 § 82 常態平穩過程…… 348  
 § 83 抽象的 Ito 積分… 352  
 § 84 多重 Wiener 積分… 357  
 § 85 仿平穩增量過程… 363  
 § 86 仿 Markov 過程及  
 Langevin 方程… 367

### 第二十一章 保測性和遍 歷性

- § 87 保測變換…… 371  
 § 88 測度的可遷性和遍

歷性.....	373
§ 89 長期平均定理.....	376
§ 90 平穩定常過程的遍 歷性.....	378
<b>第二十二章 在量子力學     的應用</b>	
§ 91 Wigner 定理.....	381
§ 92 量子力學的公理化	384
§ 93 Feynman 積分...	389
§ 94 Hamilton 算子自 伴性的認定.....	394
§ 95 正準交換關係.....	399
§ 96 Fock 表現.....	406
<b>第二十三章 荷佈空間</b> ...	411
§ 97 核式列直空間，極 限空間.....	411
§ 98 荷佈空間 $D, W_k$ 與 $H_k$ .....	414
§ 99 環體 $T^N$ 上的荷佈	418
§ 100 空間 $S$ .....	423

§ 101 Sobolev 補題.....	427
§ 102 Gårding 不等式...	431
§ 103 Friedrichs 定理...	436

## 第二十四章 Hilbert 空間

上的測度 ... 442

§ 104 擬不變測度.....	442
§ 105 正定號連續函數...	448
§ 106 Kakutani 內積.....	455
§ 107 Gauss 測度.....	460
§ 108 再論 C. C. R. ...	467

## 附 錄 ..... 472

§ 附 1 一個 Mini 一課 程的大綱.....	472
§ 附 2 可換的重度論...	479
§ 註解 譯詞及符號.....	488
書目和建議.....	490
索引.....	493
跋.....	494

# 第一部分 Hilbert 空間及算子的意義

## 第一章 Hilbert 空間的意義

### § 1. Hilbert 空間的定義

**線性空間**（或**向量空間**）以複數體（或實數體）作係數域加法群  $H$  就叫做**線性空間**或**向量空間**（linear space or vector space）。說得明白些，一個線性空間  $H$  就是這樣的一個不空集，可以定義“加法”及“係數乘法”：

$$\text{若 } x, y \in H, \text{ 則 } x + y \in H, \quad (1)$$

$$\text{若 } x \in H, \alpha \text{ 爲複數（或實數）則 } \alpha \cdot x \in H; \quad (2)$$

而這兩種運算必須滿足：

$$V_1 \quad x + y = y + x; \quad (3)$$

$$V_2 \quad (x + y) + z = x + (y + z); \quad (4)$$

$$V_3 \quad \text{對一切 } x, z, \text{ 必存在唯一的 } y \text{ 使 } x + y = z; \quad (5)$$

$$V_4 \quad 1 \cdot x = x; \quad (6)$$

$$V_5 \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x; \quad (7)$$

$$V_6 \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \quad (8)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \quad (9)$$

以上及以下，我們用希臘小字母  $\alpha, \beta$  等表示“數”（scalar）（即複數體，或對應的實數體的元素），用羅馬小字母  $x, y, z$  等表示“向量”亦即“矢”（vector）（即  $H$  的元素）。必須注意：—(5) 中的  $y$  由  $x, z$  唯一地定出，我們寫做  $y \equiv z - x$ ，而  $O_x \equiv x - x$  和  $x$  是無關的。它有： $y + O_x = y$ ，對一切  $y$  都成立，而且  $0 \cdot y = O_x, (-1)y = O_x - y$ ，等等。這是很容易證明的。由於這個緣故，我們把向量  $O_x$  寫做  $O$ ，把  $(-1)y$  寫做  $-y$ ，不致於引起混淆。

**內積** 如果：對於  $H$  的任何兩元  $x, y$  所做成的有序的一對  $(x, y)$ ，

能夠定出一個複數，寫做  $\langle x | y \rangle$ ，而且又滿足下述的條件；那麼：這個  $\langle | \rangle$  就叫做  $H$  上的一個內積或單直積 (inner-product or unitary product)。——條件是：

$$U.1. \quad \langle x | x \rangle \geq 0, \text{ 且 } = 0, \text{ 只當 } x = 0 \text{ 時}; \quad (10)$$

$$U.2. \quad \langle x | y \rangle^* = \langle y | x \rangle; \quad (\text{Hermite 對稱性}); \quad (11)$$

$$U.3. \quad \langle x | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \langle x | y_2 \rangle; \quad (12)$$

$$\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle. \quad (13)$$

[即  $\langle x | y \rangle$  對  $y$  是線性的 (linear)。] 這樣一來，

$$\langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle;$$

而且  $\langle \alpha x | y \rangle = \alpha^* \langle x | y \rangle$ 。

注意： $\alpha^*$  表  $\alpha$  的共軛複數。

以下我們取定一個內積於  $H$ ，而叫  $H$  是單直空間或有內積空間 (inner product space or unitary space)。

**模**  $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x | x \rangle}$  叫  $x$  的模 (Norm)。 (14)

**定理 1**  $\|x\| \geq 0$ , 且  $= 0$ , 當且只當  $x = 0$  時; (15)

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ; (三角不等式); (16)

$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ; (17)

$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , (Schwarz 不等式); (18)

等號只在：「 $x, y$  中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

**證明** (15) 是直接由 (10) 得來，(17) 是簡單的計算，(18) 如下來證。不論  $\lambda$  是什麼樣的實數

$$\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 \geq 0,$$

$$\text{即 } \langle (x + \lambda \langle y | x \rangle y) | (x + \lambda \langle y | x \rangle y) \rangle \geq 0,$$

$$\text{即 } \|x\|^2 + 2\lambda |\langle x | y \rangle|^2 + \lambda^2 |\langle y | x \rangle|^2 \|y\|^2 \geq 0,$$

$$\text{故判別式 } |\langle x | y \rangle|^4 - \|x\|^2 \|y\|^2 |\langle y | x \rangle|^2 \leq 0,$$

$$\text{即若 } \langle x | y \rangle \neq 0, \text{ 則 } |\langle x | y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

此即 Schwarz 不等式；若  $\langle x | y \rangle = 0$ ，Schwarz 不等式是當然成立的。在 (18) 成爲等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = 0$  的情形，此時或者  $x = 0$  或是  $y = 0$ ，

即其一爲它的零倍；另一個是  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \neq 0$  的情形，那麼，如上所述， $\lambda$  底二次式  $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2$  的判別式爲 0，一定有某一  $\lambda$  值存在，使  $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 = 0$ ，即  $x = -\lambda \langle y | x \rangle y$ ，而  $x$  爲  $y$  的常數倍。

現在轉到 (16)，那就很簡單：

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y | x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \# \end{aligned}$$

**距離** 在  $H$  中，若令

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| \quad (19)$$

作  $x, y$  間的距離 (distance) 那麼它滿足所謂**距離公理** (metric axioms)：

$$M_1 \quad d(x, y) \geq 0, = 0, \text{ 當且只當 } x = y; \quad (20)$$

$$M_2 \quad d(x, y) = d(y, x); \quad (21)$$

$$M_3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{三角不等式}). \quad (22)$$

於是有內積的空間  $H$  就成爲一個**有距空間** (metric space)。以有距空間的眼光來看  $H$ ，我們又常把向量  $x$  叫做點  $x$ 。

**收斂與完備** 距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當  $\lim d(x_n, x) = 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 時，我們說點列  $(x_n)$  **收斂到** (converges to) 點  $x$ ， $x$  稱爲  $(x_n)$  的**極限** (limit)，而用  $\lim x_n = x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 或  $x_n \rightarrow x$  來表示。當  $x_n \rightarrow x$  時，由於  $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$ ，所以  $\lim \|x_n - x_m\| = 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ )，換句話說“收斂點列  $(x_n)$ ，必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n, x_m) = 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (23)$$

這句話的逆倒不必是真的。但如果它是成立的，即是：“當  $(x_n)$  是 Cauchy 點列時，必定存在一個點  $x$ ，使  $x_n \rightarrow x$ ”，那麼  $H$  就叫做**Hilbert 空間**，[ 剛剛的這條件，是**完備性** (Completeness) 條件。一個完備的內積空間，就是個 Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準 Hilbert 空間**。完備性的欠缺，是可以用一種“**完備化**”的步驟來補救以後 (§6) 就會談到 ]。[ 又，必須注意，在有內積空間 (其實是：在有距空間) 收斂點列  $(x_n)$  的極限都是唯一的：

若  $x_n \rightarrow x$ ，且  $x_n \rightarrow y$ ，則  $x = y$ ，這是由三角不等式得來的。]

**定理 2** 內積  $\langle x | y \rangle$  是  $x, y$  的連續函數，即是說：若  $x_n \rightarrow x$  且  $y_n \rightarrow y$ ，則  $\langle x_n | y_n \rangle \rightarrow \langle x | y \rangle$ 。

**系理**  $x_n \rightarrow x$  則  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 。(模的連續性!)

**證明**  $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$ ，故  $\|x_n\|$  有界 (bounded)，

$$\begin{aligned} \text{且 } \therefore |\langle x | y \rangle - \langle x_n | y_n \rangle| &= |\langle x - x_n | y \rangle + \langle x_n | y - y_n \rangle| \\ &\leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \rightarrow 0. \quad \# \end{aligned}$$

## § 2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$L_2(\alpha, \beta)$  設  $(\alpha, \beta)$  是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有“定義在這區域上的複數值可測函數  $x(t)$ ，而  $|x|^2$  為可積分的”，這些函數的總集以  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  表示，要注意：這裏所說的“可積分”都是指 Lebesgue 式的可積。

這個  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  自然地是個線性空間（參看下述定理—證明的首段）——如果我們對於“加法”與“係數乘法”是這樣定義的：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t).$$

其次我們定義兩個  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  中的元  $x, y$  間的“準內積” (pseudo-unitary product)：為  $\langle x | y \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x^*(t) y(t) dt$ 。這樣一來，“內積”

的條件 §1, (10) — (13) 中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數  $x$ ，則  $x \neq 0$ ，但  $\langle x | x \rangle = 0$ ，即 §1, 1 的 (10) 不成立。

爲了做出一個有內積的空間，我們通常把  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  改造一下：把“幾幾乎到處相同”的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  的元，分做一類一類，兩函數爲同類的條件是“幾幾乎到處相同”，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成一個集，寫爲  $L_2(\alpha, \beta)$ 。

$L_2(\alpha, \beta)$  的一元就是  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。 $L_2(\alpha, \beta)$  的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說： $L_2(\alpha, \beta)$  是區間  $(\alpha, \beta)$  上的平方可積的可測函數之全

體，[到此為止，和  $\mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$  沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，(向量)。

**定理 1**  $L_2(\alpha, \beta)$  是個 Hilbert 空間。

**證明**  $x$  及  $y$  均屬於  $L_2(\alpha, \beta)$  時， $x + y \in L_2(\alpha, \beta)$ ，這是由於

$$|\gamma + \delta|^2 \leq 2(|\gamma|^2 + |\delta|^2)。$$

又  $\langle x | y \rangle$  的存在，由

$$2|\gamma\delta| \leq |\gamma|^2 + |\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\| = \left( \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設  $\lim \|x_n - x_m\| = 0$ ，於是我們取出  $(x_n)$  的一個適當的子列  $(x_k: k=1, 2, \dots)$  使得

$$\sum_k \|x_{k+1} - x_k\| < \infty,$$

於是我們令

$$y_m(t) \equiv |x_1(t)| + \sum_{k=1}^{m-1} |x_{k+1}(t) - x_k(t)|,$$

那麼  $y_m \in L_2(\alpha, \beta)$ ，而且對於幾幾乎一切  $t$ ，在  $m \rightarrow \infty$  時， $\lim y_m(t)$  存在且  $< \infty$ 。利用 Lebesgue-Fatou 的定理，

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (\lim y_m(t))^2 dt &\leq \lim \int_{\alpha}^{\beta} y_m(t)^2 dt = \lim \|y_m\|^2 \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \|x_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

故  $x_m(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t))$ ,

在  $m \rightarrow \infty$  時，對幾幾乎一切  $t$  都收斂，並且極限函數  $x_{\infty}(t) \equiv \lim x_m(t)$  屬於  $L_2(\alpha, \beta)$  ( $\because \|x_m\| \leq \lim \|y_k\|$ )。最後，這個  $x_{\infty}$  不

但是  $x_m$  “幾乎逐點收斂”的極限而且也是“模意味下的極限”：

$$\|x_\infty - x_k\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_k\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_{i+1} - x_i\| \rightarrow 0,$$

當  $k \rightarrow \infty$  時。

再利用不等式，我們可以把子列  $(x_m)$  的收斂（模意味的）改爲函數列  $(x_n)$  本身的收斂：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_\infty - x_m\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_\infty - x_m\| + \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_m\| = 0. \quad \#$$

**注意：**我們已在上面證出： $L_2(\alpha, \beta)$  中的點列  $(x_n)$  若收斂，（這當然是指模意味下的收斂），那麼我們可找到一個子列  $(x_m)$  使得它是“幾幾乎逐點地”收斂： $x_m(t) \rightarrow x(t)$  ( $k \rightarrow \infty$ )，對幾幾乎一切  $t$  成立。

**補註一：**空間  $\mathcal{L}_2$  是個**函數空間** (function space)  $\because$  元素都是函數，但空間  $L_2$  則否！但通常不去區別  $\mathcal{L}_2$  和  $L_2$  !!

**補註二：** $L_2(\alpha, \beta)$  是區間  $(\alpha, \beta)$  上一切平方可積 (Lebesgue 意味的可積) 的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作爲相同，在我們的構建過程， $(\alpha, \beta)$  區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間  $(\Omega, \mu)$  來代替區間  $(\alpha, \beta)$  也可以，即是，令

$L_2(\Omega)$  是一切  $\Omega$  上的複數值，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left. \begin{aligned} f(\omega) + g(\omega) &\equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f)(\omega) &= \alpha \cdot f(\omega) \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega,$$

$$\langle f | g \rangle \equiv \int f^*(\omega) g(\omega) \mu(d\omega),$$

並且，規定幾幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這  $L_2(\Omega)$  確實是個 Hilbert 空間。

並且，所有的 Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，（見 § 19 的注意）。

**例：**下面這個 Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令  $\Omega$  是一切自然數之集  $N$ ，以元素數目 (cardinal number) 來做子集的測度，那麼  $L_2(N)$  可以這樣來描寫：

$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$  那樣的複數到  $x \equiv (\xi_n)$  之全體是個 Hilbert 空間，但對  $x \equiv (\xi_n)$ ， $y \equiv (\eta_n)$ ，我們令

$$x + y \equiv (\xi_n + \eta_n), \quad \alpha x \equiv (\alpha \xi_n), \quad \langle x | y \rangle \equiv \sum \xi_n^* \eta_n;$$

這個空間是古典的 Hilbert 空間。

### § 3. Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設  $G$  是 Gauss 平面的一個有欄開域，考慮  $G$  上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G |f(z)|^2 dx dy < \infty, \quad z \equiv x + iy,$$

這樣的函數之全體我們以  $A_2(G)$  表示。

$$\text{以 } (f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad (\alpha f)(z) = \alpha f(z),$$

$$\langle f | g \rangle \equiv \iint_G f^*(z) g(z) dx dy, \quad (1)$$

可定出個 Hilbert 空間。

**證明：**除了完備性之外，其餘的和  $L_2(\alpha, \beta)$  的情形一樣。不過我們在這裏必須注意： $A_2(G)$  確是個函數空間，即  $A_2(G)$  的元是一個函數，而  $L_2(\alpha, \beta)$  的元是一類函數。[幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！] 設  $(f_n)$  是個 Cauchy 點列： $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ) 於是仿照  $L_2(\alpha, \beta)$  的情形，我們可以找到一個  $(f_n)$  的子列  $(f_m)$ ，使得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在 } G \text{ 的幾幾乎一切點上，} \lim f_m(z) = f_\infty(z) \text{ 存在，} \\ \iint |f_\infty(z)|^2 dx dy < \infty. \end{array} \right. \quad (2)$$

我們首先證明  $f_\infty$  是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在  $G$  的一點  $z_0$ ，總有個鄰區存在使得  $(f_m)$  在這鄰區內均勻收斂到  $f_\infty$  就好了。今設  $\{z : |z - z_0| < r\}$  全含於  $G$  內，再取  $r_0 > 0$ ， $\delta > 0$ ，使  $r_0 + \delta < r$ ，我們有：當  $|z - z_0| \leq r_0$  時，區域  $\{w : |w - z| \leq \delta\} \subset \{w : |w - z_0| < r\} \subset G$ ，於是