

小学数学的基础理论

钟善基 李家骏 编

北京师范大学出版社



小学数学的基础理论

钟善基 李家骏 编

北京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学的基础理论 / 钟善基, 李家骏编. - 北京: 北京师范大学出版社, 1998. 2

ISBN 7-303-04113-3

I. 小… I. ①钟… ②李… III. 算术课-小学-教学参考资料
IV. G613.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 19044 号

北京师范大学出版社出版发行

(100875 北京新街口外大街 19 号)

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本: 850×1168 1/32 印张: 12.875 字数: 289 千

1996 年 6 月北京第 1 版 1998 年 2 月北京第 2 次印刷

印数: 2 001—5 000 册

定价: 16.00 元

内 容 简 介

本书是供目前小学在职的数学教师进修大专学历时，作为学习《小学数学的基础理论》课使用的教材。内容主要含有算术、几何两部分，算术部分（书中第一～五章）是算术基础理论的系统的论述，几何部分（书中第六章）是针对目前小学数学课中所含的几何内容，所作的理论性的整理和阐述。

本书是以大专水平为前提，以当前需要进修大专学历的小学在职数学教师的实际水平为基点而编写的。学习本书后，可从理论上加深对小学数学教材的认识，提高对小学数学教材分析的能力。并在此基础上进行小学数学教学时，可使教学质量得到进一步的提高。

本书也可作一般的小学数学教师和中等师范学校学生的参考用书。

前 言

由著名数学教育家、北京师范大学教授钟善基先生和北京市教育局教学研究部小学数学教研员、中学高级教师李家骏老师合作编著的《小学数学的基础理论》即将与广大读者见面，这确实是一件值得庆贺的事情。

承蒙两位编者的信任及厚爱，我有幸成为书稿的第一位读者。当我认真看完这部凝聚着编者智慧与心血的书稿之后，倍感欣喜，并有诸多感慨。其所以感到欣喜，是我觉得这本书写的很有特点，庆幸从事小学数学教育工作的广大教师又可以读到一本难得的好书；其所以还生出许多感慨，则是由于我对两位编者都比较熟悉，我深为他们的敬业精神和严谨的治学态度所感动。两位编者要我在这本书写篇前言，说实在话，我认为自己尚不够这个资格，但盛情难却，就只好把个人的一些感受写出来，权作前言吧！

这本书写的有哪些特点呢？我认为主要有下述四个特点：

第一，编写目的明确，实用性强。本书作为小学教师在职进修大专课程《小学数学的基础理论》的教材，不仅符合高等师范院校大专课程应达水平的要求，又紧密结合这些教师现有的数学知识基础、分析教材的能力以及小学数学教学的实际需要，书中对小学数学教材中的许多疑难问题，从理论上进行了分析论证，广大数学教师读后会感到亲切、有用。

第二，内容重点突出，详略得当。本书以小学数学教学的主要内容——算术为重点，从理论上加以论述，比较系统，也比较完整。但本书与一些理论算术教材又不一样，对于小学数学教材中涉及到的几何初步知识，编者也进行了一定的系统整理，并介

绍了与这些内容有联系的中学初等几何的部分内容。编者在书中对中小学几何内容中相应部分的分析、比较以及对小学数学教学内容取舍的许多见解，不仅可使小学数学教师获得教益，而且对从事小学数学教材编写和教学研究的同志亦有启迪。

第三，介绍数学史料，古为今用。本书在许多章节都结合教学内容适当地介绍了一些我国古代在数学方面的成就与贡献，无疑会扩大读者的视野，加深对祖国源远流长文化的了解，增强民族的自豪感和自信心。这些史料也为教师向学生进行爱国主义教育提供了可供选择的素材。

第四，重视逻辑要求，立论有据。本书在绪论部分专门介绍了数学知识体系中逻辑的基本要求，这是十分必要的。掌握这些知识不仅是数学教师必须具备的，也是学习这本书的基础。建议读者要下功夫把这部分内容真正学明白，这样学后面各章内容时困难就会少一些。

《小学数学的基础理论》的编著是两位编者辛勤耕耘的成果。在本书出版之际，作为他们的同行和朋友，我觉得有责任向读者介绍一下本书两位编者的简单情况，这样读者就会理解我读书稿后生出感慨的缘由，及愿意读一读摆在读者面前的这本书。

钟善基先生，北京市人，1923年生，现年72岁。1943年开始一直从事教育工作，至今已有52个春秋。其中教中学9年，教大学43年，培养了5000多名学生，可谓桃李满天下，弟子遍全国。现为北京师范大学数学系教授，国家教委中小学教材审定委员会审定委员，中国教育学会数学教学研究会顾问，北京教育学会数学教学研究会理事长。钟先生向以学识渊博，治学严谨，教学有方、乐业敬业而在我国数学教育界享有很高的威信。现虽已年近古稀，但精力充沛、思维敏捷，仍在为发展我国的数学教育事业孜孜不倦、呕心沥血地工作着。特别使我感动的是钟先生对中小学数学教育倾注了他满腔的热情、做出了巨大贡献。他主编

九年义务教育五四学制初中数学教材，他不辞辛劳到各地为教师讲学……，对于北京市中小学数学教育工作，则更是不遗余力、积极支持、有求必应，作了大量的工作。这次钟先生与比他小近30岁的李老师合作编写这本书，历时半年有余。钟先生虽然是德高望重的老前辈，但他务实而不图虚名，这本书相当一部分书稿是他亲自执笔撰写、修改、抄写的，且字迹工整一丝不苟，而对其学生李家骏同志撰写的内容，钟先生更是认真审阅、严格要求、指导帮助他多次修改。对于钟先生这种提携后学、培养年轻教师的高风亮节和严谨认真的治学态度使我敬佩之情油然而生。

李家骏老师，北京市人，1952年生，现年44岁，从教已有24年，曾教小学8年，当小学数学教研员16年。他边工作边进修，刻苦学习，从北京师范大学毕业，取得大学本科学历，曾师从钟善基教授，与其指导的小学数学教育研究生一起研修数学专业课程，还师从冯忠良教授，研修过心理学课程，是一位能严格要求自己，好学上进，努力工作的优秀教师。多年来先后发表有关小学数学教学方面的论文23篇，编写书籍9本。1992年被首批破格评聘为中学高级教师职务。在这次与钟先生合作编写这本书的过程中，他十分努力，利用业余时间和节假日进行学习和写作，虚心听取老前辈的悉心指教，对承担撰写的几部分内容均是几易其稿，风貌和态度怎能不使我感动呢？这不正是我们年长者对年轻人寄予的希望吗？作为家骏同志的领导，我鼓励和支持年轻教师为祖国教育事业的发展、为教育质量的提高著书立说、建功立业，更是义不容辞的责任。

我相信，在当前教师队伍建设日益受到重视，广大教师迫切要求提高自身素质的形势之下，本书的出版一定会受到广大数学教师的欢迎。

曹福海

1995年6月于北京市教育局教研部

编者的话

1994年秋，北京师范大学出版社编辑部负责同志来约，谓目前有些省、市、区，正在或准备通过各种形式，举办小学在职教师进修大专学历的进修班。在为数学教师开设的《小学数学的基础理论》课上，由于缺少适合的教材，在教学上颇感不便。为适应这门课的教学需要，拟约我们编写一本针对性较强的教材以供使用。我们认为这是一项关系到基础教育发展的重要工作，便不揣冒昧地承担下来，愿试做这项工作。同时也希望借此起到抛砖引玉的作用，使众多的识者能因此而编写出较多的、水平高的、关系到基础教育发展的《小学数学的基础理论》的教材。

经共同商定，编写《小学数学的基础理论》的要求是，应在参照师范大专《初等数学研究》课的水平的前提下，密切结合进修教师的实际水平和教学工作的需要。密切结合进修教师的实际，就是要以目前小学在职的数学教师在数学理论知识上的实际水平，和在分析教材能力上的实际水平为基点，来编写这本教材。密切结合进修教师的教学工作的需要，就是要围绕着小学数学教学内容中的理论知识加以充实，以使这些知识得以理论化，系统化和完整化。

目前，小学数学教学的内容涉及算术、几何、代数三个方面。其中算术内容最较完整。小学数学教科书也是以算术内容为主线，按照一定的系统而编写的。与之相应，在《小学数学的基础理论》中，第一～五章是算术理论，就是按照理论化，系统化和完整化的要求编写的。同时，并在其间通过与小学数学教科书中所论的相应部分的比较，酌做一些必要的分析。

小学数学教学中的几何内容，则是极为初步的、少量的几何

知识. 在小学数学教科书中, 对几何内容, 也不是系统地阐述, 而是结合着有一定联系的算术内容, 穿插着地阐述的. 与之相应, 在《小学数学的基础理论》第六章《初等几何知识概述》中, 则先对小学数学教学中的几何内容做一定的系统整理, 而后论述中学初等几何教学内容中, 与之相应的内容或与之有较为直接联系的内容. 最后再通过中小学几何教学内容中相应部分的阐述的比较, 酌做一些必要的分析.

小学数学教学中的代数内容, 只是在非负有理数范围内的、简易的一元一次方程的内容. 由于至简, 在《小学数学的基础理论》中, 就不做相应的论述了.

在本书的第一~五章的各章章末都配有为数不多的习题, 目的是供本书的教、学双方参考选用. 在教学中, 可全部习作, 也可选择地习作. 也可不从中选作, 而另行选配. 第六章(几何部分)章末, 就不提供参考习题了.

根据中小学数学教学大纲的要求. 在数学教学中, 应向中小学生学习我国古代数学的成就, 用以进行爱国主义教育. 在本书中, 根据我们的认识, 也选择一些我国古代数学成就的史料, 配合在书中的有关部分并做必要的说明, 以供读者参考、于小学数学教学中选用.

如所周知, 数学知识必须按逻辑的要求来阐述. 教师在分析数学教材的深度时, 主要的依据也是逻辑的要求. 但是, 逻辑的要求究竟是什么? 有哪些? 这在数学的理论书和教科书中都不做说明. 有鉴于此, 本书开始先安排一段绪论, 内容就是数学知识体系中逻辑的基本要求的阐述, 以供读者了解. 同时也作为本书论述的依据.

在这本《小学数学的基础理论》的编写过程中, 得到了北京市教育局教学研究部曹福海主任的大力支持和帮助, 并为本书撰写了前言, 谨在此, 向曹福海主任致以衷心的感谢.

本书也可作为一般的小学数学教师的参考用书，也可作为中等师范学校学生的课外读物。

由于我们的理论水平不高；也缺少编写教材的经验，编写成的这本《小学数学的基础理论》，肯定会有不少的不妥、不足的地方和错误。敬希读者多提宝贵的意见。

编 者

1995年3月

目 录

前言	(I)
编者的话	(IV)
绪论	
——数学知识体系中逻辑的基本要求——	(1)
第一章 自然数	(23)
§ 1-1 自然数的概念	(23)
一 自然数的产生与作用	(23)
二 自然数列	(26)
§ 1-2 整数的运算	(28)
一 整数的加法和减法	(28)
二 整数的乘法和除法	(45)
三 整数的混合运算	(70)
§ 1-3 整数的进位制	(73)
一 进位制整数表达法的实质和记数法	(74)
二 二进制的整数的四则运算	(75)
三 二进制的整数与十进制的整数的转换	(76)
第二章 整除性	(83)
§ 2-1 数的整除的概念	(83)
一 整除、倍数和约数	(83)
二 质数、合数和因数分解	(85)
三 偶数和奇数	(90)
§ 2-2 公约数与公倍数	(94)
一 公约数与公倍数的概念	(94)
二 最大公约数与最小公倍数的性质	(95)

三 最大公约数与最小公倍数的求法	(102)
§ 2-3 整除性的判别法	(109)
一 被 2、4、8 整除的判别法	(110)
二 被 5、25、125 整除的判别法	(112)
三 被 3、9 整除的判别法	(115)
四 被 7、11、13 整除的判别法	(117)
§ 2-4 弃九法问题	(122)
第三章 分数	(128)
§ 3-1 分数的概念和基本性质	(129)
一 分数的概念	(129)
二 分数的基本性质	(130)
§ 3-2 分数的运算	(133)
一 分数的加法与减法	(133)
二 分数的乘法与除法	(140)
§ 3-3 整数与分数	(147)
一 算术数	(147)
二 真分数、假分数、带分数	(148)
§ 3-4 繁分数	(158)
第四章 小数	(162)
§ 4-1 小数的概念与基本性质	(162)
一 小数的概念	(162)
二 小数的基本性质	(164)
三 小数的比较	(167)
§ 4-2 小数的运算	(170)
一 小数的加法和减法	(170)
二 小数的乘法和除法	(173)
§ 4-3 分数与小数的互化	(180)
一 化分数为小数	(180)
二 化小数为分数	(187)
三 近似值的小数表示法	(190)

§ 4-4 数的开方	(198)
一 数的平方根和开平方	(198)
二 数的立方根和开立方	(204)
第五章 比和比例	(211)
§ 5-1 比和比例的概念与基本性质	(211)
一 比和比例的概念	(211)
二 比例的基本性质	(213)
§ 5-2 正比例与反比例	(216)
一 成正比例的量	(216)
二 成反比例的量	(219)
§ 5-3 比例配分	(222)
第六章 初等几何知识概述	(231)
§ 6-1 初等几何学的产生与建立	(232)
一 几何学的产生	(232)
二 初等几何学的建立	(235)
§ 6-2 目前小学几何知识中的原始概念与公理	(240)
一 中学初等几何课中的原始概念和公理	(241)
二 小学几何知识中的原始概念和公理	(243)
§ 6-3 有关线段与角的基本知识	(244)
一 小学几何知识中所反映的有关线段与角的基本知识	(244)
二 中学初等几何课中有关线段与角的基本知识	(251)
三 中小学几何知识中有关线段与角的基本知识阐述的比较	(252)
§ 6-4 有关相交线与平行线的基本知识	(263)
一 小学几何知识中所反映出的有关相交线与平行线的基本 知识	(263)
二 中学初等几何课中有关相交线与平行线的基本知识	(266)
三 中小学几何知识中有关相交线与平行线的基本知识阐	

述的比较	(274)
§ 6-5 有关三角形的基本知识	(277)
一 小学几何知识中所反映的有关三角形的基本知识	(277)
二 中学几何课中有关三角形的基本知识	(279)
三 中小学几何知识中有关三角形的基本知识阐述的比较	(291)
§ 6-6 有关特殊四边形的基本知识	(295)
一 小学几何知识中所反映的有关特殊四边形的基本知识	(295)
二 中学几何课中有关特殊四边形的基本知识	(298)
三 中小学几何知识中有关特殊四边形的基本知识阐述的 比较	(325)
§ 6-7 有关圆的基本知识	(326)
一 小学几何知识中所反映的有关圆的基本知识	(326)
二 中学几何课中有关圆的基本知识	(330)
三 中小学几何知识中有关圆的基本知识阐述的比较	(343)
§ 6-8 有关长方体、正方体、圆柱、圆锥的基本知识	(344)
一 小学几何知识中所反映的有关长方体、正方体、圆柱、 圆锥的基本知识	(344)
二 中学几何课中有关长方体、正方体、圆柱、圆锥的基 本知识	(349)
三 中小学几何知识中有关长方体、正方体、圆柱、圆锥的 基本知识阐述的比较	(368)
习题答案	(370)
附录 平方表 平方根表 立方表 立方根表	(374)

绪 论

—数学知识体系中逻辑的基本要求—

数学的特点之一在于它具有严密的逻辑性，这已是众所周知的了。不论在数学专著中，还是在数学教科书中，对所含的数学知识，都要按“前因后果”的要求进行编排，即编排在前面的知识是编排在后面的知识的理论根据；编排在后面的知识，它的理论根据——有关的知识，必须编排在它的前面。这就是从整体上说，应体现的逻辑要求。

从数学专著和中学以上的学校数学的教科书中也可以看出，一项数学知识都是按照概念和定义；命题和定理（包括公式、法则等），命题的证明；推论等的系统来阐述的。这又是从理论体系上说，应体现的逻辑要求。小学数学教科书中对数学知识的阐述，虽然不明白地标出定义、定理等字样，也没有对命题作出必要的推理证明，但是并非不按逻辑的体系进行阐述。而是限于学生的学习基础还不足以学习定义、定理等含义的阐述；还不足以理解推理证明的意义、学习推理证明的方法，因而只按照逻辑体系进行阐述而不标出定义、定理等字样；对定理则只作实验、归纳、验证、而不作推理证明。

从数学教科书中还可看出，对同一事物的定义，其内容有的并非阐述得完全相同。其原因主要有两个方面。一方面是用了字面不相同但意义相同的同义词——这多出现在同级学校的教科书中。另一方面则是根据认识规律，即人们认识事物的本质，常常不是一次完成、而是不断深化的规律，对同一事物的定义，在较低级学校的教科书中便阐述得较肤浅而不那么严密；在较高级学

校的教科书中便阐述得较深刻些、严密些——这种差别主要出现在小学教科书与中学教科书中。

所谓“严密”与“不严密”，其标准即在于是否符合逻辑上的要求。下面就从逻辑的角度，对“概念和定义”、“命题和定理、推论”等的含义和有关的要求，以及命题的推理证明作一简要的概述，并作为本书阐述的理论依据。

一 概念和定义

(一) 概念和定义的意义

所谓概念，逻辑学中指出了：概念是反映事物的本质属性的思维。所谓思维，心理学中指出了：思维是人脑对客观现实概括的和间接的反映，它反映的是事物的本质与内部规律性。因此，也可以说，概念是人脑对事物本质属性的、概括的和间接的反映。

所谓事物的本质属性，指的是所研究的一类事物所共有的、而为别类事物所没有的属性。如，“能被2整除”就是“2的倍数”的本质属性。又如，“有一个角是直角”就是“直角三角形”的本质属性。

概念所反映的一类事物共同的本质属性的总体，叫做这个概念的内涵。如，对于“平行四边形”来说，“对边分别平行”、“对边分别相等”、“对角分别相等”、……，都是它的本质属性。那么，所有这些本质属性的总体就是“平行四边形”这个概念的内涵。又如，对于“2和3的公倍数”来说，“既是2的倍数又是3的倍数”、“是6的倍数”、“最小是6”等，都是它的本质属性。所有这些本质属性的总体就是“2和3的公倍数”这个概念的内涵。

适合概念的事物的总体或范围，叫做概念的外延。如，各种斜平行四边形、菱形、长方形、正方形的总体就是“平行四边形”这个概念的外延。又如，6，12，18，24，30，……就是“2和3的公倍数”这个概念的外延。

研究事物的概念，总是和语言文字联系着的。对所研究的事物要用文词来表达，这就是通常所说的、给所研究的事物取的名称。对该事物的概念，也要用语言文字表达出来，这就是通常所说的名称的定义。这样，为所研究的事物定名、把对该事物的概念叙述出来，也就是通常所说的为概念所下的定义。

定义的一般形式是：

……，叫做……。

“叫做”前叙述概念的内涵或外延，“叫做”后为该概念所反映的事物的名称。如在一些小学数学教科书中的“如果数 a 能被数 b 整除， a 就叫做 b 的倍数”，其中“ b 的倍数”就是 a 的名称，“能被 b 整除”就是 a 的内涵。又如在一些中学代数教科书中的“正整数、零、负整数、正分数、负分数的总体叫做有理数”，其中“有理数”就是名称，“正整数、零、负整数、正分数、负分数”就是它的外延。

(二) 概念的内涵和外延的关系

1. 概念的内涵和外延的关系

概念的内涵和外延之间，是有一定的关系的。如以前面所举的平行四边形的概念为例，它的外延是包括斜平行四边形、菱形、长方形、正方形等四边形在内的所有的平行四边形。它的内涵就是这些四边形所共有的本质属性，即对边分别平行；对边分别相等；对角分别相等；……等等。而长方形虽然也是一种平行四边形，但不包括全部的平行四边形，只包括平行四边形的一部分。这就是通常所说的长方形的外延较之平行四边形的外延缩小了。但是长方形的内涵，除了包括平行四边形的内涵外，还应包括长方形独有的内涵，即“邻边不等”；“各角都是直角”；……。这就是通常所说的长方形的内涵较之平行四边形的内涵扩大了。由此可见概念的内涵和外延具有如下的关系：

概念的内涵越大，则其外延越小；概念的内涵越小，其外延