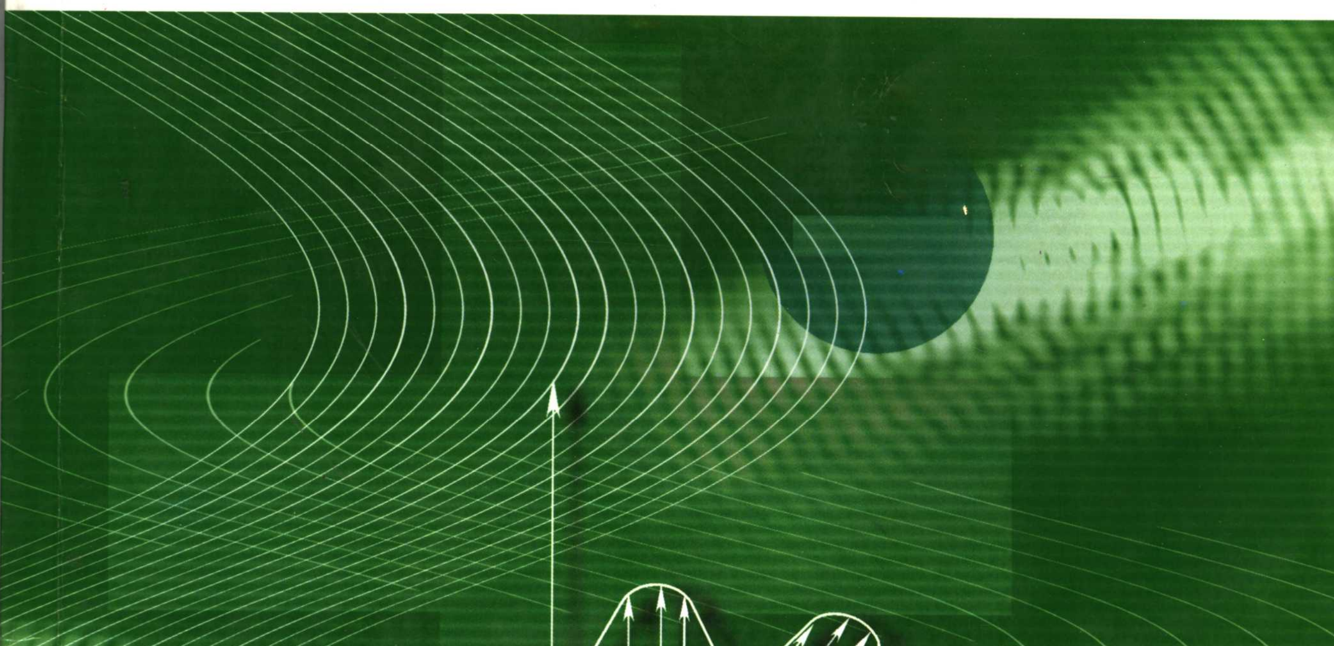
21世纪

高等学校电子信息类系列教材

《电磁场与电磁波》

学习指导

■ 王家礼 朱满座 路宏敏 王新稳 编著



西安电子科技大学出版社

http://www.xduph.com

第一章 矢量分析

一、基本内容与公式

1. 我们讨论的物理量若只有大小，则它是一个标量函数，该标量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，该场称为标量场。若我们讨论的物理量既有大小又有方向，则它是一个矢性函数，该矢性函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，该场称为矢量场。矢量运算应满足矢量运算法则。

2. 标量函数u在某点沿l方向的变化率$\frac{\partial u}{\partial l}$，称为标量场$u$沿该方向的方向导数。标量场$u$在该点的梯度$\mathbf{grad}u = \nabla u$与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \boldsymbol{l}$$

标量场u的梯度是一个矢量，它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

在标量场u中，具有相同u值的点构成一等值面。在等值面的法线方向上，u值变化最快。因此，梯度的方向也就是等值面的法线方向。

3. 矢量$\boldsymbol{A}$穿过曲面S的通量为$\Psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$。矢量$\boldsymbol{A}$在某点的散度定义为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

它是一标量，表示从该点散发的通量体密度，描述了该点的通量源强度。其散度定理为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

4. 矢量$\boldsymbol{A}$沿闭合曲线c的线积分$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，称为矢量$\boldsymbol{A}$沿该曲线的环量。矢量$\boldsymbol{A}$在某点的旋度定义为

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left[\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S}$$

它是一矢量，其大小和方向是该点最大环量面密度的大小和此时的面元方向，它描述旋涡源强度。其斯托克斯定理为

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

5. 哈密顿微分算子 ∇ 是一个兼有矢量和微分运算作用的矢量运算符号。$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 可看作两个矢量的标量积，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ 可看作两个矢量的矢量积。计算时，先按矢量运算法则展开，然后再做微分运算。∇u 可看作矢量与标量相乘。在直角坐标系中，其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在圆柱坐标系中，其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在球面坐标系中，∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

6. 亥姆霍兹定理总结了矢量场共同的性质：矢量场可由矢量场的散度和旋度惟一地确定；矢量场的散度和旋度各对应矢量场中的一种源。所以分析矢量场时，应从研究它的散度和旋度入手，旋度方程和散度方程构成了矢量场的基本方程。

二、例题示范

例 1－1　求数量场 $\varphi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

解：函数在点 $M(1, 2, 3)$ 处的值为

$$\varphi = \ln(1 + 4 + 9) = \ln 14$$

故通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面为

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 14$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

例 1－2　设

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_x + a_2\boldsymbol{e}_y + a_3\boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

求矢量场 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$ 的矢量线。

解：由矢量积的运算规则可得

$$\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y)\boldsymbol{e}_x + (a_3 x - a_1 z)\boldsymbol{e}_y + (a_1 y - a_2 x)\boldsymbol{e}_z$$

则矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_2 z - a_3 y} = \frac{\mathrm{d}y}{a_3 x - a_1 z} = \frac{\mathrm{d}z}{a_1 y - a_2 x}$$

将上式视为等比。设比值为 K，并对分子分母分别乘上 a_1、a_2、a_3 及 x、y、z，可得

$$\frac{\mathrm{d}(a_1 x)}{a_1 a_2 z - a_1 a_3 y} = \frac{\mathrm{d}(a_2 y)}{a_2 a_3 x - a_1 a_2 z} = \frac{\mathrm{d}(a_3 z)}{a_1 a_3 y - a_2 a_3 x} = K \tag{1}$$

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x(a_2z-a_3y)}=\frac{y\mathrm{d}y}{y(a_3x-a_1z)}=\frac{z\mathrm{d}z}{z(a_1y-a_2x)}=K \tag{2}$$

由(1)、(2)式可得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}(a_1x)&=K(a_1a_2z-a_1a_3y)\\ \mathrm{d}(a_2y)&=K(a_2a_3x-a_1a_2z)\\ \mathrm{d}(a_3z)&=K(a_1a_3y-a_2a_3x)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}x\mathrm{d}x&=K(a_2xz-a_3xy)\\ y\mathrm{d}y&=K(a_3xy-a_1yz)\\ z\mathrm{d}z&=K(a_1yz-a_2xz)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

对(3)、(4)式分别作和式，可得

$$\mathrm{d}(a_1x)+\mathrm{d}(a_2y)+\mathrm{d}(a_3z)=0,\ x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0$$

即

$$\mathrm{d}(a_1x+a_2y+a_3z)=0,\ \mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0$$

故所求矢量线方程为

$$a_1x+a_2y+a_3z=C_1,\ x^2+y^2+z^2=C_2$$

C_1、C_2 为任意常数。

例 1－3 求函数 $\varphi=3x^2y-y^3z^2$ 在点 $M(1,-2,-1)$ 处沿矢量 $\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{e}_x+xz\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解：矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点处的值为

$$\boldsymbol{a}|_M=2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{3},\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

而

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M=6xy|_M=-12$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M=(3x^2-3y^2z^2)|_M=3-12=-9$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M=-2y^3z|_M=-16$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\right|_M=-12\times\frac{2}{3}+9\times\frac{1}{3}+16\times\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$$

例 1－4 求函数 $\varphi=3x^2y-y^2$ 在点 $M(2,3)$ 处沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大一方的方向导数。

解：函数 φ 在某点处沿某曲线的某一方向的方向导数等于函数 φ 在该点处沿同方向的切线方向的方向导数，而曲线 $y=x^2-1$ 在点 M 处沿所取方向的切线斜率为

$$y'|_M=2x|_M=4$$

即
$$\tan\alpha = 4$$
其方向余弦
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$
而
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M = 6xy\big|_{(2,3)} = 36$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M = 3x^2 - 2y\big|_{(2,3)} = 6$$
于是所求的方向导数为
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta\right|_M = 36\times\frac{1}{\sqrt{17}} + 6\times\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

例 1-5 求数量场$\varphi=\frac{1}{r}$在过点$M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$的等值面上过该点的切平面方程。

解：数量场 $\varphi=\frac{1}{r}$ 的等值面方程为$\frac{1}{r}=c$，即
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{c^2}$$
而通过点 $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$的等值面则为单位球面：
$$x^2+y^2+z^2=1$$
由于过点 M 的切平面的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于等值面，也就是该数量场在 M 点处的梯度，即
$$\boldsymbol{n} = \nabla\varphi|_M = -\left.\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right|_M = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_z\right)$$
所以，所求的切平面方程为
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$
即
$$x+y+z=\sqrt{3}$$

例 1-6 如图 1-1 所示，设P为焦点在A、B处的某一椭圆上的任一点。试证明，直线 AP、BP 与椭圆在 P 点的切线所成之夹角相等。

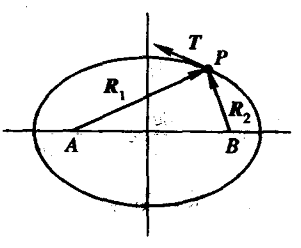


图 1-1

证明：令 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{BP}$ 分别代表由焦点 A、B 至 P 点的向量，$\boldsymbol{T}$ 为椭圆在 P 点的单位切向量。$\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的夹角为 α_1，$\boldsymbol{R}_2$ 与 $-\boldsymbol{T}$ 的夹角为 α_2。

根据椭圆的性质可知，该椭圆方程为 $R_1+R_2=C$（C 为一常数），则该椭圆的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为
$$\boldsymbol{n} = \nabla(R_1+R_2)$$
显然 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}=0$，即

$$\nabla(R_1 + R_2)\cdot \boldsymbol{T} = 0$$

或

$$\nabla R_1 \cdot \boldsymbol{T} = \nabla R_2 \cdot (-\boldsymbol{T})$$

由于

$$\nabla R_1 = \frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1} = \boldsymbol{R}_1^\circ\text{（单位矢量）}$$

$$\nabla R_2 = \frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2} = \boldsymbol{R}_2^\circ\text{（单位矢量）}$$

所以

$$\nabla R_1 \cdot \boldsymbol{T} = \cos\alpha_1, \quad \nabla R_2 \cdot (-\boldsymbol{T}) = \cos\alpha_2$$

即

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

该题的物理解释是：由椭圆的一个焦点发出的光线、电磁波或声波，会被椭圆反射后经过另一个焦点。$\alpha_1 = \alpha_2$ 表明，入射角等于反射角。

例 1-7 已知矢量场 $\boldsymbol{A} = (axz + x^2)\boldsymbol{e}_x + (by + xy^2)\boldsymbol{e}_y + (z - z^2 + cxz - 2xyz)\boldsymbol{e}_z$，试确定 a、b、c，使得 $\boldsymbol{A}$ 成为一无源场。

解：要使矢量场 $\boldsymbol{A}$ 无源，则必要求 $\text{div}\,\boldsymbol{A} = 0$，即

$$\begin{aligned}\text{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} &= az + 2x + b + 2xy + 1 - 2z + cx - 2xy \\ &= (a-2)z + (2+c)x + b + 1 = 0\end{aligned}$$

要使上式成立，必须有

$$a - 2 = 0, \quad 2 + c = 0, \quad b + 1 = 0$$

故

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -2$$

此时

$$\boldsymbol{A} = (2xz + x^2)\boldsymbol{e}_x + (xy^2 - y)\boldsymbol{e}_y + (z - z^2 - 2xz - 2xyz)\boldsymbol{e}_z$$

例 1-8 如图 1-2 所示，设 S 为由柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 及平面 $z = 0$ 和 $z = h$ 围成的封闭曲面，求矢径 $\boldsymbol{r}$ 穿出 S 的柱面部分的通量。

解：设 S_1 和 S_2 为闭曲面 S 的顶部与底部的圆面，则所求的通量可用穿出闭曲面 S 的总通量减去穿出 S_1 和 S_2 面的通量求得，即

$$\begin{aligned}\Psi &= \oint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S_1+S_2} \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{r}\,dV - \iint_{S_1} h\,dx\,dy + \iint_{S_2} 0\cdot dx\,dy \\ &= \iiint_\Omega 3\,dV - \pi a^2 h + 0 \\ &= 3\pi a^2 h - \pi a^2 h \\ &= 2\pi a^2 h\end{aligned}$$

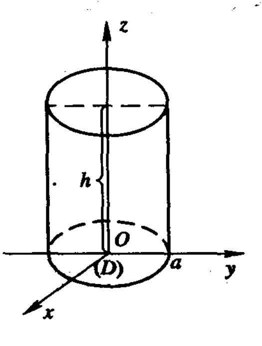


图 1-2

例 1-9　已知 $\varphi = 3x^2y$，$\boldsymbol{A} = x^3yz\boldsymbol{e}_y + 3xy^2\boldsymbol{e}_z$，求 rot $(\varphi\boldsymbol{A})$。

解：　$$\text{rot}\,(\varphi\boldsymbol{A}) = \nabla \times (\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla\varphi \times \boldsymbol{A}$$

而

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^3yz & 3xy^2 \end{vmatrix} = (6xy - x^3y)\boldsymbol{e}_x - 3y^2\boldsymbol{e}_y + 3x^2yz\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\varphi \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 6xy & 3x^2 & 0 \\ 0 & x^3yz & 3xy^2 \end{vmatrix} = 9x^3y^2\boldsymbol{e}_x - 18x^2y^3\boldsymbol{e}_y + 6x^4y^2z\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\nabla \times (\varphi\boldsymbol{A}) = 3x^2y^2[(9x - x^3)\boldsymbol{e}_x - 9y\boldsymbol{e}_y + 5x^2z\boldsymbol{e}_z]$$

例 1-10　证明矢量场

$$\boldsymbol{A} = (y^2 + 2xz^2)\boldsymbol{e}_x + (2xy - z)\boldsymbol{e}_y + (2x^2z - y + 2z)\boldsymbol{e}_z$$

证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，则其源应是发散的，而非涡旋源，即

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$$

由于

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xz^2 & 2xy - z & 2x^2z - y + 2z \end{vmatrix}$$
$$= (-1 + 1)\boldsymbol{e}_x - (4xz - 4xz)\boldsymbol{e}_y + (2y - 2y)\boldsymbol{e}_z = 0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场。

由 $\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 可表示成势函数 φ 的梯度，即

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$

由此可得如下三个方程：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -A_x = -(y^2 + 2xz^2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -A_y = z - 2xy$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -A_z = -(2x^2z + 2z - y)$$

由第一个方程对 x 积分得

$$\varphi = -xy^2 - x^2z^2 + c(y, z) \tag{1}$$

其中 $c(y,z)$ 暂时是任意的。为了确定它，将上式对 y 求导得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2xy+\frac{\partial c(y,z)}{\partial y}$$

与第二个方程比较可得

$$c_y'(y,z)=z,\quad c(y,z)=yz+c(z)$$

代回(1)式可得

$$\varphi=-xy^2-x^2z^2+yz+c(z) \tag{2}$$

为确定 $c(z)$，将(2)式对 z 求导，并与第三个方程比较可得

$$c_z'(z)=-2z,\quad c(z)=z^2+c$$

故所求势函数为

$$\varphi=-xy^2-x^2z^2+yz-z^2+c$$

并且

$$\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$$

例 1-11 试证明 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{e}_x+zx\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z$ 为调和场，并求出场的势函数 φ(φ也称为调和函数)。

证明：若矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中恒有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，则该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 称为调和场。也就是说，调和场是指既无源又无旋的矢量场。

由 $\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$ 可知，调和场存在势函数 φ 满足

$$\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$$

又由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}\equiv 0$，即

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

可知，势函数 φ 还满足方程(1)，而方程(1)称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的势函数 φ 也叫调和函数。而

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为拉普拉斯算子。

对于题目中给出的矢量 $\boldsymbol{A}$，由于

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=(x-x)\boldsymbol{e}_x-(y-y)\boldsymbol{e}_y+(z-z)\boldsymbol{e}_z$$

$$=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

所以，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为调和场。由于 $\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-yz,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-zx,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-xy$$

解之有

$$\varphi=-xyz+c$$

又由于

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-yz,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-xz,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-xy,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

即

$$\nabla^2\varphi=0$$

所以 $\varphi=-xyz+c$ 即为所求调和函数。

三、习题及参考答案

1－1　矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 与各坐标轴正向的夹角为 α、β、γ。请用坐标(x,y,z)来表示 α、β、γ，并证明：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

解：由于

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}=1$$

1－2　已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x-9\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{e}_x-4\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$，求：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

(4) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

解：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{e}_x-13\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=2+36-3=35$

$$(4)\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & -9 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=-31\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y+14\boldsymbol{e}_z$$

1－3 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y+c\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+8\boldsymbol{e}_z$，若使 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$，则 b 和 c 各应为多少？

解：

(1) 若使 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$，则要求 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，即

$$-1+3b+8c=0$$

$$3b+8c-1=0$$

满足该方程的全部 b、c 即为所求。

(2) 若使 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$，则要求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & b & c\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}=(8b-3c)\boldsymbol{e}_x-(8+c)\boldsymbol{e}_y+(3+b)\boldsymbol{e}_z=0$$

解之有

$$b=-3,\ c=-8$$

1－4 已知 $\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{e}_x+9\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y$，若 $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的模为 1，试确定 a、b。

解：由于 $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{A}$，$|\boldsymbol{B}|=1$，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=12a+9b=0,\quad a^2+b^2=1$$

解之有

$$a=\pm\frac{3}{5},\quad b=\mp\frac{4}{5}$$

也就是

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}\\ b=-\dfrac{4}{5}\end{cases},\quad \begin{cases}a=-\dfrac{3}{5}\\ b=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

1－5 求函数 $\varphi=xy^2+z^2-xyz$ 在点(1，1，2)处沿方向角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$、$\beta=\frac{\pi}{4}$、$\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。

解：由于

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M=y^2-yz|_M=-1$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M=2xy-xz|_{(1,1,2)}=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M=2z-xy|_{(1,1,2)}=3$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}$$

所以

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\Big|_M=1$$

1－6　求函数 $\varphi=xyz$ 在点(5，1，2)处沿着点(5，1，2)到点(9，4，19)的方向的方向导数。

解：指定方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向矢量为

$$\boldsymbol{l}=(9-5)\boldsymbol{e}_x+(4-1)\boldsymbol{e}_y+(19-2)\boldsymbol{e}_z=4\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+17\boldsymbol{e}_z$$

其单位矢量

$$\boldsymbol{l}^{\circ}=\cos\alpha\boldsymbol{e}_x+\cos\beta\boldsymbol{e}_y+\cos\gamma\boldsymbol{e}_z=\frac{4}{\sqrt{314}}\boldsymbol{e}_x+\frac{3}{\sqrt{314}}\boldsymbol{e}_y+\frac{17}{\sqrt{314}}\boldsymbol{e}_z$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M=yz|_{(5,1,2)}=2,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M=xz|_M=10,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M=xy|_M=5$$

所求方向导数

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}=\frac{123}{\sqrt{314}}$$

1－7　已知 $\varphi=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求在点(0,0,0)和点(1,1,1)处的梯度。

解：由于

$$\nabla\varphi=(2x+y+3)\boldsymbol{e}_x+(4y+x-2)\boldsymbol{e}_y+(6z-6)\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\nabla\varphi|_{(0,0,0)}=3\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y-6\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\varphi|_{(1,1,1)}=6\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y$$

1－8　u、v 都是 x、y、z 的函数，u、v 各偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v$

(2) $\mathbf{grad}(uv)=v\,\mathbf{grad}u+u\,\mathbf{grad}v$

(3) $\mathbf{grad}(u^2)=2u\,\mathbf{grad}u$

证明：

(1) 由于

$$\begin{aligned}\nabla(u+v)&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\\&=\nabla u+\nabla v\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{grad}(u+v)=\mathbf{grad}u+\mathbf{grad}v$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\nabla(uv) &= \frac{\partial}{\partial x}(uv)\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}(uv)\boldsymbol{e}_z \\ &= \left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(v\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \\ &= v\nabla u + u\nabla v\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{grad}(uv) = v\,\mathbf{grad}u + u\,\mathbf{grad}v$$

(3) 由于

$$\begin{aligned}\nabla u^2 &= \frac{\partial(u^2)}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial(u^2)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial(u^2)}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= 2u\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + 2u\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + 2u\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \\ &= 2u\nabla u\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{grad}u^2 = 2u\,\mathbf{grad}u$$

1-9 证明：

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}$

(2) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi$

证明：设

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z$$

(1) 因为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot[(A_x+B_x)\boldsymbol{e}_x + (A_y+B_y)\boldsymbol{e}_y + (A_z+B_z)\boldsymbol{e}_z] \\ &= \frac{\partial(A_x+B_x)}{\partial x} + \frac{\partial(A_y+B_y)}{\partial y} + \frac{\partial(A_z+B_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot(A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)(B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot(\varphi A_x\boldsymbol{e}_x+\varphi A_y\boldsymbol{e}_y+\varphi A_z\boldsymbol{e}_z)\\ &= \frac{\partial(\varphi A_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi A_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi A_z)}{\partial z}\\ &= \varphi\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ &= \varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)\\ &\quad\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi$$

1 - 10 已知 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，试证：

(1) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$

(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{r}r^n)=(n+3)r^n$

证明：

(1) 因为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\frac{x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]\\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\\ &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)-3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$$

(2) 因为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}r^n)=r^n\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla r^n$$

而

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=3$$

$$\begin{aligned}\nabla r^n &= nr^{n-1}\nabla r=nr^{n-1}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= nr^{n-1}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y+\frac{z}{r}\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= nr^{n-2}\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

所以 $$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}r^n)=3r^n+nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=(3+n)r^n$$

1－11　应用散度定理计算下述积分：

$$I=\oint\!\!\!\oint_S[xz^2\boldsymbol{e}_x+(x^2y-z^3)\boldsymbol{e}_y+(2xy+y^2z)\boldsymbol{e}_z]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

S 是 $z=0$ 和 $z=(a^2-x^2-y^2)^{1/2}$ 所围成的半球区域的外表面。

解：设

$$\boldsymbol{A}=xz^2\boldsymbol{e}_x+(x^2y-z^3)\boldsymbol{e}_y+(2xy+y^2z)\boldsymbol{e}_z$$

则由散度定理

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

可得

$$I=\iiint_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\iiint_\Omega(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega r^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^5$$

1－12　证明：

(1) $\nabla\times(c\boldsymbol{A})=c\nabla\times\boldsymbol{A}$（$c$ 为常数）

(2) $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$

证明：设

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$$

(1) 因为

$$\nabla\times(c\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\cA_x&cA_y&cA_z\end{vmatrix}$$

$$=c\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x-c\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+c\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=c\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}=c\nabla\times\boldsymbol{A}$$

所以

$$\nabla\times(c\boldsymbol{A})=c\nabla\times\boldsymbol{A}$$

(2) 因为

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi A_x & \varphi A_y & \varphi A_z\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial(\varphi A_z)}{\partial y}-\frac{\partial(\varphi A_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_x-\left[\frac{\partial(\varphi A_z)}{\partial x}-\frac{\partial(\varphi A_x)}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_y+\left[\frac{\partial(\varphi A_y)}{\partial x}-\frac{\partial(\varphi A_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{e}_z$$

$$=\varphi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}-A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x-\varphi\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$-\left(A_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}-A_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\varphi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z+\left(A_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-A_x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\varphi\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$$

所以

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$$

1－13　证明：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

证明：设

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$$

因为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x-(A_xB_z-A_zB_x)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)-\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_z-A_zB_x)+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$=B_z\frac{\partial A_y}{\partial x}-B_y\frac{\partial A_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial x}-A_z\frac{\partial B_y}{\partial x}-\left(B_z\frac{\partial A_x}{\partial y}-B_x\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$$

$$-\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial y}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)+B_y\frac{\partial A_x}{\partial z}-B_x\frac{\partial A_y}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)-B_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$=(B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$-(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\left[\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z\right]$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

所以

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

1-14 已知 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，试证：

(1) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$

(2) $\nabla\times\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$

(3) $\nabla\times\left[\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}f(r)\right]=0$ （$f(r)$ 是 r 的函数）

证明：

(1) 因为

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=(0-0)\boldsymbol{e}_x-(0-0)\boldsymbol{e}_y+(0-0)\boldsymbol{e}_z$$

$$=0$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

(2) 根据 1-12 题(2) 可知

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}\nabla\times\boldsymbol{r}+\nabla\frac{1}{r}\times\boldsymbol{r}$$

而

$$\nabla\frac{1}{r}=\nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=-\frac{x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

所以

$$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\nabla\times\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}=0$$

(3) 因为

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r}f(r)\right]=\frac{f(r)}{r}\nabla\times\boldsymbol{r}+\nabla\left(\frac{f(r)}{r}\right)\times\boldsymbol{r}$$

而

$$\nabla\left(\frac{f(r)}{r}\right)=\frac{r\nabla f(f)-f(r)\nabla r}{r^2}=\frac{f'(r)}{r^2}\boldsymbol{r}-\frac{f(r)}{r^3}\boldsymbol{r}$$

所以

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r}f(r)\right]=\frac{f(r)}{r}\nabla\times\boldsymbol{r}+\frac{f'(r)}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}-\frac{f(r)}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}=0$$

即

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r}f(r)\right]=0$$

1-15 设$\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$和$\boldsymbol{H}(x, y, z, t)$是具有二阶连续偏导数的两个矢性函数，它们又满足方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

试证明$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$均满足

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\quad(\boldsymbol{A}\text{等于}\boldsymbol{E}\text{或}\boldsymbol{H})$$

证明：设

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{e}_x+H_y\boldsymbol{e}_y+H_z\boldsymbol{e}_z$$

根据矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$，即

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}$$

而

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

所以

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

同理可得

$$\nabla^2\boldsymbol{H}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

1-16 试证明：

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\cdot\nabla v$$

证明：根据1-8题(2)的证明可知

$$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$$

而

$$\nabla^2(uv)=\nabla\cdot\nabla(uv)=\nabla\cdot(v\nabla u)+\nabla\cdot(u\nabla v)$$

根据1-9题(2)的证明可知

$$\nabla\cdot(v\nabla u)=v\nabla\cdot\nabla u+\nabla v\cdot\nabla u=u\nabla^2u+\nabla u\cdot\nabla v$$

$$\nabla\cdot(u\nabla v)=u\nabla\cdot\nabla v+\nabla v\cdot\nabla u=u\nabla^2u+\nabla u\cdot\nabla v$$