广播电视大学辅导材料

高等数学学习指导

上册

王正荣 冯 泰 编

中国农业机械出版社

广播电视大学辅导材料

高等数学学习指导

上　册

王正荣　冯泰　编

中国农业机械出版社

广播电视大学辅导材料

高等数学学习指导

（上 册）

王正荣 冯 泰 编

*

中国农业机械出版社出版
北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号
北京市密云县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
新华书店经售

*

850×1168 32开 $10^3/_8$ 印张 272 千字
1985年 8 月北京第一版 · 1985年 8 月北京第一次印刷
印数：00,001—54,200 · 定价：2.60元
统一书号：7216 · 67

前言

自一九八四级开始，中央广播电视大学理工科的高等数学课，采用了北京大学邵士敏同志所编之教材《高等数学讲义》．本书是根据新的教学大纲和上述教材来编写的．

高等数学在高等工科院校各专业的教学计划中都是一门属于理论性的基础课程，在培养工程技术人员的过程中，高等数学起着奠基的作用．高等数学所包括的数学知识，对于读者顺利地学习其他理论课（比如普通物理、理论力学、材料力学等）及专业课都是必不可少的．通过学习数学课程所获得的运算能力，逻辑思维能力（抽象思维能力），空间想像能力以及分析和解决实际问题的能力，将使读者在自己的工作岗位上不仅能顺利地完成任务，而且有可能做出创造性的贡献．作为数学课程的一个特点，仅仅掌握了概念是不够的，还必须通过足够的练习去培养和形成一定的技能和技巧，即既要注重基础知识，又要注重基本训练；而基本训练是需要有适当的指导的，否则事倍功半．由于电大是进行远距离教学，且电视授课时数有限，因此这种指导往往是不足的．再加之电大学员多数缺乏严格的系统学习的训练，初等数学的知识也掌握得不甚牢固．所以电大学员学习高等数学，比起一般大专院校的学生来说，是要困难一些的．为了帮助电大学员学好高等数学这门重要的基础课，我们根据教学实践中的一些体会，并参照新的教学大纲和新的教材，编写了《广播电视大学高等数学学习指导》一书．

本书配合教材，以章为单元来编写，分为：〔基本要求〕、〔重点〕、〔难点〕、〔学习指导〕、〔其他说明〕和〔练习题〕这样六个项目，其中主要部分自然是〔学习指导〕．前两项，即〔基本要求〕和〔重点〕，是依据本课程的教学大纲来提的．它明确了对每一章

内容应掌握的程度；〔难点〕的提出则是依据教材本身的内在联系和教学中的经验，它告诉读者在学习这些内容时，应加以注意．在〔学习指导〕一项内，则是对重要的基本概念作进一步的分析，有时也做适当的引伸，以求得到深刻理解和牢固掌握；对于难点则重新提出来加以剖析，抓住关键之处帮助读者进一步理解；针对工科教学（电大学员中工科学员占多数）的要求，我们特别注意了运算能力的培养：对于各种基本运算，就其主要方法作尽可能完善一点的归纳总结；我们在运算上既强调基本技能的训练又注意引导读者去学会为使运算简便而应掌握的技巧；对于典型问题，则归纳出解题的一般步骤；对于可能发生的常见性错误，则予以指出．书中配备了足够数量的例题和习题，其中主要是应该掌握的基础题，也有一些提高性的题．为了说明问题或为了开阔读者的思路，所举之例题中，个别题难度稍大一点，对于这类例题读者能看懂就可以了．所选之题，力求具有典型性，代表性．除此之外，在书中我们还就学习方法问题提出了一些建议，以供读者参考．

本书分为上、下两册，共十六章．上册是一元函数微积分学部分，包括函数、极限与连续性、导数与微分、中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等八章．下册包括空间解析几何、级数、傅里叶级数、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分及曲面积分、常微分方程、场论初步等八章．书中凡加星号的内容与习题，读者可选学、选做，不作必学要求．

本书除下册中的《重积分》，《级数》，《傅里叶级数》，《常微分方程》等四章由冯泰同志执笔外，其余各章均由王正荣同志执笔．林国同志审阅了全稿．

在编写中遇到的一些问题，我们曾请教了北京师范大学数学系赵慈庚教授，赵老师热情地给予了指导，林国同志在审稿工作中也提出了宝贵意见，在此向他们致谢．

本书除可以作为广播电视大学理工科学员学习高等数学的辅导用书外，还可以作为广播电视大学面授教师的教学参考书；也

可以作为职工大学、业余大学等的学生以及自学高等数学者之辅导材料。

限于编者的水平，加之时间仓促，错误和不妥之处恐怕不少，敬请读者批评指正。

一九八四年四月　于北京

目　　录

（上　册）

定的 y 值与之对应，我们就称 y 是 x 的一个（单值）函数，记作：

$$y=f(x)$$

我们称 x 为自变量，y 为函数或因变量，并称自变量的变域 D 为函数的定义域，而称因变量的变域为函数的值域.

这个定义中，包含着三个要素：即定义域、对应规律和值域，而前两个要素决定着第三个要素．对两个函数而言，对应规律不同固然是不同的函数；就是对应规律相同时，只要定义域不同也还是两个不相同的函数．换句话说，两个函数当且仅当定义域与对应法则完全相同时才恒等，否则就是两个不同的函数.

例1．指出下列各组中的两个函数是否相同，并说明理由.

（1）$f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=1$；

（2）$f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

（3）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（4）$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（5）$f(x)=x^2$，$g(x)=x[0,+\infty)$；

（6）$f(x)=x$，$g(x)=\sin(\arcsin x)$.

解：

（1）不相同．因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

（2）不相同．因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$.

（3）不相同．显然对应法则不相同，且两者的值域也不同：$f(x)$ 的值域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的值域是 $(0,+\infty)$.

（4）相同．因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域和对应法则相同；自然，值域也相同．实际上有：

$$\sqrt{x^2}\equiv|x|$$

（5）不相同．因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$．显然，这两个函数有相同的对应法

则和值域。

（6）不相同。因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$。

关于函数定义还有一点值得注意：即函数关系仅与定义域、对应法则有关而与自变量和因变量用什么字母表示无关。下面的例题，就要用到这一点。

例2. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$。

解：

令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$ （$\because x>0$，$\therefore t>0$）

由 $$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$$

可得 $$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$$

由于函数关系与字母表示法无关，

所以，$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

例3. 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$。

解：

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-(1-\cos x)=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

令 $$\sin\frac{x}{2}=t$$

则 $$f(t)=2-2t^2$$

由于函数关系与字母表示法无关，

所以，$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2-(1+\cos x)=1-\cos x$.

2. 函数的符号 教材在定义中给出了函数的符号 $y=f(x)$，这个符号即表示“y 是 x 的函数”这件事。这里的 f [或

$f(\ )$] 是函数的符号，它不代表任何数，而只代表自变量 x 与因变量 y 之间的对应规律，也就是 y 对于 x 的依从关系. 如果函数用列表法或图象法给出时，那么 f 即指表中或图中所反映出来的那种对应规律；如果函数用公式(解析式)给出时，我们就可以具体地说出 f 的意义. 比如，对于函数 $y=2x^2+1$ 来说，若将它记为 $y=f(x)$，则这里 f 就表示把 x 平方后乘以 2 再加上 1. 又如，当 $y=f(x)$ 代表函数

$$y=3x^2+5x+4$$

时，$f(x)$ 就是 $3x^2+5x+4$. 这时 f 就是如下的一套运算程式：

$$f(\ )=3(\ )^2+5(\ )+4,$$

其运算程序是：将某数（自变量之数值）的平方乘以 3；5 乘以同一个数；最后，把前两个得数和 4 加在一起. 显然，

当取 $x=0$ 时，则有 $f(0)=3\times0^2+5\times0+4=4$

当取 $x=1$ 时，则有 $f(1)=3\times1^2+5\times1+4=12$

当取 $x=2$ 时，则有 $f(2)=3\times2^2+5\times2+4=26$

当取 $x=-2$ 时，则有 $f(-2)=3\times(-2)^2+5\times(-2)+4=6$

一般说，当取 $x=a$ 时，则有：

$$f(a)=3a^2+5a+4$$

自然，$f(a)$ 就是 $f(x)$ 所代表的函数 $y=3x^2+5x+4$ 在 $x=a$ 的值. 这里要特别注意：$f(x)$ 是函数、是变量；而 $f(a)$ 则是 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的值，它是数值，不是变量，更不是函数.

若同时讨论几个函数，则必须用不同的符号表示不同的函数. 表示函数的记号，除 f 以外，还经常用 F、ϕ、ψ、φ、g 等等，写作

$$y=F(x),\quad y=\phi(x),\quad y=\psi(x),\ \cdots\cdots,$$

在同一个问题里，一旦指定了 $y=f(x)$ 代表某一个函数，则须始终用这一个符号表示该函数，不得中途变换.

例4. 已知 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，求 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$，$f\left(\dfrac{b}{a}\right)+f\left(\dfrac{a}{b}\right)$，

$f\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]$. 并证明 $f(-x)=f(x)$； $x\neq 0$ 时，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$。

解：

$$f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\frac{b^2}{a^2}-1}{\frac{b^2}{a^2}+1}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$$

$$f\left(\frac{b}{a}\right)+f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0$$

$$f\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]=\frac{\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2-1}{\left[f\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2+1}=\frac{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2-1}{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2+1}$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2-(b^2+a^2)^2}{(b^2-a^2)^2+(b^2+a^2)^2}=\frac{-2a^2b^2}{a^4+b^4}。$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)。$$

当 $x\neq 0$ 时，

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=-f(x)。$$

例5. 已知 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，试将 $f(x^2)$，$f(x^3)$ 用 $f(x)$ 表示出来，再求 $f(x+h)-f(x)$。

解：

$$f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=[f(x)]^2-2。$$

$$f(x^3)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=[f(x)]^3-3[f(x)]。$$

$$f(x+h)-f(x)=\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=h+\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=h-\frac{h}{x(x+h)}.$$

3. 我们教材中所采用的函数定义是前一世纪30年代由俄罗斯数学家罗巴契夫斯基及德国数学家狄里赫莱首先引入的，且很快获得了数学家们的普遍承认。但是，在科学技术及数学学科本身迅速发展的今天，这个通用的习惯定义已经不能适应客观现实的需要了。

*近年来函数定义采用较多的是：

如果对于x在数集M的每个值，总有y的确定的值和它对应，其中的对应规律f叫做函数，这种对应关系常用记号$y=f(x)$表示。可以独立取值的x叫做自变量，而y叫做因变量。

上述定义与教材上的定义相比，它的重点是放在对应规律上，而不是去特别注重y这个变量。这样的定义是更符合事情的本来面貌的，实际上，在函数概念中，处于关键地位的是对应规律，而不是因变量y。在研究一种函数关系时，对应规律确定之后，就基本确定下来了，如果自变量x的取值范围再予以明确，则这种函数关系就被完全确定下来，因变量y是在这个过程中被相应地确定下来的。显然，在上述新的定义之下，函数与因变量就该是两个有区别的概念了。

* 上述定义运用集合论的知识加以引伸，则又可叙述为：

考虑两个集A和B，它们的元素可以是任何东西。假定对于A的每个元素x，按照某种方式，与集B的一个元素联系着，这个元素记作$f(x)$；那么，就说f是从A到B的一个函数（或将A映入B内的一个映射）。集A叫做f的定义域（或者说f定义在A上），而元素$f(x)$叫做f的值。f的一切值的集合叫做f的值域。这样的定义自然是更为广泛了。A、B集的元素不一定是数或量，而可以是任何东西。

* 最后，我们向读者介绍一个函数的现代化定义：

函数 f 是一些有序偶（x，y）的集合，其中任何两个有序偶的第一个成员（也可称为元素或投影）均不相等。即：

如果（x，y）$\in f$，（x，z）$\in f$，则 $y=z$。这里用到集合论中关于有序偶的知识，符号“$\in$”具有通常的意义，即表示“属于”。

二、关于复合函数的概念

在初等数学中，没有明确提出过复合函数的概念，这个概念是比较难于理解的，然而，这个概念于今后的学习却十分重要。因此，我们再作过细的讲解是必要的。

如果 y 是 u 的函数，u 又是 x 的函数：

$$y=f(u),\qquad u=g(x)$$

而且 $g(x)$的值域在 $f(u)$的定义域内，那么每当 x 在 $g(x)$的定义域里取一个值时，便经过 u 的传导而有 y 的一个值和它对应，于是 y 是 x 的函数，记为 $y=f(g(x))$。

这样得到的函数 $y=f(g(x))$，叫做 $f(u)$和 $g(x)$的复合函数。u 叫做中间变量，f 叫做外层函数，g 叫做内层函数。这个过程叫做函数的复合。这是由基本初等函数去构造出许多初等函数的一种重要方法。

例如，$y=\cos u$，$u=x^3+1$ 时，$y=\cos(x^3+1)$ 这是复合函数，是由 $y=\cos u$ 与 $u=x^3+1$ 复合而成的。

因为 y 是 u 的函数，u 自己又是 x 的函数，所以复合函数又可以叫做函数的函数。

复合函数不一定只复合一次，而是可以进行有限多次的复合。例如，由 $y=\lg u$，$u=a+V$，$V=\sqrt{W}$，$W=b+x^2$ 经过三次复合便构成 $y=\lg(a+\sqrt{b+x^2})$（其中 a，b 为正的常数）。

组合复合函数时，要注意中间变量的值域必须属于外层函数的定义域。如

$$y=\arcsin(1+\sqrt{1+x^2})$$

就没有意义，这是因为不论 x 是什么实数，$1+\sqrt{1+x^2}$ 都不能在反正弦的定义域$[-1,1]$之内。

我们学习复合函数，主要目的不在于能将几个基本初等函数复合而成一个较复杂的函数，而在于能把一个复合函数拆成为几个基本初等函数．这种技能必须熟练掌握，以后在求导时要用．

例6． 试将下列复合函数还原成基本初等函数：

（1）$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$，　（2）$y=ae^{b^2+x^2}$

解：

（1）令$u=\sin^2\dfrac{1}{x}$，则$y=e^u$；令$V=\sin\dfrac{1}{x}$，

则　$u=V^2$；　令$W=\dfrac{1}{x}$，则$V=\sin W$．所以$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$可还原成以下几个基本初等函数：

$$y=e^u,\quad u=V^2,\quad V=\sin W,\quad W=\frac{1}{x}.$$

（2）令$u=e^{b^2+x^2}$，则$y=au$；令$V=b^2+x^2$，则$u=e^V$；令$t=x^2$，则$V=b^2+t$．所以$y=ae^{b^2+x^2}$可还原成以下几个基本初等函数：

$$y=au,\quad u=e^V,\quad V=b^2+t,\quad t=x^2.$$

例7． 已知

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1\\ x, & x>1.\end{cases}$$

试写出$f[g(x)]$．

解：

$$f[g(x)]=\begin{cases}g(x); & g(x)\leqslant 1\\ g(x)-1, & g(x)>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

所以，$f[g(x)]=x-1$，$(-\infty,+\infty)$．

例8. 已知$\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$及$\psi(x)=\dfrac{1}{x}$

求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$.

解：

$$\varphi[\varphi(x)]=\operatorname{sgn}\varphi(x)=\operatorname{sgn}[\operatorname{sgn} x]=\operatorname{sgn} x;$$

$$\psi[\psi(x)]=\frac{1}{\psi(x)}=\frac{1}{\dfrac{1}{x}}=x\ (x\neq 0);$$

$$\varphi[\psi(x)]=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{x}>0\\ -1, & \dfrac{1}{x}<0\end{cases}=\operatorname{sgn} x\ (x\neq 0);$$

$$\psi[\varphi(x)]=\frac{1}{\operatorname{sgn} x}=\operatorname{sgn} x\ (x\neq 0).$$

三、求函数的定义域

求函数定义域是本章学习中，应熟练掌握的一种基本技能．

在某些情况下，函数的定义域是用明显的形式给出的．例如，分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x<1\\ 3x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-2x+4, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

显见，该函数的定义域就是闭区间$[0,\ 3]$．

这里我们顺便指出：分段函数是一个函数，只是在定义域中的不同取值范围内，有着不同的解析表达式，它不可能由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而得到．因此它不是初等函数．

在更多的场合，函数的定义域是不明显地给出的．这时我们往往依据以下两种情况来确定：一是给定的函数有着实际背景，则定义域应由其实际意义来确定．比如，当自变量t表示时间时，则定义域只能取不小于零的实数；二是函数由解析式给出，

且末就定义域作特别说明，则这种函数的定义域就依据解析式中所涉及到的代数运算在实数域中是否能进行以及有关数学知识来确定。

一般说，用解析式给出的函数 $y=f(x)$ 的定义域可以这样来确定：

（1）如果 $f(x)$ 是多项式，则定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$。

（2）如果 $f(x)$ 是分式，即 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，这里 $P(x)$，$Q(x)$ 是整式．则函数的定义域由 $Q(x)\neq 0$ 来确定。

（3）如果 $f(x)$ 是一个根式，则：

当 $f(x)=\sqrt[2K]{P(x)}$ 时，定义域由 $P(x)\geqslant 0$ 来确定；

当 $f(x)=\sqrt[2K+1]{P(x)}$ 时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$．其中 $P(x)$ 是整式，K 是自然数。

（4）如果 $f(x)$ 是一个指数式，即

$$f(x)=a^{P(x)}\qquad(a<0,\ a\neq 1)$$

其中 $P(x)$ 为整式，则定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

（5）如果 $f(x)$ 是一个对数式，即

$$f(x)=\log_a P(x)\quad(a>0,\ a\neq 1)$$

则定义域由 $P(x)>0$ 来确定。

（6）当 $f(x)$ 为三角函数式或反三角函数式时，则定义域由这些函数的特定的定义域来确定。

（7）当 $f(x)$ 为比较复杂的函数时，则求定义域的方法是：先将函数分解成若干个简单函数，分别写出它们的定义域；然后再解相应的联立不等式组。

例9． 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$；

（2）$y=\sqrt{\lg x}+\lg(5-x)$；

（3）$y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$；

（4）$y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

（5）$y=\arccos\dfrac{x^2+1}{5}$；

（6）$y=\log_a[\log_a(\log_a x)]$ $(a>0,\ a\neq 1)$；

（7）$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{36-x^2}$；

（8）$y=\arcsin a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$。

解：

（1）因为$x^2-4\neq 0$，即$x\neq\pm 2$，

所以，定义域为$(-\infty,\ -2)$，$(-2,+2)$，$(2,+\infty)$。

（2）因为$\lg x\geqslant 0$，即$x\geqslant 1$；又$5-x>0$即$x<5$。

由 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x<5 \end{cases}$ 得$1\leqslant x<5$。

所以，函数定义域为$[1,\ 5)$。

（3）因为

$$\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}>0 & (1) \\ x-4\geqslant 0 & (2) \\ 6-x\geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

在此不等式组中，当（2），（3）式成立时，则（1）式自然成立，所以其解为$4\leqslant x\leqslant 6$，即函数定义域为$[4,\ 6]$。

（4）因为

$$\begin{cases} 9-x^2\geqslant 0 \\ x^2-1>0 \end{cases}\quad \begin{cases} |x|\leqslant 3 \\ |x|>1 \end{cases}\quad \begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 3 \\ x>1\text{或}x<-1 \end{cases}$$

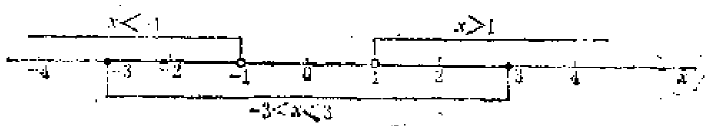

图 1-1

由图1-1得：函数的定义域为$[-3,-1)$，$(1,\ 3]$。

（5）由反余弦函数的定义域，得：