中央
广播电视大学

王萼芳 丘维声 编

高等代数讲义/下

北京大学出版社

中央广播电视大学

高等代数讲义

下　　册

王萼芳　丘维声　编

北京大学出版社

内 容 简 介

本书是中央广播电视大学的一套试用教材。

全书分上下两册出版。下册包括多项式理论、一元高次方程、线性空间、线性变换、欧氏空间及抽象代数基本概念介绍等内容，并将“整数的可除性理论”与“代数基本定理的证明”作为附录作了简单的介绍。本书阐述详细，力求通俗易懂，深入浅出；并附有较多的例题，便于自学。每节末附有习题，书末附有习题和补充题答案。

本书也可作为大专院校线性代数教材或参考书，以及中学数学教员、工程技术人员自学参考书或函授教材。

中央广播电视大学

高等代数讲义（下）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
新华书店北京发行所发行
北京大学印刷厂排版
河北省固安县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 14.25印张 315千字
1984年5月第一版 1984年5月第一次印刷
印数：1—110,000册

统一书号：13209·88 定价：1.50元

目　　录

第六章　一元多项式

多项式是代数学中一个基本的研究对象．它与高次方程的讨论有密切的关系．在初等代数中，从只有一个未知量的一个一次方程开始，进而讨论含有两个未知量的两个一次方程的方程组，以及含有三个未知量的三个一次方程的方程组．本书第一、二两章的內容——行列式和线性方程组理论就是这一方向的直接的发展．一元一次方程的另一个更为重要的方向，是从一个未知量的一次方程进而讨论仍为一个未知量的任意二次方程，然后到某些特殊类型的三次、四次方程．这个方向的进一步发展就是一个未知量的任何次方程的研究．一个未知量的 n 次方程的一般形式为

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

为了研究这类方程的理论和解法，必须研究方程左边的多项式的性质，亦即需要更普遍地研究一元多项式．当然，多项式理论不仅是讨论一元高次方程的理论根据，并且多项式还是一类极其重要的初等函数，有广泛的应用．关于多项式的一些重要结论，不但在解决实际问题时常常用到，在进一步学习代数和其它学科时也会经常遇到．多项式理论中的一些论证和思考问题的方法，对于进一步学习也有启发作用．

这一章讨论多项式的因式分解问题．主要内容有：整除性理论，最大公因式以及多项式的因式分解等．关于高次方程的解法，将在下一章中介绍．

§1 一元多项式的运算

关于多项式的运算我们已经很熟悉了。这一节把以后经常用到的概念和结论加以复习和补充。

首先明确一下多项式的概念。

定义 1 设 x 是一个未知量(或称变量或文字)，下列形式的式子称为 x 的一个**多项式**：

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

式中的 n 是一个非负整数；$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 都是常数。

例如

$$\frac{1}{2}x^3 + 5x - 5, \quad \sqrt{2}x^4 + 2ix^2 + 1, \quad 4$$

都是 x 的多项式，而

$$2x^{1/2} - 1, \quad x^2 - 3x + x^{-1} + 2$$

都不是 x 的多项式。

这里定义的多项式只含有一个变量，所以也称一元多项式。我们讨论的都是一元多项式，以后不再声明，就简单地称作多项式。我们以后常常用 $f(x), g(x), \cdots$ 等表示多项式。有时候为了方便起见，在不致引起误解的情况下，简单地用 $f, g, \cdots$ 等表示多项式。

定义 2 设

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

是一个多项式。$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 称为 $f(x)$ 的**系数**；a_kx^k $(k = n, n-1, \cdots, 1, 0)$ 称为 $f(x)$ 的 k **次项**；a_k 称为 $f(x)$ 的 k **次项系数**。$f(x)$ 的零次项也称作 $f(x)$ 的**常数项**。

定义 3 如果两个多项式 $f(x), g(x)$ 的同次项的系数都

相等，就称这两个多项式**相等**，记作 $f(x)=g(x)$。

在一个多项式中可以任意加入或去掉一些系数为 0 的项。例如

$$\frac{1}{3}x^3+5x-5=0x^4+\frac{1}{3}x^3+5x-5$$

$$=\frac{1}{3}x^3+0x^2+5x-5;$$

$$3=0x^2+0x+3.$$

定义 4 如果在多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

中，$a_n\neq 0$。则称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的**首项**；a_n 称为 $f(x)$ 的**首项系数**；n 称为 $f(x)$ 的**次数**。

例如 $\frac{1}{3}x^3+5x+5$ 的首项为 $\frac{1}{3}x^3$，首项系数为 $\frac{1}{3}$，次数为 3；多项式 3 的首项为 3，首项系数也是 3，它的次数等于 0。

以后我们用次 $f(x)$ 或简单地用次 f 表示多项式 $f(x)$ 的次数。

系数全为 0 的多项式称为**零多项式**，记作 0。零多项式是唯一的无法确定次数的多项式。因此在应用符号"次 $f(x)$"时必须注意，只有在 $f(x)\neq 0$ 时，"次 $f(x)$"才有意义。非零常数都是 0 次多项式，这需要与常数 0（即零多项式）加以区别。这一点在考虑多项式的次数时要特别注意。

在有些书中把零多项式的次数规定为 $-\infty$。这样来规定零多项式的次数在以后的讨论中也不会引起矛盾。但是我们为了易于接受起见，还是不规定"0"的次数。

我们在初等代数中曾经学过多项式的加法、减法及乘

法。两个多项式相加（或相减）就是把它们的同次项的系数相加（或相减）。两个多项式相乘就是把第一个多项式的各个单项与第二个多项式的各个单项分别相乘，然后合并同次项。多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相加、相减与相乘的结果分别称为这两个多项式的**和**、**差**与**积**，记作 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$（或$f(x)g(x)$）。下面来举几个例子。

例 1 设$f(x)=2x^2-3x+1$，$g(x)=x^3-2x+2$。求$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$。

解

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (2x^2-3x+1)+(x^3-2x+2) \\ &= (0+1)x^3+(2+0)x^2 \\ &\quad +(-3-2)x+(1+2) \\ &= x^3+2x^2-5x+3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (2x^2-3x+1)-(x^3-2x+2) \\ &= (0-1)x^3+(2-0)x^2 \\ &\quad +[-3-(-2)]x+(1-2) \\ &= -x^3+2x^2-x-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (2x^2-3x+1)(x^3-2x+2) \\ &= 2x^2\cdot x^3+(-3x)\cdot x^3+1\cdot x^3 \\ &\quad +2x^2\cdot(-2x)+(-3x)\cdot(-2x) \\ &\quad +1\cdot(-2x)+2x^2\cdot 2 \\ &\quad +(-3x)\cdot 2+1\cdot 2 \\ &= 2x^5-3x^4-3x^3+10x^2-8x+2. \end{aligned}$$

多项式的运算可以用竖式来进行，比较简单明了。关于多项式的加法和减法，本来就比较简单，一般地不必用竖式就可以很快地算出结果。至于多项式的乘法，应用竖式就方便多了。例如上面的例子可以这样来计算：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & f(x)= & & & 2x^2 & -3x & +1 \\
\times & g(x)= & & x^3 & & -2x & +2 \\
\hline
 & & 2x^5 & -3x^4 & +x^3 & & \\
 & & & & -4x^3 & +6x^2 & -2x \\
 & & & & & 4x^2 & -6x+2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$f(x)g(x)=2x^5-3x^4-3x^3+10x^2-8x+2$$

这样计算不仅方便，而且不易出错。有时候，为了更为方便，我们还可以应用分离系数法来进行运算，就是把 x 的方幂略去不写；只把系数按次序写出来进行运算。我们仍旧用上面的例子来说明。上面的竖式可以用分离系数法简写成：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2 & -3 & 1 & & & \\
\times & 1 & 0 & -2 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & 1 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & -4 & 6 & -2 & \\
 & & & & 4 & -6 & 2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 10 & -8 & 2
\end{array}
$$

其中最后一行就是 $f(x)g(x)$ 按降幂排列的系数。

应用这种方法进行运算的时候，一定要注意，必须把系数是 0 的项补上。我们再举一例子。

例 2 $f(x)=x^3+2$，$g(x)=x^3-3x^2+1$。求 $f(x)g(x)$。

解 应用分离系数法进行计算：

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & \\
\times & 1 & -3 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 2 & & & \\
 & & -3 & 0 & 0 & -6 & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 & 3 & -6 & 0 & 2
\end{array}
$$

所以 $$f(x)g(x)=x^6-3x^5+3x^3-6x^2+2.$$

在有些时候，$f(x)\cdot g(x)$ 可能是按升幂排列的，那么我们当然也可以按升幂排法写出各项系数来进行计算，得出

$f(x)g(x)$按升幂排法的系数。还有，从上面的例子可以看出，如果$g(x)$中有一些系数为 0 的项，在计算时可以不必写出一整行 0，只要在那一行写上第一个 0，然后接着算下一行就可以了。

例 3　假设 $f(x)=2-x+3x^3$，　$g(x)=3+x^2-2x^3$。求 $f(x)g(x)$

解

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 2 & -1 & 0 & 3 & & & \\
\times & 3 & 0 & 1 & -2 & & & \\
\hline
 & 6 & -3 & 0 & 9 & & & \\
 & & 0 & 2 & -1 & 0 & 3 & \\
 & & & & -4 & 2 & 0 & -6 \\
\hline
 & 6 & -3 & 2 & 4 & 2 & 3 & -6
\end{array}
$$

所以　$f(x)g(x)=6-3x+2x^2+4x^3+2x^4+3x^5-6x^6$。

上面算式中第四行的第一个 0 就是由$g(x)$中的那个 0 系数得出的。我们把这一行其余的 0 都略去不写而接着计算下一行。因此必须注意，在计算再下面一行的时候，一定要把第一个数字写在这一行第三个数字下面。对此读者可以用数的乘法中乘数含有 0 的情形进行比较和具体地领会一下。

根据以上的方法，任意给了两个具体的多项式，我们都可以求出它们的和、差与积。但是为了统一地讨论多项式的问题，我们还需要将多项式的运算用一般公式表示出来。下面来给出和、差与积的公式。

设　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$。

首先来写出$f(x)+g(x)$与$f(x)-g(x)$的表达式。因为在一个多项式中可以任意加入一些系数为 0 的项，所以总可假设 $n\geqslant m$。于是

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$$
$$+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0);$$
$$f(x)-g(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}$$
$$+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)。$$

如果 $m<n$，则式中的 $b_n=\cdots=b_{m+1}=0$。

下面来推导 $f(x)g(x)$ 的公式。

$$\begin{aligned}f(x)g(x)=&(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)\\&\cdot(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0)\\=&a_nb_mx^{n+m}+a_{n-1}b_mx^{n+m-1}+\cdots+\\&+a_1b_mx^{m+1}+a_0b_mx^m+a_nb_{m-1}x^{n+m-1}\\&+a_{n-1}b_{m-1}x^{n+m-2}+\cdots+a_1b_{m-1}x^m\\&+a_0b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_nb_0x^n+a_{n-1}b_0x^{n-1}\\&+\cdots+a_1b_0x+a_0b_0。\end{aligned}$$

在合并同次项以前，我们先来分析一下$f(x)g(x)$中各个项的系数与 x 的幂次的关系。由于$f(x)g(x)$中各项是由$f(x)$的一个项与$g(x)$的一个项相乘而得，所以可以表成

$$(a_ix^i)(b_jx^j)=a_ib_jx^{i+j}。$$

因此$f(x)g(x)$中x^k($0\leqslant k\leqslant n+m$)的系数是

$$a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0,$$

其中，如果 $i>n$，则 $a_i=0$；如果 $j>m$，则$b_j=0$。(以后遇到类似情况，都这么理解而不再重复说明。) 因此

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_{n-1}b_m+a_nb_{m-1})x^{n+m-1}$$
$$+\cdots+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_0b_0。$$

为了简便起见，我们常常把多项式的运算公式用和号来表示。

如果
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\qquad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j。$$

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i \quad (n \geqslant m);$$

$$f(x) g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) x^k.$$

从多项式的运算公式，很容易得出下述次数公式：

命题 1 1) 次$(f(x) \pm g(x)) \leqslant \max($次$f(x)$, 次$g(x))$；

2) 次$(f(x)g(x)) =$ 次$f(x) +$ 次$g(x)$。

多项式的乘积的次数不仅满足上述公式，从乘积公式还可看出：

命题 2 如果$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，那么 $f(x)g(x) \neq 0$。而且$f(x)g(x)$的首项就等于$f(x)$的首项与$g(x)$的首项之积；$f(x)g(x)$的首项系数等于 $f(x)$ 的首项系数与 $g(x)$的首项系数之积。

以上我们复习了多项式的运算，在以后的讨论以及一些实际问题中，我们不只简单地用到两个多项式的加法、减法或乘法，有时会遇到多个多项式进行复杂的运算。因此为了简化运算，必须掌握一些运算的规律。其实我们在算术与初等代数中，经常应用一些规律来比较巧妙地进行计算。例如

$$\begin{aligned}
&(a+1)(a+b-1)+(a+1)(a-b-1) \\
&\quad = (a+1)[(a+b-1)+(a-b-1)] \\
&\quad = (a+1)(2a-2) = 2(a+1)(a-1) \\
&\quad = 2(a^2-1).
\end{aligned}$$

在上面的计算过程中，第一个等号我们应用了加法对乘法的分配律；第二个等号用到加法的交换律与结合律；第三个等号应用了乘法的交换律与结合律；最后一个等号用到了平方

差公式(其实这个公式的证明也需应用好几个规律)。与数的运算类似，多项式的运算也满足下列一些规律。

命题 3 多项式的运算满足：

1) 加法交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

2) 加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))；$$

3) 乘法交换律：$f(x)g(x)=g(x)f(x)$；

4) 乘法结合律：$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$；

5) 加乘分配律：

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)。$$

这些规律是需要逐条验证的。但是由于我们在初等代数中已经熟悉并经常运用这些规律，而且这些规律的证明又比较呆板和烦琐。因此我们不准备对它们一一验证，而只是对其中的几条加以证明。目的是想介绍一下如何验证这类规律，并通过这些规律的检验复习一下多项式的运算公式。

加法交换律的证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0。$$

不妨设 $m\leqslant n$，于是

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\\&\quad+\cdots+(a_1+b_1)x+a_0+b_0\\&=(b_n+a_n)x^n+(b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1}\\&\quad+\cdots+(b_1+a_1)x+b_0+a_0\\&=g(x)+f(x)。\end{aligned}$$

因为多项式的加法比较简单，所以可以直接验证其交换律。加法结合律及乘法交换律都可以类似地证明。读者不妨自己证明一下。至于其余几条规律，其中的系数比较复杂，

要直接从等式左边推导到右边，写起来比较麻烦，再用上面的方法来证明就不大方便了，必须采用别的方法。由于两个多项式相等的意思是指它们的同次项系数相等，因此为了证明某个等式，只要证明等式两边同次项的系数相等就行了。下面我们以乘法结合律为例来说明这一方法。

乘法结合律的证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$
$$h(x)=c_lx^l+c_{l-1}x^{l-1}+\cdots+c_1x+c_0.$$

为了方便起见，我们再设

$$f(x)g(x)=d_{n+m}x^{n+m}+\cdots+d_1x+d_0;$$
$$g(x)h(x)=e_{m+l}x^{m+l}+\cdots+e_1x+e_0,$$

其中

$$d_i=\sum_{s+t=i}a_sb_t;\qquad i=0,1,\cdots,n+m,$$

$$e_j=\sum_{t+u=j}b_tc_u,\qquad j=0,1,\cdots,m+l.$$

于是，$(f(x)g(x))h(x)$ 的 k $(1\leqslant k\leqslant n+m+l)$ 次项系数为

$$\sum_{i+u=k}d_ic_u=\sum_{i+u=k}\left(\sum_{s+t=i}a_sb_t\right)c_u$$
$$=\sum_{s+t+u=k}(a_sb_t)c_u=\sum_{s+t+u=k}a_sb_tc_u.$$

$f(x)(g(x)h(x))$的 k $(1\leqslant k\leqslant n+m+l)$ 次项系数为

$$\sum_{s+j=k}a_se_j=\sum_{s+j=k}a_s\left(\sum_{t+u=j}b_tc_u\right)$$
$$=\sum_{s+t+u=k}a_s(b_tc_u)=\sum_{s+t+u=k}a_sb_tc_u.$$

所以 $(f(x)g(x))h(x)$ 与 $f(x)(g(x)h(x))$ 的同次项系数都相

等。根据多项式相等的定义，即得

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

乘法结合律得证。

多项式的乘法还满足消去律：

命题 4 如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，并且$f(x)\neq 0$。那么可以消去 $f(x)$ 而得 $g(x)=h(x)$。

证明 由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$可得

$$f(x)[g(x)-h(x)]=0.$$

如果 $g(x)-h(x)\neq 0$。那么由于$f(x)\neq 0$，故由命题 2 有

$$f(x)[g(x)-h(x)]\neq 0,$$

与假设矛盾，所以 $g(x)-h(x)=0$，即

$$g(x)=h(x).$$

以上介绍了有关多项式的基本概念及运算。在多项式的定义中，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数 a_n，$a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是一些常数。如果这些系数都是复数，就称$f(x)$是一个复系数多项式；如果这些系数都是实数，就称$f(x)$是一个实系数多项式；如果这些系数都是有理数，就称$f(x)$是一个有理系数多项式。在我们讨论多项式的某些理论和求解高次方程时，有时需要在复数范围内进行，有时需要在实数范围内进行，有时还需要在有理数或其他指定的范围内进行。但是有些问题，不论在复数或实数或有理数范围进行讨论，都可得到同样的结论，因此为了统一地进行研究，我们可以取定一个数域P来讨论系数在P中的多项式。

定义 5 设P是一个数域，用$P[x]$表示系数在P中的所有一元多项式组成的集合。$P[x]$称为数域P上的一元多项式环，P称为$P[x]$的系数域。

例如：$Q[x]$表示全体有理系数多项式所成的集合；$R[x]$