# 数学分析精选习题解析

（下 册）

北京大学数学科学学院

林源渠 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

# 数学分析精选习题解析

# (下册)

林源渠　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

数学分析精选习题解析. 下册 / 林源渠编著. —北京：北京大学出版社，2016. 10

ISBN 978-7-301-27603-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 232056 号

书　　名　数学分析精选习题解析（下册）
　　　　　SHUXUE FENXI JINGXUAN XITI JIEXI (XIA CE)

著作责任者　林源渠　编著

责 任 编 辑　潘丽娜

标 准 书 号　ISBN 978-7-301-27603-7

出 版 发 行　北京大学出版社

地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址　http://www.pup.cn　新浪官方微博：@北京大学出版社

电 子 信 箱　zpup@pup.cn

电　　话　邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021

印 刷 者　北京大学印刷厂

经 销 者　新华书店

　　　　　890 毫米×1240 毫米　A5　8.75 印张　224 千字
　　　　　2016 年 10 月第 1 版　2016 年 10 月第 1 次印刷

定　　价　28.00 元

# 内容简介

本书是大学生学习“数学分析”课的辅导教材，分为上、下两册，共七章. 上册三章，内容包括：极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学；下册四章，内容包括：级数，多元函数微分学，多元函数积分学，典型综合题解析. 在每一节中，设有内容提要、典型例题解析. 通过精选的典型例题进行分析、讲解与评注，析疑解惑.

本书许多题的解法是吸取学生试卷中的想法演变而得的，特别是毕业于北京大学数学系的、国内外知名的当今青年数学家们在学生阶段的习题课上和各种测验中表现出来的睿智给本书增添了不可多得的精彩. 本书的另外一大特色是：辅导怎样“答”题的同时，还通过“敲条件，举反例”等方式引导学生如何“问”问题，就是如何给自己“提问题”.

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范院校各专业大学生学习数学分析的学习辅导书. 对新担任数学分析课程教学任务的青年教师，本书是较好的教学参考书；对报考硕士研究生的大学生来说，也是考前复习的良师益友.

# 作 者 简 介

**林源渠** 北京大学数学科学学院教授. 1965 年毕业于北京大学数学力学系，从事高等数学、数学分析、泛函分析、线性代数、渐近分析、数值分析、常微分方程、控制论等十余门课程的教学工作，研究方向为反应扩散方程. 在四十余年的高等数学、数学分析的教学工作中，作者对高等数学的解题思路、方法与技巧有深入研究，造诣颇深，有自己的特色. 参加编写的教材有《泛函分析讲义(上册)》《数值分析》《数学分析解题指南》《数学分析习题集》《高等数学精选习题解析》《泛函分析学习指南》等.

# 目　　录

# 第四章 级　数

## 内容提要

本章所考虑的数项级数都假定为实级数, 即由实数项组成的无穷级数. 对于数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称 $S_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 $n$ **项部分和(简称项部分和)**.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ 存在, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的, 并称 $s$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和, 记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$; 若相反的情形, 就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的.

### 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

### 2. 柯西 (Cauchy) 收敛准则

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使对一切满足条件 $m > n \geqslant n_0$ 的 $m$ 和 $n$, 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

### 3. 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

**4. 收敛级数的性质**

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $c$ 为任意实数;

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

**5. 正项级数**

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为非负的或正项的, 是指对于每个 $n$, 分别有 $a_n \geqslant 0$ 或 $a_n > 0$ . 就非负级数而言, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ 意味着级数收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ 意味着级数发散.

**6. 正项级数的判别法**

(1) 比较判别法.

设 $n \geqslant N$ 时, 有 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, 那么,

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛(“大头” 收敛} \Rightarrow \text{“小头” 收敛);} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{发散(“小头” 发散} \Rightarrow \text{“大头” 发散).} \end{cases}$$

(2) 比较判别法的极限形式.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, 则

$$\begin{cases} \text{当} k = 0 \text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{收敛} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛;} \\ \text{当} k = +\infty \text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{发散} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散;} \\ \text{当} k \neq 0, +\infty \text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{与} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{同敛散性.} \end{cases}$$

(3) 比值判别法.

给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k$, 则

$$\begin{cases} \text{当}k<1\text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛;} \\ \text{当}k>1\text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\text{发散;} \\ \text{当}k=1\text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\text{可能收敛也可能发散 (此法失效).} \end{cases}$$

(4) 根值判别法.

给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n>0$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=k$, 则

$$\begin{cases} \text{当}k<1\text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛;} \\ \text{当}k>1\text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\text{发散;} \\ \text{当}k=1\text{时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 可能收敛也可能发散 (此法失效).} \end{cases}$$

(5) 柯西积分判别法.

设 $f(x)$ 是定义在 $x>1$ 上的非负、单调递减的连续函数, 记 $a_n=f(n)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散性.

**7. 任意项级数**

有无穷多个正项和无穷多个负项的级数称为**任意项级数**. 特别地, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, 其中 $a_n>0$, 称为**交错级数**.

对于交错级数, 有下面的简单定理.

① **莱布尼兹 (Leibniz) 定理**　若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, 其中 $a_n>0$, 满足 $a_n\geqslant a_{n+1}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\leqslant a_1$.

② (尾部决定性)　数项级数不会因为改变有限项的值而改变其敛散性.

**8. 阿贝尔 (Abel) 判别法**

若数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足

① $\{b_n\}$ 是递减的正数数列;

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**9. 狄利克雷 (Dirichlet) 判别法**

若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

① $\{b_n\}$ 是递减数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

② $\exists M$, 使得 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M\,(n = 1, 2, \cdots)$,

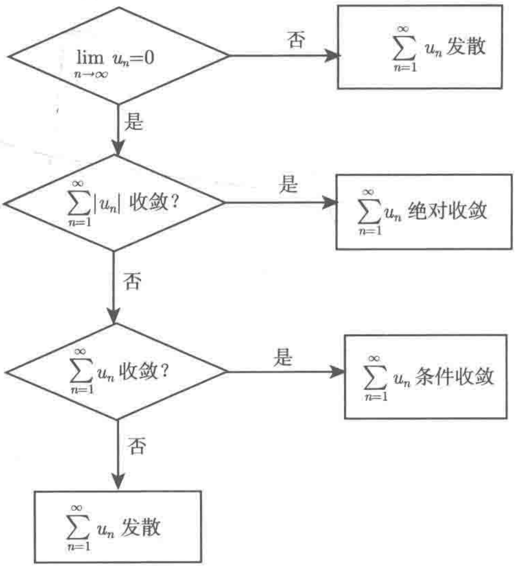
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**10. 绝对收敛与条件收敛**

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

**定理** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

收敛、绝对收敛、条件收敛、发散之间的关系如下:



**11. 函数级数的概念**

形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的级数称为**函数项级数**, 这里级数的项 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是某个变量的函数. 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的 $x$ 值的全体所组成的集合称为此级数的**收敛域**, 而称函数 $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和**, 其中 $x$ 属于这个级数的收敛域.

**12. 函数级数一致收敛的概念**

若函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ (x\in X)$, 且对 $\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \quad x\in X,$$

则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $X$ 上**一致收敛**于 $f(x)$, 记为 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若记 $M_n=\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, 显然

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \Longleftrightarrow M_n\to 0\,(n\to\infty).$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $X$ 上一致收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $X$ 上**一致收敛**.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $X$ 上一致收敛的充分必要条件为: $\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时, 对 $\forall p\in\mathbb{N}$ 及 $x\in X$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

**13. 函数级数一致收敛判别法**

(1) 魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法 ( M 判别法).

若 $|u_n(x)|\leqslant M_n\ (\forall x\in X)$, 且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n<+\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $X$ 上一致收敛.

(2) 狄利克雷 (Dirichlet) 判别法.

若

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M, \quad \forall x \in X,$$

又 $\forall x \in X$, 序列 $\{u_n(x)\}$ 单调且 $u_n(x) \rightrightarrows 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) b_n(x)$ 在 $X$ 上一致收敛.

(3) 阿贝尔 (Abel) 判别法.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $X$ 上一致收敛, 又 $\forall x \in X$, 序列 $\{u_n(x)\}$ 单调且 $|u_n(x)| \leqslant M\ (\forall x \in X)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) b_n(x)$ 在 $X$ 上一致收敛.

(4) 阿贝尔 (Abel) 变换.

设 $\alpha_i, \beta_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是两组数, 令 $A_p = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i$, $p = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = A_m \beta_m + \sum_{i=1}^{m-1} A_i (\beta_i - \beta_{i+1}).$$

(5) 狄尼 (Dini) 定理.

若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$, 且 $\forall x \in [a, b]$, $\{f_n(x)\}$ 为单调数列, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

**14. 一致收敛函数级数性质**

若 $u_n(x) \in C[a, b]\ (n = 1, 2, \cdots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则有

① 和函数连续定理:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in C[a, b] \quad ([a, b]\text{换成}\,(a, b)\ \text{也对}).$$

② 逐项积分定理:

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

③ 逐项微分定理:

若 $u_n'(x) \in C[a,b]$ ,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

**15. 泰勒 (Taylor) 级数**

若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有各阶有穷导数, 则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的**泰勒 (Taylor) 级数**.

$f(x)$ 在区间 $(x_0-R, x_0+R)$ 内等于它的 Taylor 级数的和函数的充分必要条件是: 对一切满足 $|x-x_0|<R$ 的 $x$ 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad 其中 R_n(x) 是 \text{ Taylor 余项}.$$

此时称 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的邻域内可展成 Taylor 级数, 即

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

上式右端为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的 **Taylor 展开式**或**幂级数展开式**.

在实际应用中, 为了简单起见, 取 $x_0=0$, 这时的 Taylor 级数

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

称为**麦克劳林 (Maclaurin) 级数.**

应当注意的是, 一个函数的 Taylor 级数并不一定收敛, 并且即使收敛也不一定收敛于这个函数.

**16. 傅里叶 (Fourier) 级数**

(1) Fourier 级数的概念.

设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3\cdots,$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

(2) Fourier 级数的收敛性.

**定理**(狄利克雷 (Dirichlet) 定理)　设$f(x)$是以$2\pi$为周期的周期函数, 如果它满足条件:

① 连续或只有有限个第一类间断点;

② 只有有限个极值点,

则$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 且

当$x$是$f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于$f(x)$;

当$x$是$f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于$\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

当$x$ 为端点$x=\pm\pi$ 时, 级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

(3) 奇、偶函数的 Fourier 级数.

设 $f(-x) = f(x)$, 则

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3\cdots,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2\cdots,$$

此时, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx.$$

由此可见, 偶函数的 Fourier 级数是余弦级数.

设 $f(-x) = -f(x)$, 则

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3\cdots,$$

此时, 记为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

由此可见, 奇函数的 Fourier 级数是正弦级数.

## 典型例题解析

**例 1** 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足下述条件:

① $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_n)$ 对 $n$ 有界,

② $a_n$ 单调下降趋于零.

求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

**证明** 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ , 并设 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - a_n)$ 的上界为 $M$, 即

$$S_n - na_n \leqslant M.$$

这样, 只要证 $\{na_n\}$ 有界. 为此, 用反证法. 若 $\{na_n\}$ 无界, 则对 $\forall k$, $\exists n_k$, 使得 $n_k a_{n_k} > k$. 但 $a_n$ 单调下降趋于零, 所以当 $m > n_k$ 充分大时, 必有

$$a_m < \frac{k}{2n_k}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_m) = \left(\sum_{k=1}^{n_k} + \sum_{k=n_k}^{m}\right)(a_k - a_m) \geqslant \sum_{k=1}^{n_k}(a_k - a_m).$$

又因为 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n_k} > \dfrac{k}{n_k}$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n_k}(a_k - a_m) > \sum_{k=1}^{n_k}\left(\frac{k}{n_k} - \frac{k}{2n_k}\right) = \frac{k}{2},$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k - a_m) > \dfrac{k}{2}$. 这样由 $k$ 的任意性知 $\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k - a_m)$ 无界, 而这与已知条件矛盾. 因而 $\{na_n\}$ 有界. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

**例 2** 设 $a_n \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ (a \neq 0)$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right|$ 同时敛散.

**证明** 设 $u_n = |a_n - a_{n+1}|$, $v_n = \left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right|$. 显然, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, 且

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} & & a^2 \\ \| & & \| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n - a_{n+1}|}{\left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right|} & = & \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}a_n| \end{array}$$

从此 U 形等式串的两端即知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a^2 \neq 0.$$

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时敛散, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right|$ 同时敛散.

**例 3** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_n > 0$, 且 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 单调递减. 求证: $\{a_n\}$ 单调递减, 且

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

**证明** 由级数收敛的必要条件知, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n+1}) = 0$, 又已知 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 单调递减, 所以 $a_n - a_{n+1} \geqslant 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递减.

为了证明

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty,$$

只需证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = 0.$$