iCourse · 教材

高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

线性代数

主编　魏福义　杜世平

高等教育出版社

iCourse·教材
高等农林院校基础课程系列

自主创新
方法先行

线性代数

主　编　魏福义　杜世平
副主编　张连宽　李仕红　石立新　朱艳丽
编　委（按姓名拼音排序）
杜世平　李仕红　林利云　石立新　王莉莉
魏福义　张连宽　朱艳丽
主　审　刘金山　张良云

高等教育出版社·北京

内容简介

本书作为全国高等农林院校教材，包括《线性代数》教材（纸质版）和线性代数数字资源（网络版）。纸质版内容包括：矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、向量的内积与二次型、MATLAB 软件的应用；数字资源内容包括：问一问、典型例题、数学家小传、应用案例、习题解答、拓展学习。各章配有适量的习题，书后附有部分习题答案，数字资源有习题详解，便于教师教学和学生学习。

全书以矩阵为主线，以线性方程组为应用背景，在满足教学基本要求的前提下，尽量避免艰深的数学推导，把部分理论证明改为选讲内容，添加了应用实例和 MATLAB 软件介绍。本书深入浅出，理论计算与实际应用相结合，并充分发挥网络优势，引导学生独立思考和自主学习，要求学生在掌握线性代数理论的同时，能用 MATLAB 软件求解线性代数中的相关问题。

本书简洁精练，既可以作为高等农林院校非数学类专业学生的线性代数教材或参考书，也可以作为教师的教学参考书。建议学时：农、林、医、水产及经济管理专业：28 ~32 学时（不含 * 部分），理工科专业 34 ~48 学时。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/魏福义，杜世平主编. --北京：高等教育出版社，2015.12

iCourse·教材.高等农林院校基础课程系列

ISBN 978-7-04-044000-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①魏…②杜… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 246200 号

项目策划 王 瑜 李光跃 陈琪琳 李艳馥 吴雪梅

策划编辑 杨 帆 责任编辑 杨 帆 封面设计 张 楠 责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	河北鹏盛贤印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	850mm×1168mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	8.25	版 次	2015 年 12 月第 1 版
字 数	170 千字	印 次	2015 年 12 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	16.00 元

物 料 号 44000-00

iCourse · 数字课程（基础版）

线性代数

主编　魏福义　杜世平

http://abook.hep.com.cn/44000

登录方法：

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/44000，单击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。
2. 课程充值：登录后单击右上方“充值”图标，正确输入教材封底标签上的明码和密码，单击“确定”按钮完成课程充值。
3. 在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程，单击“进入课程”即可开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：yangfan@hep.com.cn

数字资源　先睹为快

拓展学习　　典型例题　　应用案例

出版说明

“十二五”是继续深化高等教育教学改革、走以提高质量为核心的内涵式发展道路和农林教育综合改革深入推进的关键时期。教育教学改革的核心是课程建设，课程建设水平对教学质量和人才培养质量具有重要影响。2011 年 10 月 12 日教育部发布了《教育部关于国家精品开放课程建设的实施意见》(教高[2011]8 号)，开启了信息技术和网络技术条件下校、省、国家三级精品开放课程建设的序幕。作为国家精品开放课程展示、运行和管理平台的“爱课程(iCourse)”网站也逐渐为高校师生和社会公众认知和使用。截至目前，已启动 2 911 门精品资源共享课和 696 门精品视频公开课的立项建设，其中的 1 000 多门精品资源共享课和 600 多门精品视频公开课已经在“爱课程(iCourse)”网站上线。

高等教育出版社承担着“‘十二五’本科教学工程”中国家精品开放课程建设的组织实施和平台建设运营的重要任务，在与广大高校，特别是高等农林院校的调研和协作中，我们了解到当前高校的教与学发生了深刻变化，也真切感受到课程和教材建设所面临的挑战和机遇。如何建设支撑学生自主学习和校际共建共享的课程和新形态教材成为现实课题，结合我社 2009 年以来在数字课程建设上的探索和实践，我们提出了“高等农林院校基础课程精品资源共享课及系列教材”建设项目，并获批列入科技部“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”项目(项目编号：2009IM010400)。项目建设理念得到了众多农林高校的积极响应，并于 2012 年 12 月—2013 年 6 月，分别在北京、扬州、武汉、哈尔滨、福建等地陆续召开了项目启动会议、研讨会和编写会议。2014 年，项目成果“iCourse · 教材：高等农林院校基础课程系列”陆续出版。

本系列教材涵盖数学、物理、化学化工、计算机、生物学等系列基础课程，在出版形式、编写理念、内容选取和体系编排上有不少独到之处，具体体现在以下几个方面：

1. 采用“纸质教材+数字课程”的出版形式。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，纸质教材内容精炼适当，并以新颖的版式设计和内容编排，方便学生学习和使用；数字课程对纸质教材内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源配合的综合知识体系。

2. 创新教学理念，引导自主学习。通过适当的教学设计，鼓励学生拓展知识面和针对某些重要问题进行深入探讨，增强其独立获取知识的意识和能力，为满足学生自主学习和教师教学方法的创新提供支撑。

3. 强调基础课程内容与农林学科的紧密联系，始终抓住学生应用能力培养这一重要环节。纸质教材和数字课程中精选了大量有实际应用背景的案例和习题，在概念引入和知识点讲授上也总是从实际问题出发，这不仅有助于提高学生学习基础课程的兴趣，也有助于加强他们的创新意识和创新能力。

4. 教材建设与资源共享课建设紧密结合。本系列教材是对各校精品资源共享课和教学改革成

果的集成和升华，通过参与院校共建共享课程资源，更可支持各级精品资源共享课的持续建设。

建设切实满足高等农林教育教学需求、反映教改成果和学科发展、纸质出版与资源共享课紧密结合的新形态教材和优质教学资源，实现“校际联合共建，课程协同共享”是我们的宗旨和目标。将课程建设及教材出版紧密结合，采用“纸质教材+数字课程”的出版形式，是一种行之有效的方法和创新，得到了高校师生的高度认可。尽管我们在出版本系列教材的工作中力求尽善尽美，但难免存在不足和遗憾，恳请广大专家、教师和学生提出宝贵意见与建议。

高等教育出版社

2014 年 7 月

前　　言

线性代数以矩阵和向量空间为研究对象，是学生学习离散量的数学基础，也是普通高等农林院校非数学类专业的重要基础课程。学习线性代数课程的目的：一是思维训练，即如何从定性认识上升到定量刻画；二是掌握基本知识和运算技巧，为后续课程提供必要的工具。为了帮助学生学好这门课程，我们编写了全国高等农林院校教材《线性代数》及其配套数字资源。本教材由华南农业大学、四川农业大学、南京农业大学三所高等院校多年从事线性代数教学的老师联合编写而成，是编者长期教学实践经验的积累。

为了使教材深入浅出，通俗易懂，在编写过程中，编写组多次交流，广泛交换意见，在以下方面达成共识：在满足基本要求的前提下，把部分理论证明改为选讲内容；以矩阵为主线，以线性方程组和几何直观为背景进行论述；列举了大量应用实例，并介绍了 MATLAB 软件在线性代数上的应用；简化了行列式的内容；对可逆矩阵的性质进行了归纳；规范了通解的概念，介绍了线性方程组的求解步骤。＊号部分仅供教师和感兴趣的学生参考。

在线性代数学习中，向量组与矩阵及其关系是基础；行列式、特征值、秩是方阵的三个数字特征；特征向量揭示了矩阵与向量的紧密关系；向量组的秩是刻画向量组线性无关的数字特征；秩的概念把矩阵和向量组紧密联系在一起，线性方程组中系数矩阵和增广矩阵的秩与基础解系所含向量个数之间的关系就是范例。

线性代数中的概念与计算同样重要。教材中黑体标出的定义、性质、定理属于基本内容；黑体标出的步骤属于求解综合题目的技巧；全书共有 65 个实例，属于理解和掌握理论的必备过程。附录 1 列出所有黑体标注内容的具体页码，便于读者查询；附录 2 给出了教学内容逻辑结构流程图，揭示了线性代数基本知识点之间的联系；书后给出了部分习题答案，便于教师和学生学习。

数字资源中的"问一问"属于基本内容或平行内容，目的是启发读者思考；"典型例题"属于基本计算范畴，是必须掌握的运算技巧；"拓展学习"属于基本内容的延伸，供有兴趣的读者学习；"数学家小传"介绍数学家对相关知识的贡献，有助于读者了解知识背景；"应用案例"介绍知识点在实践领域的具体应用，帮助读者升华理论；"习题解答"给出了全部练习题的详细解答，可以帮助读者自查自检。纸质版教材和数字资源有机结合是本书的特色，也是编者对教学工作的有益尝试，目的是引导学生独立思考和自主学习，逐步体会学习的乐趣。

参加本书编写的人员为：魏福义（华南农业大学）、杜世平（四川农业大学）、张连宽（华南农业大学）、李仕红（南京农业大学）、石立新（四川农业大学）、朱艳丽（华南农业大学）、林利云（华南农业大学）、王莉莉（四川农业大学），最后由魏福义统一定稿。

在编写过程中得到华南农业大学、四川农业大学、南京农业大学数学系全体教师的热心帮助，使本书汲取了许多宝贵建议，在此表示衷心的感谢！

衷心感谢华南农业大学的刘金山教授和南京农业大学的张良云教授，是他们在百忙之中为本书审稿，提出许多指导意见和修改建议；此外，还要感谢高等教育出版社对本书的大力支持！

由于编写人员水平所限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正！

编　者

2015年1月于广州

目　　录

第一章
矩阵

人类的认知遵循研究数,进而向量,然后到矩阵的从简单到复杂的过程.

1.1 矩阵及其运算

应用案例 1-1

随着计算机技术的飞速发展,矩阵被有效地运用到物理学、化学、生物学、医学等众多学科中,成为解决线性问题的有力工具.

本节介绍矩阵的概念及其运算,讨论线性方程组与矩阵的关系.

1.1.1 矩阵及其性质

本小节介绍矩阵及其运算,它与数的运算有许多不同之处.

定义 1.1 将 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的一个 m 行 n 列数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 **m 行 n 列矩阵**,或 **$m\times n$ 矩阵**,简记为:$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.其中横向各排称为**行**,纵向各排称为**列**, $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**元素**,a_{ij}称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的**元素**.所有元素均为零的矩阵,称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}$.矩阵通常用大写黑体英文字母表示,矩阵的元素用小写英文字母表示.本书中矩阵的元素均为实数.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的行数与列数都等于 n,则 $\boldsymbol{A}$ 称为 **n 阶矩阵**,或称为 **n 阶方阵**.在方阵中,从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**,主对角线上的元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$称为**对角元素**.主对角线元素之和称为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**, 记为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

如下形式的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶**单位矩阵**,简称**单位阵**,记为 $\boldsymbol{I}_n$或 $\boldsymbol{I}$.

主对角线以外元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**(diagonal matrix),简称为**对角阵**,记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

易知,n 阶单位阵是 n 阶对角阵的特例.

主对角线一侧所有元素都为零的方阵称为**三角形矩阵**.三角形矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为**上三角形矩阵**.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)$ 称为**行矩阵**,又称为**行向量**.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**,又称为**列向量**.

定义 1.2 如果两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的行数和相同的列数,并且对应位置的元素均相等,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.即如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 1.3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,矩阵

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和矩阵**,这种运算称为矩阵的**加法运算**.

注意 只有当两个矩阵的行数与列数分别相等时才可以作加法运算,这样的两个矩阵称为**同型矩阵**.

矩阵加法满足下列运算规律(其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}),$$

问一问 1-1

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 是否为对角矩阵?

问一问 1-2

请写出下三角形矩阵的形式.

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

由此定义矩阵的**减法运算**

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

定义 1.4 设 λ 为一个数,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,矩阵

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**乘积**,也称为**数乘矩阵**.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ,μ 为数,数乘矩阵满足下列运算规律:

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

定义 1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times l}$的列数与 $\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{l\times n}$行数相等,由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积矩阵**,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,并把这种运算称为**乘法运算**.特别地,$m$ 个方阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**幂矩阵**,记为 $\boldsymbol{A}^m$.

假设以下的矩阵运算都有意义,可以验证矩阵运算满足如下运算规律:

(1) 结合律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;

(2) 分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

(3) 对任一数 k,有 $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

(4) 对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_{m\times n}$有 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{1.1}$$

方程组(1.1)中有 m 个方程、n 个未知量.a_{ij}代表第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数,b_i称为第 i 个方程的常数项.当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$全为零时,方程组(1.1)称为**齐次线性方程组**;当常数项不全为零时,方程组(1.1)称为**非齐次线性方程组**.

当 m,n 较大时,方程组(1.1)的书写需要多次重复未知量以及"+""="运算符号.如果将方程组(1.1)中未知量的系数抽出,可得到如下 m 行 n 列的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组的**系数矩阵**.

若考虑方程组右端的常数项,则可得到 m 行 $n+1$ 列的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组的**增广矩阵**.

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(1.1)可以通过矩阵的乘法表示成下列方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}. \tag{1.2}$$

这种用等号连接起来含有未知矩阵的等式称为**矩阵方程**.

下面给出一些矩阵运算的例子.

> 问一问 1-3
> $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,试写出矩阵方程对应的线性方程组.

例 1.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 1.2 数乘矩阵

$$2\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ -6 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.3 矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 12 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 14 & 10 \end{pmatrix}.$$

例 1.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

由定义及例 1.4 可以看出,矩阵乘法运算与数的乘法运算有一些区别:

(1) 矩阵的乘法对相乘的两个矩阵在行数和列数上有要求,即乘积 $\boldsymbol{AB}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等,否则乘法无意义.

(2) 矩阵的乘法不满足交换律.一般情况下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.实际上,$\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义;即使有意义,两者也不一定相等.

(3) 两个非零矩阵相乘有可能变成零矩阵.因此,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,同样,不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

拓展学习 1-1
数有四则运算,矩阵有"除法运算"吗?

定义 1.6 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行变成同序数的各列得到的矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是**对称矩阵**.

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\0&1\end{pmatrix}$.

问一问 1-4
令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=(-1\quad 2)$,计算 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

矩阵的转置满足如下运算规律($\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵,l 为常数):

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(l\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明 由转置矩阵的定义可得前三个性质.现在证明性质(4).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $n\times p$ 矩阵,于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(b'_{ij})_{p\times n},$$

典型例题 1-1
设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵,且满足 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})$,求证 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}$.

其中 $a'_{ij}=a_{ji},b'_{ij}=b_{ji}$.$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行第 j 列元素为 $\sum\limits_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$,而$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$中第 i 行第 j 列元素是 $\boldsymbol{AB}$ 中的第 j 行第 i 列元素,即 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$,所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

证毕

1.1.2 分块矩阵及其运算

矩阵的分块是处理复杂矩阵的常用方法.对于行数和列数较大的矩阵,运算时

经常采用**分块法**,使大矩阵的运算化成小矩阵的运算,从而简化矩阵计算.

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条横线和纵线划分成多个小矩阵,每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**,以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

将 3×4 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

分成子块的分法很多,下面举出一种分块形式

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right),$$

记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{21}=(a_{31})$,$\boldsymbol{A}_{22}=(a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34})$.矩阵 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12},\boldsymbol{A}_{21},\boldsymbol{A}_{22}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块,$\boldsymbol{A}$ 是以这些子块为元素的分块矩阵.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似,分别介绍如下.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,采用相同的分块方法,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rs} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$ 也为同型矩阵,则分块矩阵的**加法**定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}+\boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}+\boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1}+\boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}+\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}+\boldsymbol{B}_{rs} \end{pmatrix}.$$

数 λ 与分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**定义为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \lambda\boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1s} \\ \lambda\boldsymbol{A}_{21} & \lambda\boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{r1} & \lambda\boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同,设