孙维刚初中数学

第二版

孙维刚/编著

一位普通中学的数学老师，

带领学生创造的学习奇迹！

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

孙维刚初中数学

第二版

孙维刚/编著

一位普通中学的数学老师，带领学生创造的学习奇迹！

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是著名的数学教育家孙维刚老师的著作，是孙老师三轮实验班的教材。本书立足于对基础知识的分析把握，以及对方法和思想的指导，各章由学习指导和例题两部分组成，在详述概念后，引申概念外围的规律、方法以及解题思考规律。书中提出，学好数学必须站在系统的角度看问题，力求一题多解、多解归一（结论一个）、多题归一（善于总结），善于用"动"的观点思考问题（做到"风物长宜放眼量"），这对开启学生的数学智慧，掌握科学的学习方法、思维规律，提高学习效率有很大的帮助。

本书可作为中学教师和学生的辅导用书或自学教材。

图书在版编目（CIP）数据

孙维刚初中数学/孙维刚编著. —2 版. —北京：北京大学出版社，2015.6

ISBN 978-7-301-25270-3

Ⅰ.①孙…　Ⅱ.①孙…　Ⅲ.①中学数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 300988 号

书　　名	孙维刚初中数学（第二版）
著作责任者	孙维刚　编著
策划编辑	温丹丹(wddpup@126.com)
责任编辑	温丹丹
标准书号	ISBN 978-7-301-25270-3
出版发行	北京大学出版社
地　　址	海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn　　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zyjy@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765126
印 刷 者	三河市博文印刷有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　18.5 印张　405 千字
	2005 年 1 月第 1 版
	2015 年 6 月第 2 版　2015 年 6 月第 1 次印刷（总第 17 次印刷）
定　　价	39.00 元

本 书 编 委 会

第二版序

孙老师离开我们已经十三年了，然而人们对孙老师的爱戴之情并未随着时间的流逝而淡忘。吉林大学附属中学的崔贞姬校长带领全校老师以数学为龙头全面学习研究孙维刚老师的教育教学思想，自2002年至今，一如即往。每年，我去吉大附中，常有一种“回家”的感觉，大概就是因为在这里总能找到孙老师的影子吧。

孙老师一生坎坷，但他无怨无悔。孙老师把全部的智慧和爱献给了学生，献给了教育，他的事迹感染着很多人，也影响着很多人。中国人生科学学会、全国生命教育工作委员会的边疆秘书长，正是被这种精神所激励，带领着他的团队向全国各地宣传、推广孙老师的教育成果，十多年从未间断。

孙老师虽然走了，但他的书留给了我们，他的影响还在继续，他的生命仿佛就在我们中间延续。可以说，孙老师的书是他教学生涯的一个缩影。

孙老师书中的题不是很多，因为他反对题海战术，他要求他的学生每天必须保证8个小时以上的睡眠时间，他舍不得孩子们把有限的时间花费在毫无意义的“重复性劳动”里。孙老师强调“题不在多，而在于精”，无论课上、课下还是他的书中，每道题的臻选无不凝聚着孙老师的智慧与心血。他说“做题不是目的，目的是造就一个学生强大的大脑”。

孙老师强调做题要学会“一题多解”。课堂上，孙老师从来都不惜花费时间，常常为一道题，引导、启发学生尽可能想出更多的方法；坚持下“换个角度看问题”的能力也就由然而生了。同时，孙老师还坚持“多解归一，多题归一”的思想，让学生学会掌握在纷繁的事物中找出其内在的联系，并发现其中的规律。

虽然孙老师书中的题没那么多，但他坚持“凡事一定要问为什么”，在他的《孙维刚谈立志成才——全班55%怎样考上北大、清华》一书的第二篇“学习方法——写给同学们”中，开篇就讲：世上没有“没有为什么的事物”。我在家中也常听到孙老师的这句话，还常听他说：“任何事物只要存在就有它的合理性”。在孙老师的课上，学生们经常在他一遍遍“为什么”的穷追猛打中，“思潮如涌”“八方联系”地寻找答案，一道题往往能找到十几二十种解法。

当您阅读这本书时，请一定要仔细阅读书中“作者的话”，孙老师电话中再三叮嘱仿佛又在耳边响起。

对于本书超出“大纲”的部分内容，孙老师生前是这样解释的：“那是留给喜欢数学，热爱数学，将来可能从事数学研究的孩子们准备的一把梯子。”

为什么要学数学？怎样学数学？如何才能学好数学？这些才是孙老师书中最想要告诉您的。

本次修订过程中，得到了北京大学出版社职业教育编辑部的全体同志及北京市第二十

二中学李红老师和她的学生们的支持和帮助,在此一并表示感谢,更要感谢广大读者对孙维刚老师的爱戴。

王海亭

2015 年 5 月

原版修订说明

幸蒙老师和同学们的关怀，拙述《初中数学》《高中数学》两本书，至今已 6 次印刷，逾 16 万册。

其间，我受到各地老师和同学们热情来信的勉励和盛情建议，使两本书修订再版。

在保留原书主体的基础上，两书都在解题思考规律的应用，即提高解题能力方面进行了补充。《初中数学》在一些主要章节，补充了一些新的例题分析；《高中数学》则补充了“第四篇解题思考分析的再示范”。

《初中数学》书中某些知识，在新的九年义务教育大纲中列为选学或不学，本次再版，仍予保留。我的考虑是：

（1）读者中许多学生初中毕业后要继续学习，特别是要升入普通高中，书中对这些少量知识的学习指导，还是很有价值的；

（2）本书立足于对知识分析把握的指导，立足于对方法和思想的建议和指导，所以阅读这些部分是有益的。

另外，想多说几句的是关于如何学好数学的问题。

数学，可以说是学生投入时间最多的一门课程。但许多同学却为并没取得理想效果所苦，部分同学甚至陷入题海，昏天黑地，以至望而却步。

究其原因，在于方法不得要领，或根本不当。

作者认为，学好数学，首重概念扎实、基础知识牢固，这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”“牢固”？又怎样才能“扎实”“牢固”？则恐多有差异，甚至大相径庭了。

汽车飞驰，离不开动力的心脏——发动机，但必须通过变速箱、大轴，最后作用到轮子上。解数学题亦如此，概念、基础知识（发动机）要发挥作用，也必须靠一连串连接装置，即对概念的理解、引申，概念外围的规律、方法以及解题思考规律，这些在课本上是没有的。

学好数学，还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干，又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”？

而最根本的出路，是在学习过程中提高了能力，完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切？本书就是要向广大同学和教师展示其途径。

限于水平，书中疏误仍将很多，诚请批评指正，不胜感谢。

孙维刚

1999 年 2 月于北京

作者的话

数学是一门很重要的基础课.如何学好数学,这是许多中学生共同关心的问题.为此,本书就初中代数和平面几何的学习,结合自己多年的教学经验和具体实例,对如何学、学什么的有关方法和要求作了论述,供同学们学习参考.

一、明确学习数学的目的

明确目的,这是做好一件事情的前提.

学习数学的目的是什么呢?

人们常说,要把数学学好,因为它是学好许多功课的基础.但这个"基础"指什么?在理解上,差别就大了.

有人说,初中化学里计算化合物组成的百分比、利用化学反应方程式的计算,都要利用比例,这是数学里学的;高中化学里有关质量分数、物质的量浓度的计算,也要用数学;而物理中,只要把公式确定好了,余下的工作就是公式变形及代入数值进行计算,这些都是数学的问题.所以,数学学不好,物理、化学也学不好,因此,数学是基础.

这种理解是片面和肤浅的,只把数学视为一种工具(尽管是非常重要的工具)是不利于把数学学好的.

恩格斯指出:数学,是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学.

近年来,已经有人提出:数学,是研究人类的存在形式和思维方式的科学.它既不能完全包含于社会科学之内,也不能完全包含于自然科学之内.科学的分类,已经不能只分为自然科学和社会科学两大类,还应该有第三大类——数学.

许许多多优秀的学生,正是在学习数学的过程中,自觉或不自觉地优化了自己的思维方式,培养和提高了能力,发展和完善了自己的素质.说句通俗话,把不聪明的自己变得聪明了起来,让聪明的自己更加聪明,从而使他们成了各个领域内的佼佼者.

基于上述认识,就产生了下面的学好数学的具体做法.

二、深入本质,渗透思想,升华观点

学习中要"抓住本质",这是许多人的经验.但什么是"本质",怎样去抓住它,在认识上人们又有很大差距.

有人认为,对于定义、定理、公式,不仅要熟记它们的文字表述,还要准确无遗漏地掌握它们的构成,这就是"抓住本质"了.例如,圆的定义"在平面中,到一个定点的距离等于定长

的点的集合”中,有三个要素:“平面”“定点”“定长”.

不能否认,这种认识并无错误,但它绝未达到理想的境界.一方面,这样学下去,随着新的概念、知识的不断进入,记忆上不堪重负,因而要经常复习,否则,常常会学新忘旧,因为它们在脑子中“各自为政”,没有浑然一体嘛;进一步说,这个学习过程,对一名学生在思维建设上是没有促进作用和价值的.

那么,在学习知识上,正确的做法是什么呢?

应该从系统的角度学习知识,置知识于系统中,着眼于知识之间的联系和规律,从而深入本质,因为联系和规律就是本质.着眼于数学思想的渗透.

举例做个说明.

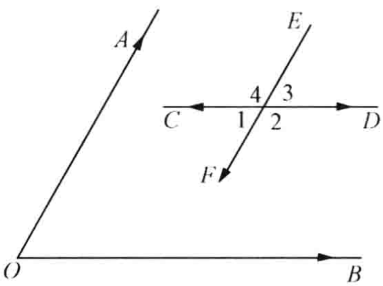

图 0-1

初中《几何》中有一条定理:如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边,那么这两个角相等或互补,如图 0-1 所示.

当 $CD /\!/ OB$、$EF /\!/ OA$ 时,$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 和 $\angle AOB$ 相等或互补.

但何时相等,何时互补呢?没有明确说明.

这时,如果我们把图 0-1 中 5 个角的边的射线方向都加以标注,则不难得到结论:当两组平行边的射线方向全相同或全相反时,这两个角相等;当两组平行边的射线方向一同一反时,这两个角互补.即

$$\angle AOB = \angle 3,\ \angle AOB + \angle 2 = \angle AOB + \angle 4 = 180^\circ,\ \angle AOB = \angle 1.$$

这样,就发掘了知识之间的联系和规律,加深了理解.

进一步,如果再把两条射线方向相同的关系规定为“+”,方向相反的关系规定为“-”;把两个角相等的关系规定为“+”,互补的关系规定为“-”.那么,初一《代数》中有理数乘法的符号法则:“+”“+”得“+”,“+”“-”得“-”,“-”“+”得“-”,“-”“-”得“+”.不正描述了本定理确切的结论吗!

认识又加深了,大自然中的联系竟如此微妙!

再进一步.如果将直线 EF 平移,使它与 OA 所在直线重合,如图 0-2 所示,由前所述,当然继续有 $\angle AOB = \angle 3$,$\angle AOB + \angle 2 = 180^\circ$,$\angle AOB = \angle 1$.但这时,上述关系,不正分别是“两直线平行($CD /\!/ OB$),则同位角相等($\angle AOB = \angle 3$)”“两直线平行($CD /\!/ OB$),则同旁内角互补($\angle AOB + \angle 2 = 180^\circ$)”和“两直线平行($CD /\!/ OB$),则内错角相等($\angle AOB = \angle 1$)”吗!

微妙的联系正向纵深发展!

在图 0-2 的基础上,把 CD 平移,使之与 OB 所在直线重合.那么,$\angle AOB$ 和 $\angle 3$ 的相等,不也是“角相等定义”吗!$\angle AOB$ 分别和 $\angle 2$ 及 $\angle 4$ 的互补,不也是平角定义吗!而 $\angle AOB$ 和 $\angle 1$ 的相等,竟然可同时认为是对顶角相等!如图 0-3 所示.

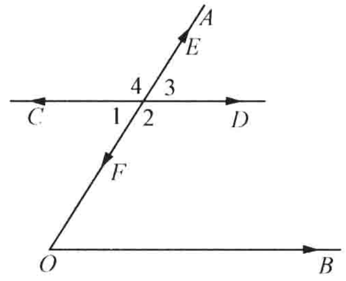

图 0-2

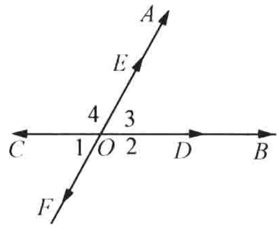

图 0-3

知识间的联系,竟如此令人意想不到,却又如此合情合理.

分散在初中《几何》第一册里的有关角的 40 多条定义、定理中的 6 条定义、定理(角相等定义、平角定义、对顶角相等、两直线平行则同位角相等、同旁内角互补、内错角相等),竟全包括在一条定理(如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边,那么这两个角相等或互补)内. 事实是,这一条定理是那 6 条定义、定理的联合推广;那 6 条定理则是这一条定理的特例. 因为,它们原本是一个系统. 这种学习方法,就是置知识于系统中,着眼于知识之间的联系.

它的优势在哪里呢?

首先,这个融会贯通的过程,使我们透过繁杂的现象,抓住了本质,同时简化了记忆.

更重要的是,接触了一种崭新的认识问题的思想方法: 由寻找联系入手,运用规定(定义)平移、变换等数学思想和从“特殊到一般,又从一般到特殊”的方法,把个别、离散的现象构造成浑然一体的系统,这已经标志着能力的提高和素质的发展了. 以这种提高和发展,去学习、去解题,将与过去不可同日而语. 因为解题过程的本质,就是以敏锐的观察、分析,去发现和建立已知条件和结论之间的联系.

三、“头悬梁,锥刺股”就是刻苦吗

现在有很多老师们给学生多次讲过古人苏秦“头悬梁,锥刺股”的故事,以勉励学生像苏秦那样发愤学习. 不少同学也常常以“头悬梁,锥刺股”的精神自勉、自激,以此来要求自己,上课时,瞪大了眼睛,张开自己脑中的“口袋”,把老师讲的每句话、写出的每个字,统统装进自己的“口袋”中;课后认真完成作业,按时交作业,发下来有错必改,做完老师留的作业,还要自己再找题做,熟能生巧嘛! 做完作业,还要主动复习、经常复习,“顽强”地和疲劳、瞌睡做“斗争”,直到把笔记或书上划出的重点啃得滚瓜烂熟.

这算不算刻苦学习了呢?

我以为,精神诚可贵,效果未必好. 因为,学习本身也是科学. 在课堂听讲、做作业、复习这三个环节上,都要科学、有成效地刻苦学习,这应表现为如下的努力.

(一) 超前思维,向老师挑战

课堂上,努力争取想在教师讲授的前面. 定理、公式,争取自己推导出来;例题,争取自

己先分析、解答;进而,当命题的条件刚刚写出,自己就能去猜想它的结论;一个新的概念出现时,自己就试着去定义它;甚至,随着课程的进行、知识的发展,自己设想,又该提出什么命题了,又该定义什么名词了……

当然,高水平的教师在讲课时,应该给学生的超前思维留有时间上的余地,甚至创造条件,鼓励和启发学生超前思维;而听课学生的超前思维,又应该和老师密切配合,不能因为自己还没想出来,就充耳不闻老师的讲解,自己另搞一套.

课堂听讲的这种方式的优点在于,例题既然是自己解出来的,定理、公式既然是自己证出来的,当然理解深刻,印象深刻,记忆久远,不易遗忘.即使忘了也不怕,因为本来就是自己推出来的,就再推嘛!省却了许多临考前还要复习背诵的时间.

更重要的是,在这个过程中,培养了能力,在45分钟的课堂上,每当有个短短的一两分钟甚至几分几秒钟的间隙,都要努力去往前想,这种高强度的要求,才是真正的刻苦.这样必能很好地锻炼思维.

“向老师挑战”是什么意思?

上面谈到,课堂上的超前思维过程,常常还没来得及想出来,老师就已经开始讲解了,或者,自己虽想出了结论,但与随即而来的老师的结论或方法不同.这时,不应立即“缴械投降”,还要做些“挣扎”.首先是要问“为什么”,甚至力图否定老师的结论或方法,这样做的结果,如果没有成功,则证明老师是对的,这时再接受老师的结论或方法.由于从反面尝试了“打不倒它”的滋味,自然对这个结论或方法,就有了深刻的体会,从而实现了高质量的理解和消化老师的讲授.如果否定的努力成功了,它的意义,绝不在于一两个结论或方法的改进上,许多出类拔萃的学生的成功,都是在这里埋下了飞跃的种子.

讲三个真实的故事.

➢ 第一个故事.

1988年3月的一次数学课上,我把一道从课外读物上选来的题目,抄在黑板上:

a,b,c,x 都是实数,并且 $a<b<c$,试求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

一部分同学经过思考,提出了如下相同的解法(后来我在北京市数学奥林匹克学校写出此题,大家也是这个解法,当然,也有不少人不会解此题).

首先,运用实数绝对值定义,分情况打开绝对值号,得

$$\text{原式}=\begin{cases}-(x-a)-(x-b)-(x-c),(x\leqslant a)\\x-a-(x-b)-(x-c),(a<x\leqslant b)\\x-a+x-b-(x-c),(b<x\leqslant c)\\x-a+x-b+x-c,(x>c)\end{cases}$$

整理,得

$$\text{原式}=\begin{cases}a+b+c-3x,(x\leqslant a)\\-a+b+c-x,(a<x\leqslant b)\\-a-b+c+x,(b<x\leqslant c)\\3x-(a+b+c),(x>c)\end{cases}\qquad(\bigstar)$$

在每一段上进行分析.

(1) 当 $x\leqslant a$ 时,由于 $a+b+c$ 是定值,则当 x 取得最大值 a 时,得到这一段上原式的最小值为 $a+b+c-3a=b+c-2a$.

(2) 当 $a<x\leqslant b$ 时,由于 $-a+b+c$ 是定值,则当 x 取最大值 b 时,得到在这一段上原式的最小值为 $-a+b+c-b=c-a$.

(3) 当 $b<x\leqslant c$ 时,由于 $-a-b+c$ 是定值,则当 x 取最小值时,得到在这一段上原式的最小值,但 x 在这一段上无最小值,当 $x>b$ 时,原式在这一段上的最小值大于 $-a-b+c+b=c-a$.

(4) 当 $x>c$ 时,由于 $-a-b-c$ 是定值,则当 x 取最小值时,原式得到在这一段上的最小值. 但 x 在这一段上无最小值,当 $x>c$ 时,故原式在这一段上的最小值大于 $3c-(a+b+c)=2c-a-b$.

比较(1)～(4)的结果,由于 $a<b<c$,则 $c-a<c-a+(b-a)=b+c-2a$,同时,$c-a<c-a+(c-b)=2c-a-b$,故所求原式的最小值,在第Ⅱ段上取得,为 $c-a$,此时,$x=b$.

为了显示数形结合思考的优越性,我在黑板上,写出了我的函数解法(由于我在教学上从系统出发,着眼于联系、规律,着意于能力、素质,课程进度自然加快,初二结束时,学完初三功课,高一结束时,学完高三功课,所以,此时已学到二次函数了).

从上面★处开始,改写★式为

$$\text{原式}=\begin{cases}-3x+a+b+c,(x\leqslant a)\\ -x-a+b+c,(a<x\leqslant b)\\ x-a-b+c,(b<x\leqslant c)\\ 3x-(a+b+c),(x>c)\end{cases}$$

则函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的图象如图 0-4 所示.

显然 $f(x)$ 的图象在 $x=b$ 时为最低点,即 $x=b$ 时,$f(x)$ 得到最小值,为

$$f(b)=|b-a|+|b-b|+|b-c|=c-a.$$

这个解法的前半部分与前面的解法相同,有个烦琐的打开绝对值号的过程,但后半部分直观性强,简捷.

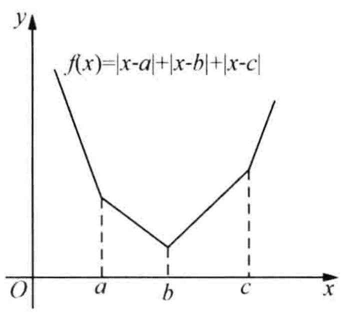

图 0-4

这时,李毅同学举手了,“孙老师,我的解法比您的还简单.”

他走上黑板,画了一条数轴,如图 0-5 所示.

然后李毅说,$|x-a|$表示点 x 和点 a 之间的距离,$|x-a|+|x-b|+|x-c|$表示了点 x 到点 a、b、c 的距离之和. 当然,这三条线段没有重叠部分时,这和最小,此时 $x=b$,这最小和为点 a、c 的距离,为$|a-c|=c-a$. 如图0-6 所示. 多么简捷,多么清新,漂亮极了!

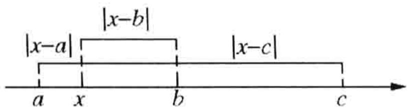

图 0-5

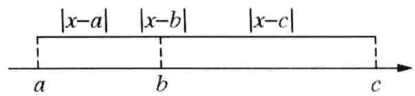

图 0-6

而且,他还加以推广,总结出了一般规律:

- 当给出 $a<b<c<d$ 时,x 取点 b、点 c 间(包括 b、c)的任一值,原式皆得最小值,从图 0-7上易见,它为

$$(d-a)+(c-b);$$

- 当给出 $a<b<c<d<e$ 时,取 $x=c$ 时,原式得最小值,它为$(e-a)+(d-b)$;

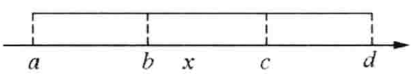

图 0-7

依次类推,当 $a,b,c,d,\cdots$有奇数个时,使 x 为中间的 1 个;当 $a,b,c,d,\cdots$有偶数个时,使 x 为中间的两个之间的任一值(包括这两个值).

瞧,对于一个 14 岁的孩子,不是难能可贵吗!

1989 年 4 月,李毅同学在全国初中数学联赛中,获北京赛区一等奖,并越级参加北京市高中一年级数学竞赛,再获一等奖. 1989 年 10 月,刚入高一的李毅同学,参加 1989 年度全国高中数学联赛,以两试满分获得全国和北京赛区第一名;1990 年度获二等奖;1991 年度再获一等奖和北京赛区第一名;1992 年度,被免试录取入北京大学物理系.

➢ 第二个故事.

“向老师挑战”,也包括“向课本挑战”.

事情发生在 1987 年 6 月,彭壮壮同学正读初一,刚刚 13 岁,当时我们正学习“算术根的性质”.

我介绍了课本上对根的性质的证明方法.

二次算术平方根的性质

(1) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a,b\geqslant 0)$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,b>0)$.

【证明】

(1) 当 $a,b\geqslant 0$ 时,因为

$(\sqrt{ab})^2=ab,(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$,及 $\sqrt{ab}\geqslant 0,\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\geqslant 0$,

所以 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

(2)当 $a\geqslant 0,b>0$ 时,因为

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b},\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b},\text{及}\sqrt{\frac{a}{b}}\geqslant 0,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0,$$

所以 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

这时,彭壮壮同学举手,到黑板前写出了运用(1)的结论,对于(2)的一种全新的证明.

当 $a\geqslant 0,b>0$ 时,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{\frac{a}{b}\cdot b}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

这个巧妙的证明,我还没有在任何书上见过,但它的价值,并不止于此. 彭壮壮是有意识地应用了"把新课题归结到旧知识的基础上"这个解决问题的基本思想.

半年后,当学到"对数性质"时,班上广大同学都运用这个思想,迅速想出了优于课本上的对于"商的性质"的证明,如下所示:

商的对数的性质

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.\quad (M,N,a>0,\text{且 }a\neq 1)$$

- 课本上的证明:

当 $M,N,a>0$,且 $a\neq 1$ 时,设

$x=\log_a\frac{M}{N},y=\log_a M,z=\log_a N.$

由对数定义可得,$a^x=\frac{M}{N},a^y=M,a^z=N$,

所以,$a^x=\frac{a^y}{a^z}=a^{y-z}$,

则 $x=y-z$,

即 $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.$

- 而我们班上多数同学的证明为

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a\frac{M}{N}+\log_a N-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}\cdot N-\log_a N=\log_a M-\log_a N.$

简洁明快! 谁的功劳? 是基本数学思想武装了头脑的结果,追根溯源,当归功于"向老师挑战".

1988 年,彭壮壮同学又应用这个思想和方法,对高等数学中的一门课程《实变函数》"集合论"中的一道习题,借助于"交"对于"并"的分配律的结论和狄摩根公式,漂亮地完成了"并"对于"交"的分配律的证明. 由于中学同学知识所限,这里不再予以介绍.

1988 年,彭壮壮在北京市初二数学竞赛中获二等奖;1989 年 4 月,他获全国初中数学联

赛北京赛区二等奖;1990 年,学完中学数学后赴美国探亲;1991 年获全美数学竞赛前 25 名,即取得进入美国数学国家集训队资格(因不是永久居住者,未实际参加).继而,以一篇数学论文《求解 P 进制下的分数》获“美国西屋科学奖”(美国高中学生最高水平竞赛,俗称“少年诺贝尔大奖”),并被哈佛大学免试录取,对此事,中美两国报刊多有报道.

“向老师挑战”中,虽有的不是胜利者,但“难酬蹈海亦英雄”,常常会使自己更上一层楼.

➢ 第三个故事.

1987 年 4 月在一堂平面几何课上,我说:“有人说,直线是半径无穷大的圆,作为一句不严格的话,这话不无道理.”

我从两个角度做了解释.

● 一种解释:在高等数学里,曲线上各点的曲率,等于在这点的曲率半径的倒数,即曲率 $k=\dfrac{1}{R}$,而直线各点处的曲率 $k=0$,只能$R\to\infty$,当然,这里并不严谨.

● 另一种解释:我画了一幅图,如图 0-8 所示,显然,圆弧的弯曲程度越接近直线时,圆心越向下方远离而去,通过取圆弧上面两个点连接后,做所得线段的垂直平分线,求交点(圆心),易于看出这种趋势.而当圆弧完全变成直线后,由于所做垂直平分线互相平行,没有交点,如果把它们看成在下方无穷远处相交,那么圆心无穷远,半径不就无穷大了吗!当然,这也并不严谨.

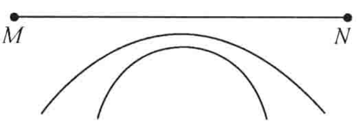

图 0-8

这时,有两个同学举起了手.

一是李毅同学,他对曲率 $k=\lim\limits_{\Delta_s\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta_S}$提出质疑.待我解答完毕后,年仅 13 岁的庄孜昀同学仍举着手,他画了这样的图(见图 0-9)后说:“如果这些圆弧在直线 MN 的上方,弯曲程度逐渐接近直线,仍用您刚才的解释,那么,圆心岂不是要跑到直线 MN 的上方的无穷远处吗?然而一个圆,怎么能有两个圆心呢”!

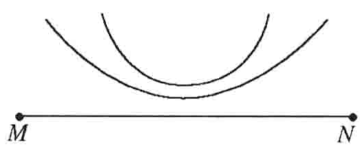

图 0-9

问得多么好!

1988 年,庄孜昀同学在北京市初二数学竞赛中获三等奖.1989 年,他又获得北京市初中化学竞赛一等奖和 1989 年全国初中数学联赛北京赛区三等奖.1991 年,他获得全国高中物理竞赛北京赛区二等奖.1992 年高考中,他以北京市东城区理科考生“状元”的成绩,考入清华大学无线电系.

(二) 题不求多,但求精彩,要求“知人善用”

做习题,是学好数学的必要过程;也是培养能力、发展素质的重要环节.

因为解答习题要应用数学概念、定理公式等数学知识,因此解习题一方面有助于重温这些概念、定理公式;另一方面,也有助于检查对概念、定理公式的理解是否准确,有无遗漏

或曲解,从而加深对它们的理解和掌握.

同时,解答习题的过程,是应用学过的知识,去解决以“新面孔”出现的课题的过程,它一方面将训练应用知识的能力;另一方面,习题的面孔是“陌生”的,需要观察它的特点,进行分析,作出判断,而后才能对选择哪个方向、应用哪些知识去解决它,作出决策;并且,在进入解决的途中,随时根据情况的发展,或做些调整,或修正原来的方向,这是一个复杂的思维过程,一个有效培养能力的过程,一个可以有力地训练思维、完善素质的过程.

但是,许多同学做了不少题目,上述两个方面收获甚少,这是为什么呢?

这里恐怕主要有两个原因:其一,是否从思想上明确了如上所述的做题目的;其二,是否在用科学的态度和方法去做题.

什么是科学的态度和方法呢?

1. 题不求多,但求精彩

这有点儿像吃饭,吃不饱不好,但过饱,甚至饱了还要往肚里塞,不但后塞进去的食物不会吸收,甚至会引起肠胃功能紊乱,连开始吃进去的食物都不能消化吸收. 同时,营养价值很低的食物吃很多,不如吃适量的高营养的食物.

从这个意义上,对于题目的选择可提出如下的建议:

(1) 题目本身应无错误;

(2)不要选只是对概念、定理、方法进行复述的题目,这种题目,对于理解知识、培养能力,几乎无作用;

(3) 题目从解法上看,亦是充满活力,不要死气沉沉、只是烦琐地堆砌公式或冗长无味;

(4) 同一类型的题目,解透一两个有代表性的即可,不必大量重复;

(5) 不问津那些对于概念无理解价值、在思考方法上远离一般规律的偏题、怪题.

题目选精彩了,更重要的是练习的方法要对头,这样才能达到预期的目的,即“知人善用”.

练习的方法怎样才能算对头?

2. 讲究做题的方法

(1) 一题多解,多解归一,多题归一.

对于“一题多解”,顾名即可思义. 需要说明的是,如果只是追求多解的数量,每个求解不作深入的探讨,这样的一题多解,从收效和它所花费的时间相比,是太不值得的.

如果不同角度的解法,在思路上拉开的距离较大,应用的知识改换较多,将会加深对题目本质的理解、对每个解法本质的理解、对所用概念、定理公式及相互联系的理解. 这样的一题多解,才是有价值的. 例如前面对于“已知 a、b、c、x 都是实数,并且 $a<b<c$,试求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值”的一题的三种解法.

“一题多解”刚刚是第一步,还要“多解归一”.

什么是“多解归一”?

它是指把多种解法相互比较,进行抽象,挖掘本质,达到赏玩于股掌之上的程度,举两

个例子.

➢ 第一个例子.

已知:如图 0-10 所示,在梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,AB、DC 交于 E,$EG/\!/AC$,$EH/\!/BD$,G、A、D、H 共线.

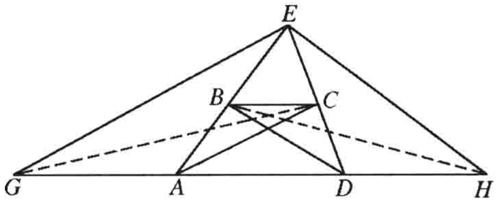

图 0-10

求证:$GA=DH$.

【证明】

证法一　连接 GC,HB.

因为　$EG/\!/AC$(已知),所以

$S_{\triangle ACG}=S_{\triangle ACE}$,(同底等高的三角形,面积相等)

同理,$S_{\triangle DBH}=S_{\triangle DBE}$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DCB}$.

因为　$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCE}$,$S_{\triangle DBE}=S_{\triangle DCB}+S_{\triangle BCE}$,所以

$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$,(等量加等量,和相等)

所以　$S_{\triangle ACG}=S_{\triangle DBH}$.(等量代换)

又因为　$AD/\!/BC$,(已知)

所以　点 C 和点 B 到直线 $GADH$ 的距离相等,设为 h.

由于　$S_{\triangle ACG}=\frac{1}{2}GA\cdot h$,　$S_{\triangle DBH}=\frac{1}{2}DH\cdot h$,

故　$GA=DH$.

证法二　设 BC 所在直线分别与 EG、EH 交于 M、N,连接 AM,DN,如图 0-11 所示,则由已知,四边形 $ACMG$ 和 $DBNH$ 都是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形).

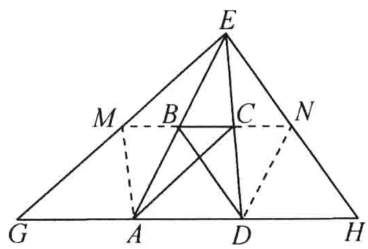

图 0-11

则　$S_{\square ACMG}=2S_{\triangle ACM}$,　$S_{\square DBNH}=2S_{\triangle BDN}$.

又因为　$AC=AC$,$EG/\!/AC$(已知),所以

$S_{\triangle ACM}=S_{\triangle ACE}$.(同底等高的三角形等积)

同理,$S_{\triangle BDN}=S_{\triangle DBE}$.

然后用证法一中的过程,可得

$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DBE}$,

于是　$2S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle DBE}$.(等量公理)

所以　$S_{\square ACMG}=S_{\square DBNH}$.(等量代换)

又因为　$AD/\!/BC$(已知),所以

当$\square ACMG$ 和$\square DBNH$ 分别以 GA 和 DH 为底时,其高相等,设为 h.(平行线间距离处处相等)

由　$S_{\square ACMG}=GA\cdot h$,　$S_{\square DBNH}=DH\cdot h$,得到

$GA=DH$.

证法二表面上看,两种证法从一开始添加辅助线,就分道扬镳了,但走到最后,都走到